论量子力学的公理基础

乐涌涛

从三十年代冯·诺伊曼等人的工作开始，量子力学逐渐被看成是一些公理组成的数学体系．量子力学基本公理主要有以下几个：

1．一切微观状态为希尔伯特（Hilbert）空间中的矢量；

2．可观察量相应算符为希尔伯特空间中的线性厄密算符；

3．可观察量与相应算符存在如下关系（本征态情况）：

$$\mathbf{P}\psi = p\psi$$

其中 $\mathbf{P}$——算符，p——相应可观察量，ψ——希尔伯特空间矢量；

4．可观察量的平均值用下式表示（非本征态情况）：

$$\bar{p} = \int \psi^* \mathbf{P} \psi d\tau.$$

从这些公理出发，可以获得量子力学各种重要成果．但是，这些公理看来似乎没有直接的物理意义，因此，资产阶级学者们就利用这一点对量子力学进行歪曲，把量子力学说成是一种自身不矛盾的数学体系，而不是对于客观规律的反映，从而大肆宣扬主观唯心主义和神秘主义．

本文力图用辩证唯物主义观点对量子力学公理体系进行探讨．我们认为，量子力学这些公理实际上只是用数学语言反映了微观世界与宏观世界的本质联系．

一、经典物理学和量子力学

你要有知识，你就得参加变革现实的实践．[1)]

——毛泽东

经典物理学在思想方法上有两个十分明显的特点：

其一是，在经典物理中，人们认识物理学定律时，主要是通过观察来获得数据，再由这些数据构成宏观规律的模型．如在描述物体运动时，先是通过观察来获得物体的位置 x 和速度 dx/dt，再总结出描述物体运动的微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

也就是说，在这里，人们对自然界的认识，往往只被看作一个获得信息的过程，即主要是观察的过程，至少，改造世界对认识世界的作用在理论构成中被忽视了．

实际上，经典物理学的每一点微小进步都是生产力发展的结果，是人类改造和变革世界能力提高的结果．经典物理学的每一个概念都是人类从变革自然、改造世界的过程中总结出来的，而不仅仅是对自然实行观察的结果．但是，在认识宏观物体运动规律时，经典物理学总是假定研究的对象不受我们观察过程——即获得信息的过程而改变，整个经典力学的理论方法就是奠定在这一假定基础上的．然而，在认识微观世界的内部规律性时，如果不去变革它，想仅仅从外部观察它，那是绝对办不到的．你要认识原子内部的规律性，你就得变革原子．微观世界的每一性质只有在变革它的过程中才能显示出来．因此，在建立描述微观世界物质运动规律的理论时，要在理论上作经典物理那样的假定，把变革微观世界这一重要因素排除在外，那将是肯定行不通的．

经典物理学的另一特点是，把牛顿力学定理看做是万能的，是大到天体、小到微观粒子都适用的．也就是说，它把自然界看做是由经典物理所描述的一个物质层次组成的．

辩证唯物主义认为：宏观世界与微观世界是两个不同的物质层次，在这两个不同层次中，物质运动都有自己特殊的规律性．因此，不能把宏观概念生硬地搬到微观世界中去．并且，这两个层次之间存在着密切的相互作用和不可分割的联系．

正是由于经典物理本身具有这些形而上学思想方法的束缚，所以，在人类认识深入微观世界时，经典物理的方法的失败是不可避免的．

如果说，在宏观世界中，获得信息这一过程对宏观物体的改变是可以忽略的，因而，只需要通过观察来获得信息，从而构成宏观世界物质运动规律的模型，那么，在认识微观世界时，只有通过宏观状态与微观状态

1）毛泽东，《毛泽东选集》（一卷本），人民出版社，（1966），264．

这两个层次的相互作用才能揭示出微观世界内部的规律性．这种相互作用可以是对微观粒子作各式各样光学的、化学的实验；也可以是用宏观仪器来对微观粒子的某些数据进行测量；也可以是宏观世界与微观世界之间存在的内在联系．我们通过对这种内在联系的研究来认识微观世界．总而言之，这种相互作用就是对微观世界的变革．

