

[5] B. J. Alder and R. M. Christian, *Phys. Review Letters*, 7-10 (1961).
 [6] 徐祖耀,《金属学原理》,上海科学技术出版社,(1964).
 [7] W. D. Horkins, *J. Chem. Phys.*, 10(1942), 268.
 [8] R. Berman, "Physical Properties of Diamond", Oxford, (1965).
 [9] 乌曼斯基,《金属学物理基础》,科学出版社,(1958).
 [10] Д.И. 布洛欣采夫,《量子力学原理》,高等教育出版社,

(1965).
 [11] 钱学森,《物理力学讲义》,科学出版社,(1962).
 [12] 稻垣道夫,炭素, 59 (1969), 286.
 [13] A. R. Ubbelonde and F. A. Lewis, "Graphite and Its Crystal Compounds", Oxford, (1960).
 [14] 苟清泉,高温高压下石墨转变金刚石的结构,吉林大学学报,3-5(1973).

约瑟夫逊结电路的相平面解法

吴培亨
 (南京大学物理系)

当两块超导体之间存在弱耦合时,便形成约瑟夫逊结,近十几年来在物理学的许多领域中得到了广泛的应用。描述它的基本方程是(图1)

$$i = i_0 \sin \theta, \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V = \frac{2\pi}{\Phi_0} V. \quad (2)$$

- 其中 i —— 通过结的超流;
 i_0 —— 超流的临界值;
 V —— 结两端的电压;
 θ —— 两块超导体内波函数的量子相位差;
 e —— 电子电荷;
 \hbar —— 普朗克常数除以 2π ;
 Φ_0 —— 磁通量子。

此外,我们并已假设结的面积很小,故不必考虑

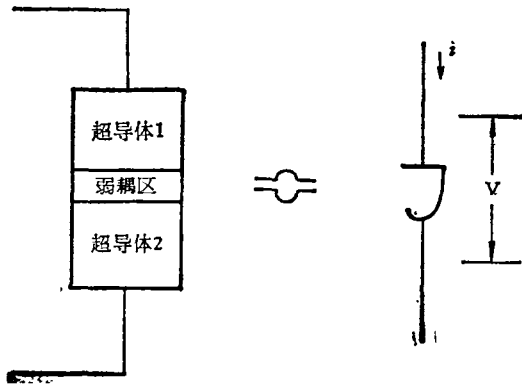


图1 约瑟夫逊结的示意图

θ 的空间变化。

在实际应用中,遵守方程(1),(2)的理想约瑟夫逊结总是与其它电路元件同时存在而构成某种电路结构。一般地来说,描述电路动力学性质的微分方程是非线性的,这就给分析问题带来不少困难。目前用得较多的分析方法有数值解法^[1]、电路模拟法^[2]、机械模拟法^[3]等等。本文通过一个简单的例子说明,非线性振荡理论中熟知的相平面方法用于求解含有约瑟夫逊结的电路是很有效的。这种做法本质上是微分方程的几何解法在现代超导技术中的一种可能应用,它比较充分地揭露了系统的动力学性质,结果也简洁明瞭。由此可知,非线性振荡理论中的许多基本理论方法用于研究超导电路是大有潜力的。

考虑图2所示的结构,其中, R 表示约瑟夫逊结的分路电阻, C 表示结电容,并有直流电流 i_{dc} 馈入至三者的组合中。显然,描述系统的电路方程是

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + i_0 \sin \theta = i_{dc}. \quad (3)$$

注意到(2)式表示的关系,并引入记号

$$T = \frac{1}{RC} t, \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{2\pi i_0 R^2 C}{\Phi_0}, \quad (5)$$

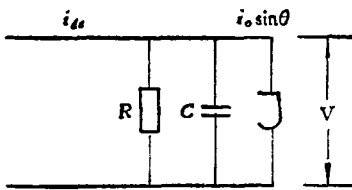


图2 考虑了结电容和分路电阻后, 约瑟夫逊结的等效电路

则上式可以化为

$$\frac{d^2\theta}{dT^2} + \frac{d\theta}{dT} + \gamma \sin\theta = \gamma \frac{i_{dc}}{i_0} \quad (6)$$

这样, 我们得到了关于 θ 的二阶非线性微分方程, 它的解 $\theta(T)$ 将能完整地描述电路系统的状态, 如: $\frac{d\theta}{dT}$ 代表结两端的电压波形; $i_0 \sin\theta$ 代表流过结的电流波形; 等等。特别是, 如果我们以 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 为参量求出电压波形的时间平均值 $\langle \frac{d\theta}{dT} \rangle$, 便能得到系统的直流 $I-V$ 特性曲线, 是分析许多种器件应用的基本出发点。