量子力学的方法和经典力学的方法相比，之所以呈现出那么大的差别，其原因就在于经典力学仅仅考虑了一个层次，并且假定获得信息的过程对宏观物体运动没有影响，而在量子力学中，除考虑观察过程外，还要把宏观物体与微观世界的相互作用——即在变革微观世界中揭示微观世界规律这一过程考虑进去．

我们可以简单地把经典物理学方法与量子力学方法的差别图示如下：

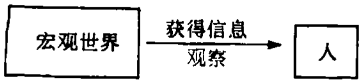

图 1　经典物理学的方法（其中获得信息时对宏观世界影响可忽略）

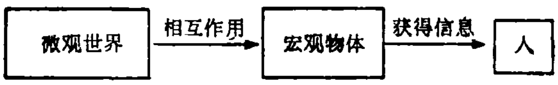

图 2　量子力学方法

二、微观世界与宏观世界

相互作用是事物的真正的终极原因．[1]

——恩格斯

1. 两个不同层次的相互作用

在这一小节我们来进一步研究宏观物体与微观世界相互作用的特点．微观世界好象一个黑箱，我们把微观世界的构造比为黑箱的内部状态．黑箱的输入表示宏观物体对微观世界的作用(图 3)．这种作用可以是非常广义的，它可以表示在对微观世界作各种各样的实验时，对微观状态的影响；也可以表示用宏观仪器对微观状态作某种测量时宏观仪器对微观状态的作用；也可以表示宏观世界与微观世界的内在联系，由于这种联系，相应宏观世界的某种变化会引起微观世界状态的改变．这个黑箱的输出则表示微观世界对宏观世界的作用，由于这种作用，我们可以看到宏观物体的

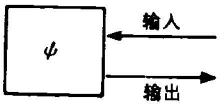

图 3　微观世界好象一个黑箱

变化，如表现出来的能量、动量的改变．这一作用通过宏观物体的某种变化，可以被实验观察到．这就是说，在认识微观世界时，我们是通过输入一输出，即变革一观察这一反复的过程来认识其内部构造的．

下面，我们分别用数学符号来表示输入一输出，内部状态，以及其关系：

我们用 $\psi_1 \psi_2 \cdot \psi_i \cdots \psi_n$ 来表示不同的微观状态．即我们给出一个微观状态的集合 $\{\psi\}$．

我们用算符 α、$\beta\cdots$ 等表示引起微观状态改变的宏观条件，算符作用于 ψ，引起 ψ 的改变．输出既然表示微观状态在一定输入条件下对宏观物体的作用，那么它一定能用相应宏观效应来表示，如这些效应是力学方面的，就能用动量 P，坐标 x，能量 E 等来表示它．我们可将这过程图示如下：

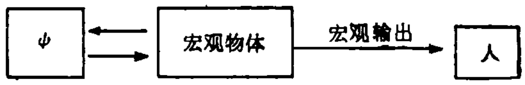

图 4　宏观物体对微观世界的作用

即我们用 ψ 表示微观状态．用算符 $\{\alpha, \beta\cdots\}$ 集合表示宏观物体对 ψ 的作用，用力学量 E，x，$P\cdots$ 等表示我们获得的宏观输出．

α 作用于 ψ 后，引起 ψ 怎样的变化呢？大量的实验表明，对于某一类作用，微观状态，被作用后本身不变，这些状态，我们称为这一作用的本征状态．

用数学符号表示，即对于某一算符 α，存在着一些态 $\psi_{\alpha 1}$，$\psi_{\alpha 2}\cdots\psi_{\alpha i}\cdots$，使得有：$\alpha\psi_{\alpha i} = \psi_{\alpha i}$．$\psi_{\alpha i}$ 称为本征态．

但对于别的一些状态（非本征态），宏观世界和它的作用将使它变为很多本征态中的一个，但究竟具体是哪一个，这将是不能预先确定的，但变成某一个本征态的概率将是一定的，将其用数学符号表示，即：

在算符 α 的作用下，如果 ψ_j 不是 α 的本征态，那么，$\alpha\psi_j$ 可以是本征态 $\psi_{\alpha 1}$、$\psi_{\alpha 2}\cdots\psi_{\alpha i}\cdots\psi_{\alpha n}\cdots$ 中的任一个，它们的出现遵循一定的概率．

在实验中，微观状态一般都是一定形态的物质波．当一定的物质波经过宏观仪器的测量，或者和某种宏观物体(如晶体表面)相互作用后，对有的物质波(本征态)作用后，不改变自己，对于非本征态，则就突跃到那些本征态去，这个现象，在量子力学中被称为波包收缩．在这里，我们看到，波包收缩完全是宏观世界与微观状态相互作用的结果，而不是象某些资产阶级学者所认为的那样，是一种主观的选择．

下面，我们将从微观状态与宏观世界这一普遍的相互作用的性质出发来进一步探讨输入（即算符对本征态的作用），内部状态，以及宏观输出（我们获得的

1）恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社，(1971)，209．

微观状态的信息)三者之间的关系.

2. 微观状态有确定宏观量的条件

对于什么样的微观状态，它才显示确定不变的宏观量呢?

显然,要某一微观状态显示一定的宏观量,这首先要求,我们做的实验,即给的输入是使微观状态显示出某一方面宏观量的实验. 对于别一类作用方式，这一微观状态就显示出别一类宏观量.

这就是说，微观状态具有某一类确定的宏观量是对一定的算符而言的,算符不一样,得到的宏观量种类就不一样,并且,对于同一个算符，可以有许多个同一类宏观量，如对于动量算符，可能有各种不同的动量值.

微观状态显示一确定宏观量的另一条件是：微观状态表现出的宏观量在多次实验中一定是稳定不变的. 也就是说,这要求当黑箱输入为一定时,宏观输出将是一定的,是长时间不变的. 这一点将是很显然的. 如果我们用实验来确定某一微观状态相应的能量，只有在每次同样条件的实验,都得到同一的能量值时,我们才能认为微观状态和这个宏观量之间存在一一对应关系.

下面,我们用数学公式把上述两个条件表述出来.

对于某一算符 α，只有当微观状态 $\psi_\alpha \varepsilon \{\psi\}$ 满足条件：$\alpha\psi_\alpha = \psi_\alpha$ 时，对于算符 α，ψ_α 才具有一确定的宏观量 a_α，即 ψ_α 是 α 的本征态. 如果某一微观状态 ψ_j，不满足这一条件，那么 α 将使 ψ_j 变为很多本征态 $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2} \cdots \psi_{\alpha i} \cdots \psi_{\alpha n} \cdots$ 中的一个,但具体变为哪一个,将是不确定的. 就是说，在进行这类实验时，微观状态将发生不确定的跃迁，实验得不到一个确定不变的结果,即 ψ_j 没有稳定的性质.

微观状态具有确定宏观量所要求的进一步条件是:

如果对于一定的标符 α，有着状态 $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}$ 都满足 $\alpha\psi_{\alpha 1} = \psi_{\alpha 1}$，$\alpha\psi_{\alpha 2} = \psi_{\alpha 2}$，对于 $\psi_{\alpha 1}$ 有一个确定宏观值 a_1，对于 $\psi_{\alpha 2}$ 有另一宏观值 a_2，则必须 $a_1 \neq a_2$. 因为,对于同一个实验不会显示两个不同的结果(如果它是稳定的),这表明，在这种情况下，状态 $\psi_{\alpha 1}$ 与 $\psi_{\alpha 2}$ 是互不相容的,即如果黑箱处于 $\psi_{\alpha 1}$ 状态,那么在算符为 α 情况下,它不可能同时处在 $\psi_{\alpha 2}$ 状态，也不可能跃迁到 $\psi_{\alpha 2}$ 状态(只要算符不变).