为了避免直接求解非线性微分方程(6)的困难, 我们引用相平面的概念^[4,5]。对于二阶动力系统而言, 如能给出任一时刻下的“位置” θ 和“速度” $\frac{d\theta}{dT}$, 它的状态便是完全确定了; 因此, 可以把 θ 和 $\frac{d\theta}{dT}$ 称为系统的“相座标”, 用不同时刻系统在 $\frac{d\theta}{dT} \sim \theta$ 平面上描出的“相轨迹”来表示它的动力学性质。为此, 令

$$\frac{d\theta}{dT} = y, \quad (7)$$

代入(6)式, 得到相轨迹线所满足的方程是

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\gamma(i_{dc}/i_0 - \sin\theta) - y}{y} \quad (8)$$

显然, 当参量 i_{dc}/i_0 和 γ 取定后, 在相平面的某一点 $(\theta_0, (\frac{d\theta}{dT})_0 = y_0)$ 上相轨迹线所应具有斜率可由(8)式得出。反之, 为了较方便地描出相轨迹线, 我们不妨在(8)式中令 $\frac{dy}{d\theta}$

取某固定的数值 a , 得

$$y = \frac{\gamma(i_{dc}/i_0 - \sin\theta)}{1+a} \quad (9)$$

由(9)式在相平面上规定的曲线称为等倾线, 表示通过其上各点的相轨迹线具有相同的斜率 a 。令 a 取 a_1, a_2, \dots 等一系列数值, 我们使用许多等倾线充满了整个相平面, 相轨迹线在各点的切线方向均由它们给出。于是, 以等倾线为骨架, 可以从某个起始点出发逐步地把相轨迹线描绘出来。

在具体地描绘相轨迹线之前, 我们还应该注意, 在实际系统中我们只对方程(6)的周期解感兴趣。相应地, (8)式所表示的相轨迹线应该是闭合的(第一类环), 或当相平面卷成圆柱面后能够闭合的(第二类环)。关于方程(6)的周期解的存在性问题已有专著讨论^[6], 其结论是:

1. 当 $\frac{i_{dc}}{i_0} > 1$ 时, 方程(6)有周期解, 相当于第二类环。此外, 不存在第一类环。
2. 当 $0 < \frac{i_{dc}}{i_0} < 1$ 时, 方程(6)显然有常数解

$$\theta = \arcsin\left(\frac{i_{dc}}{i_0}\right) \quad (10)$$

此外, 对于每一个 $\arcsin\left(\frac{i_{dc}}{i_0}\right)$ 有一个确定的 $\frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$ 与之对应, 当 $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} > \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$ 时, 方程(6)没有周期解; 而当 $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} < \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$ 时, 有唯一的周期解, 且是第二类环。 $\arcsin\left(\frac{i_{dc}}{i_0}\right)$ 与 $\frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$ 之间的关系可以列成表 1。

现在, 我们来具体地描绘方程(6)的周期解所对应的相轨迹线。对于点接触式的约瑟夫逊结而言, 典型的数值估计是: $i_0 = 30(\mu A)$, $C = 5 \times 10^{-15}(F)$, $R = 10(\Omega)$; 代入(5)式, 得 $\gamma \approx 4.7$ 。为了将最后的结果与文献[3]对比, 我们取

表 1

$\arcsin \frac{i_{dc}}{i_0}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.571
$\frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$	0	0.157	0.313	0.469	0.623	0.774	0.924	1.071	1.193

$$\gamma = 4.2, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0.49, \quad (11)$$

故相轨迹线的方程是

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{4.2 \left(\frac{i_{dc}}{i_0} - \sin \theta \right) - y}{y}. \quad (12)$$

等倾线方程是

$$y = \frac{4.2 \left(\frac{i_{dc}}{i_0} - \sin \theta \right)}{1 + a}. \quad (13)$$