3. 某一微观状态同时具有两个不同类宏观值的条件

对于某一微观状态同时进行不同类的实验，即用两类不同的宏观物体对其作用,在什么情况下,这个微观状态可以同时具有两个不同类的宏观量?

如果对某一微观状态 ψ_1，在算符 α 的作用下，它具有确定值 a_1，在算符 β 的作用下，它具有确定值 b_1，那么根据上一节,我们知道,必定有:

$$\alpha\psi_1 = \psi_1,\ \beta\psi_1 = \psi_1,$$

则有

$$\alpha\beta(\psi_1) = \beta \cdot \alpha(\psi_1).$$

这时,我们称算符可对易，即 $\alpha\beta = \beta\alpha$. 如果两个算符可对易,则它们可同时得到确定宏观量.

因为,如果这时存在着某一微观状态 ψ_1，满足 $\alpha\psi_1 = \psi_1$，相应的宏观量是 a_1，则由算符对易得到

$$\alpha\beta(\psi_1) = \beta\alpha(\psi_1) = \beta(\psi_1).$$

于是得到 $\beta(\psi_1)$ 是 α 的本征态,于是有

$$\beta(\psi_1) = \psi_1.$$

即 ψ_1 也是 β 的本征态,也有一个确定的值 b_1.

从算符的对易关系我们可以看出：如果一切算符都是可以对易的，那么对于任一 ψ，任何一个算符作用于它都不改变它自身. 这意味着 ψ 将不代表微观状态，而是某一宏观物体. 这样就成了经典物理学的过程.

三、进一步的数学描述

这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实.[1]

——恩格斯

1. 微观状态与物质波

更进一步的研究指出,在非相对论情况下,每一微观状态都和一定形态的物质波相当. 如电子、质子、甚至原子都是一定形态的物质波. 对于不同的物质波,可以用不同的波函数表示,即微观状态 ψ，我们可以具体用波函数来表示. 并且,物质波是可以叠加的,即如果存在着两个物质波 ψ_1, ψ_2,那么 $a\psi_1 + b\psi_2$ (a, b 是任何复数) 也代表着另一个物质波的波函数. 这种叠加方式和矢量叠加类似. 因此，也可把微观状态表示为矢量，那么一切微观状态就是由矢量组成的线性空间. 因为波函数一般都是复函数，所以这个矢量组成的线性空间是复线性空间. 并且，因为线性无关的波函数数目是无穷多的，所以这个线性空间是一无穷维线性空间. 我们在后面可以看到，这个线性空间刚好就是数学上的所谓希尔伯特空间.

因为一切微观状态都可以看做线性空间的矢量，则任一微观状态一定可以用别的一些状态的线性叠加表示. 如状态 ψ_j，将其表示为 α 算符本征态 $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2} \cdots \psi_{\alpha i} \cdots \psi_{\alpha n} \cdots$ 的线性叠加，即

$$\psi_j = \Sigma\lambda_i\psi_{\alpha i}. \qquad \lambda \text{ 是复数.}$$

其中 λ_i 对不同的 ψ_j 是不同的. 由于 ψ_j 可以表

---

1) 恩格斯,《反杜林论》,人民出版社,(1970),35.

示为 α 算符本征态的线性叠加，因此 ψ_j 一定不是 α 算符的本征态。即用算符 α 作用于 ψ_j 后，将使 ψ_j 跃迁到 α 的本征态去。实验表明，ψ_j 突跃到 α 算符本征态 $\psi_{\alpha i}$ 的概率和 ψ_j 用 $\psi_{\alpha i}$ 展开式中 $\psi_{\alpha i}$ 前面的 λ_i 的绝对值平方成正比，即：

$$P_{ji} = \lambda_i \lambda_i^*.$$

P_{ji} 为在 α 算符作用下，ψ_j 态跃迁到第 i 个本征态的概率，λ_i 是 ψ_j 用 $\psi_{\alpha i}$ 展开式中的系数。

并且对于某一算符的本征态 $\psi_{\alpha 1} \cdots \psi_{\alpha i} \cdots \psi_{\alpha n} \cdots$，因为它们是互不相容的，并且，不允许存在它们之间的跃迁，这样，任一 $\psi_{\alpha i}$ 不能表示为别的 $\psi_{\alpha 1} \cdots \psi_{\alpha i} \cdots \psi_{\alpha n} \cdots$ 的线性叠加。这就是说，同一算符的本征态必须是线性无关的向量。

2. 线性变换和本征矢量

综上所述，我们已经明确了如下几点：

(1) 微观状态可用物质波的波函数表示，并且，一切微观状态组成了一个复线性空间，任一微观状态相当于这一复线性空间的一个矢量。

(2) 宏观物体对微观状态的作用是用算符表示的，这些算符作用于微观状态，引起微观状态的改变。

(3) 对于某一算符 α，如果某一微观状态 ψ_a 要在算符 α 作用下有确定的宏观值 a，那么这时，一定要满足如下条件：

$$\alpha\psi_a = \psi_a.$$

(4) 如果对同一算符 α，ψ_a，有一确定宏观值 a_1，ψ_{a2} 有另一宏观值，a_2，当然，这时同时有 $\alpha\psi_{a1} = \psi_{a1}$，$\alpha\psi_{a2} = \psi_{a2}$，只要 $a_1 \neq a_2$，ψ_{a1} 与 ψ_{a2} 互不相容，即黑箱不能同时既处于 ψ_{a1}，又处于 α_{a2}，且 ψ_{a1} 与 ψ_{a2} 线性无关。

在这种情况下，能否将这四条归为一个更为明确，使用更为方便的数学概念呢？我们知道，在有关线性空间的数学中，有一个这样的定理：对任一个复线性空间 H，如果规定了任何两个矢量 ψ_1、ψ_2的内积，并且使它满足一定条件，那么，对这个线性空间的任何线性变换 α，如果存在着一些矢量 $\psi_{a1}, \psi_{a2} \cdots \psi_{ai} \cdots \psi_{an} \cdots$，则，

$$\alpha\psi_{a1} = a_1\psi_{a1}, \alpha\psi_{a2} = a_2\psi_{a2},$$
$$\alpha\psi_{a3} = a_3\psi_{a3} \cdots a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$$

都是实数，这时，只要 $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \cdots$，则，这些矢量 $\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3} \cdots$ 都是互相正交的（即它们的内积为零）。

简而言之，这个定理的意义是：如果对于某一线性变换 α，矢量空间中存在着一些矢量，α 作用的结果不改变各矢量的方向，只改变其长度，则这些矢量都是正交的。

利用这个定理，我们只要把算符看做是线性空间的线性变换，把条件 $\alpha\psi_a = \psi_a$ 改作 $\alpha\psi_a = a_a\psi_a$（其中 a_a 是状态 ψ_a 在 α 算符作用下对应的宏观值），那么，互不相容的微观状态可看做正交矢量，并且前面所要求的微观状态 ψ 的其他性质就可推出来。

并且，本征态所显示出来的宏观量一定是实数。因此要求线性算符满足 $\alpha\psi_a = a\psi_a$ 式中的 a 是实数。我们从数学上知道，这要求 α 不仅是线性的，即 $\alpha(a\psi_1 + b\psi_2) = a\alpha\psi_1 + b\alpha\psi_2$，而且要求 α 是厄密的。很显然，这一切就构成了在第一章所述的量子力学前面三个公理。

3. 宏观量的平均值

我们再来考察，在算符 α 作用下，对于 α 的非本征态 ψ_j，它可能有什么样的宏观值呢？因为 ψ_j 不是 α 的本征态，α 作用于 ψ_j 后，就将 ψ_j 突跃到 α 的本征态 $\psi_{a1}, \psi_{a2} \cdots \psi_{ai} \cdots \psi_{an} \cdots$ 中去，这时，每次实验结果都不一样，微观状态 ψ_j 这时没有确定不变的宏观值，每次实验的结果都以不同概率得到 α 的本征态 $\psi_{a1}, \cdots \psi_{an} \cdots$ 等所具有的宏观值 $a_{a1}, a_{a2} \cdots a_{an} \cdots$。

如在算符 α 作用下，对 ψ_j 作充分多的实验，α 有时使ψ_j 变成 ψ_{a1}，其宏观值为 a_{a1}；有时将 ψ_j 变成 ψ_{ai}，宏观值为 a_{ai}；那么，只要实验次数充分多，我们就可得到一个对 ψ_j 测得的宏观值的平均。我们记这个平均值为 $\bar{a}_j$。

显然 $\bar{a}_j = P_1a_{a1} + P_2a_{a2} + P_3a_{a3} + \cdots P_na_{an} + \cdots$

其中 P_i 是 ψ_j 跃迁到 ψ_{ai} 的概率，$a_{a1} \cdots a_{an} \cdots$ 为不同的本征态相应的宏观量。

因为 ψ_j 可以用 ψ_{ai} 的线性叠加表示，即

$$\psi_j = \Sigma\lambda_i\psi_{ai} \qquad \lambda_i\lambda_i^* = P_i$$

那么有 $\alpha\psi_j = \Sigma\lambda_i\alpha\psi_{ai}$ 因为 ψ_{ai} 是 α 的本征态，即 $\alpha\psi_{ai} = a_{ai}\psi_{ai}$，于是有 $\alpha\psi_j = \Sigma_{\lambda i}a_{ai}\psi_{ai}$ 同样对 ψ_j 的共轭波函数也有

$$\psi_j^* = \Sigma\lambda_i^*\psi_{ai}^*.$$

因为 $\alpha\psi_j$ 与 ψ_j^* 是两个不同的矢量，对于任何两个矢量 ψ_1, ψ_2，我们可以把它们的内积 $(\psi_1\psi_2)$ 定为

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^*\psi_2 d\tau,$$

那么，

$$(\psi_j, \alpha\psi_j) = \int (\Sigma\lambda_i^*\psi_{ai}^*) \cdot (\Sigma\lambda_i a_{ai}\psi_{ai}) d\tau$$
$$= \sum_{ik} \lambda_i\lambda_k^* a_{ai} \int \psi_{ai}^*\psi_{ak} d\tau.$$

因为当 $i \neq k$ 时，ψ_{ai}^* 和 ψ_{ak} 是正交的，即

$$\int \psi_{ai}^*\psi_{ak} d\tau = 0,$$

当 $i = k$ 时，令 $\int \psi_{ai}^*\psi_{ai} = 1$

这时，就得到

$$(\psi_j, \alpha\psi_j) = \int \psi_j^*\alpha\psi_j d\tau = \sum_i \lambda_i^*\lambda_i a_{ai}$$

因为 $\lambda_i^*\lambda_i = P$，于是有

$$\int \psi_i^* \alpha \psi_i a\tau = \sum_i P_i a_{ai} = \bar{a}_i.$$

这就是第一章中所谓的公理 4.

通过这几节的分析我们可以看到，所谓量子力学的公理实际上根本不是什么神秘的东西，也不是数学家头脑的自由创造，它实际上只是以数学形式描述了宏观物质与微观状态相互作用的过程.

4. 一些算符的具体形式

从前面分析，我们知道了，宏观物体对微观状态的作用可以用线性厄密算符来表示. 但一些具体算符，如动量算符，坐标算符，它们应具有什么具体形式呢？这些形式的得到，也完全是从大量实验事实中总结出来的. 如动量算符，它代表了在测量微观状态动量时对微观状态的作用（或者说，它代表了显示微观状态动量的那一类实验）. 因为显示出一确定不变动量的物质波与平面波相当，都可表示为如下形式：

$$\psi_P = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-P\cdot x)}.$$

即对于这样形态的物质波，在进行显示动量实验时（如和晶体表面作用），它不改变自己，并在宏观上显示出一定动量值. 从这点出发，而获得动量算符 **P** 的具体数学形式.

显然，根据微观状态显示确定宏观值的条件：

$\mathbf{P}\psi_P = P\cdot\psi_P$，那么有

$$\mathbf{P}[Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-P\cdot x)}] = P\cdot Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-P\cdot x)}$$

于是马上可以发现

$$P_x = -\frac{\hbar\partial}{i\partial x},$$

即它是对坐标的微分算符.

我们再来看看坐标算符是怎样求得的.

我们知道，代表微观状态的波函数如果表示为位置 x 的函数，那么 $\psi\cdot\psi^*$ 就表示微观粒子处于位置 x 的概率，就是说，对于位置算符的非本征态，在进行测定其位置实验时，我们得不到其确定的座标值，而只能得到它的一定概率分布. 那么根据上一节所述的平均值公式，可得到

$$\bar{x} = \int \psi^*\mathbf{x}\psi d\tau$$

$\mathbf{x}$ 是坐标算符，$\bar{x}$ 是测定位置的平均值. 因为 $\psi\psi^*$ 是某一点粒子出现的概率，于是粒子在充分多次测得位置平均值为：

$$\bar{x} = \int x\psi^*\psi d\tau = \int \psi^* x\psi d\tau.$$

于是马上得出，位置算符 $\mathbf{x}$ 就是 x. 即位置算符作用于 ψ 等于 x 乘以 ψ.

至于一些更为复杂的算符如何确定，我们将在下一章谈到. 这时要运用认识微观世界的一个重要方法，即构成模型的方法.

四、微观世界的宏观模型

人不能完全把握＝反映＝描绘全部自然界、它的“直接的整体”，人在创立抽象、概念、规律、科学的世界图画等等时，只能永远地接近于这一点.[1)]

——列宁

我们知道，要认识微观世界的内部构造，就必定包括如下两个方面：

（1）微观状态是怎样的. 一般微观状态用一定形态的物质波表示，那我们要求出物质波的形态.

（2）这一微观状态是怎样和宏观世界作用的，即我们要知道代表宏观物作用于它的算符的具体形式，以及这些微观状态具有什么样的宏观量. 这些数值可以直接和实验相比较.

这两个问题互相关连. 一般说来，只要我们知道算符的具体形式，只需要解方程

$$\alpha\psi = a_a\psi$$

（其中 α——算符，a_a 为相应宏观值）就可得出 ψ 的形式以及 a_a 可能取的值.

对于有些算符如动量算符 **P**，坐标算符 $\mathbf{x}$ 的形式，我们已经知道了，对于别的一些算符，我们希望能找到它们和 **P** 以及 $\mathbf{x}$ 的关系. 下面我们来证明这一定理，即：如果我们用一些已知算符的幂级数来定义这些算符的函数，如果一切算符都是可以对易的，那么，算符之间的函数关系与可观察量之间的函数关系相同.

假定存在着任一算符 $\mathbf{H} = f(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3 \cdots \mathbf{L}_n)$

$\mathbf{H}$、$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3 \cdots \mathbf{L}_n$ 是可对易的算符，则它们有共同的本征态. 今选取一个本征态 ψ，于是对 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_n$，$\psi$ 态分别具有一定的宏观量 $L_1, L_2, L_3 \cdots L_n$. 并且有

$$\mathbf{H}\cdot\psi = H\psi$$

H 为 $\mathbf{H}$ 作用下 ψ 的宏观量.

在 $\mathbf{H}$ 为厄密的条件下，将 $f(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3 \cdots \mathbf{L}_n)$ 展开为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3 \cdots \mathbf{L}_n$ 的幂级数分别作用于 ψ，因

$$\mathbf{L}_1\psi = L_1\psi \quad \mathbf{L}_2\psi = L_2\psi, \cdots \mathbf{L}_n\psi = L_n\psi$$

且算符都可对易，那么显然有

$$H = f(L_1, L_2, L_3, \cdots L_n)$$

即宏观量之间的函数与算符之间的函数关系相同.

我们来看一下，这个定理有什么意义呢？我们知道，如果一切算符都可对易，这就意味着 ψ 不是微观状态，而是某一宏观物体. 因为这时，获得信息过程对微观状态的作用可忽略不计. 而算符表示什么呢？它表示不同的宏观实验，算符之间的关系是表示了各类实

1）列宁，《哲学笔记》，人民出版社，(1974)，194.

验之间的关系．那么我们马上可以想到，如果在做某一宏观实验时，我们确定了各宏观量之间的函数关系，那么，我们就可以用这函数关系来描述代表这一宏观实验的算符．如果我们再用同样的算符对微观状态作用（即用同样条件作微观状态实验），那么算符形式肯定认为还是那样，只是它们变得不可对易了．这不可对易不是算符改变了，算符没有变，是由于我们实验对象变了，成为微观状态．我们写出了算符的具体形式后，只要解方程，就可以得到这个算符相应的微观状态的本征值．这个值可以和实验观察进行比较．事实证明，计算值和实验值很好地相符合．下面我们举一个例子来说明这一点．

如果我们在辏力场中观察某一宏观粒子，这时，我们可以测得粒子的能量 E，动量 P，坐标 x，在这一实验中（即当粒子处于辏力场中时），E、P、x 这三个值不是独立的，它们存在着一定的函数关系．从经典力学我们知道：

$$E=\frac{P^2}{2m}+U(r)$$

r 为坐标的函数，表示粒子到力心的距离．那么从前一定理我们知道，如果测定动量的实验用算符表示，测定坐标实验用算符表示，那么在同样辏力场中，测定能量的实验用 $\mathbf{H}$ 表示，那么一定有：

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{P}^2}{2m}+U(\mathbf{r})$$

如果我们在同样辏力场中观察微观粒子，那么宏观实验条件没有变，算符形式不变．那么微观粒子在这一辏力场中的有确定能量的状态 ψ，以及相应可能具有的确定值 E，满足如下方程

$$\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2m}+U(\mathbf{r})\right]\psi=E\psi$$

而动量算符是 $-\hbar\partial/i\partial x$，坐标算符是 x，那么用它们代人，方程便确定了．解这个方程把 E 允许可取的值和实验结果相比较，得到了很满意的结果．同样把这一构成算符的方法用于别的实验中，如电磁场与微观粒子的作用，结果也符合得很好．但是必须指出，这一构成算符的方法应用是有条件的，从前面的分析我们知道，这一条件就是，我们假定对宏观物体做与微观物体条件相同的实验，但这并不是永远可以做得到的，因为微观世界与宏观世界是两个不同的层次，有的存在于微观世界的场在宏观状态下并不存在，如介子场．这时，我们在研究微观世界时，也需要构成算符．但这时，算符的不同形式表示什么呢？它仅仅是微观世界的宏观模型．至于这些宏观模型是否正确，我们不能通过宏观实验来判断，我们只能根据这一模型构成的算符来织成方程，把方程解出来，再将解出的宏观值和实验结果相比较，如果和实验符合，则我们认为它在一定程度上是正确的．如果不合，就需要修改模型．就这样通过实践—认识—再实践，这一反复认识过程来达到对微观世界的正确认识．今天量子力学与量子场论所运用的方法正是符合这一认识论的辩证法的，只不过它用较抽象的数学语言把这一过程表示出来．它完全不是象很多资产阶级学者所认为的那样，把微观世界内部构造只当作是一些数学符号，是少数天才头脑里想象出来的．

* * *

上面进行的分析和探讨，表明了所谓抽象的量子力学公理体系，是人类在变革微观世界的实践中总结出来的，量子力学之所以具有经典物理学完全不同的形式，其原因在于，它用完整的数学语言描述了宏观世界与微观世界作用的过程，描述了在变革微观世界中获得微观世界信息的过程．它证明了变革世界是认识世界最重要的途径这一辩证唯物主义观点．如果不承认这一点，不承认宏观世界与微观世界是两个不同的层次，不承认这两个层次的内部联系，就不可能正确认识微观世界．