故若取 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.6$, 则 (13) 式规定的等倾线是

$$y = \frac{4.2(0.6 - \sin \theta)}{1 + a}.$$

说明在馈入的直流电流为 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.6$ 时, 系统的相轨迹线可以在上式中先令 a 取一系列数值, 得到一族等倾线后以之为骨架逐步描绘出来. 例如, 令 $a = 0$, 则

$$y = 4.2(0.6 - \sin \theta).$$

它是很容易作图的, 并表明相轨迹线通过其上各点时的斜率为零 (水平地通过); 再如, 令 $a = 0.1$, 则

$$y = \frac{4.2}{1.1}(0.6 - \sin \theta).$$

同样可以方便地画出, 并表明相轨迹线通过其上各点时的斜率为 0.1; 如此等等. 假定我们把相轨迹线的起始点选在 $a = 0$ 的那一条等倾线上, 那么, 在一段很短的区间内我们可以把相轨迹线画成水平的, 及至延伸到 $a = 0.1$ 的那条等倾线上时, 改取斜率 0.1, 等等. 这样, 我们使用折线代替了相轨迹线; 显然, 只要 a 的取值足够地多和密, 等倾线便以很高的密度充满整个相平面, 画出的相轨迹线也就是够光滑和准确了. 在目前情况中, 由于我们只关心周期解,

物理

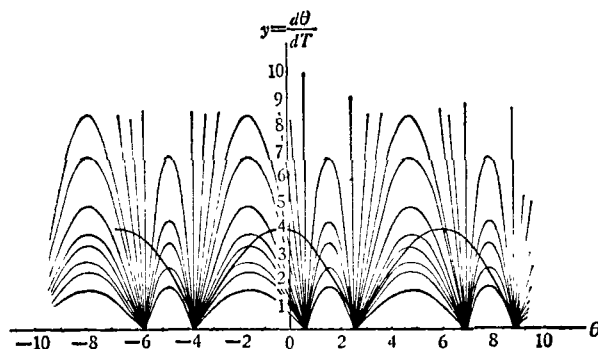


图 3 $i_{dc}/i_0 = 0.6$ 时的等倾线和相轨迹线

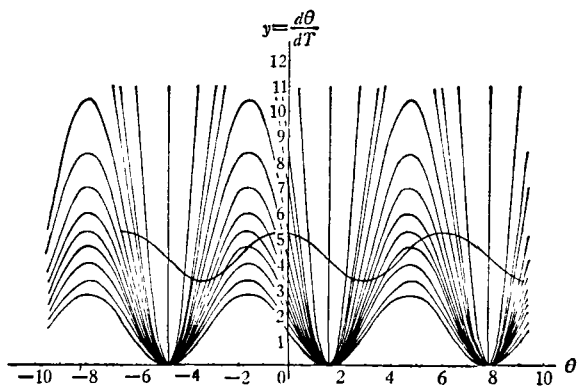


图 4 $i_{dc}/i_0 = 1$ 时的等倾线和相轨迹线

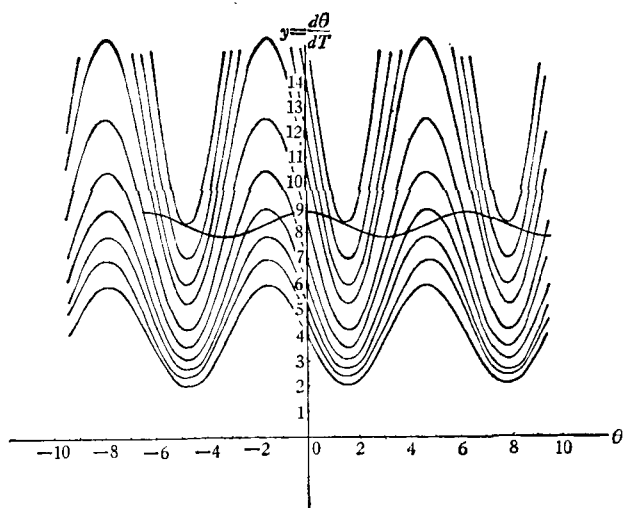


图 5 $i_{dc}/i_0 = 2$ 时的等倾线和相轨迹线

故只保留相当于第二类环的相轨迹线，其它的一概弃去不画。我们对于 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.6, 0.75, 1.0, 1.2, 2.0$ 等情况求得了代表周期解的相轨迹线，图 3—5 给出了其中一些结果，其中背景细线是等倾线，而波浪形粗线则为相轨迹线。

从这些相轨迹线，我们可以充分地了解系统的动力学性质；例如，求得不同的 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 时结两端的电压波形。用相平面法的术语来讲，这就是在相轨迹线上定出时间标尺的过程。事实上，因为 $y = \frac{d\theta}{dT}$ ，故若系统在 T_0 时处于 θ_0 和 y_0 的状态，则它过渡至 (θ_1, y_1) 的状态需要经过的时间是（图 6）

$$\Delta T = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\left(\frac{y_1 + y_0}{2}\right)} \quad (14)$$

换言之，在

$$T_1 = T_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{\left(\frac{y_1 + y_0}{2}\right)} \quad (15)$$

时，系统处于 (θ_1, y_1) 的状态。这样，如果从某

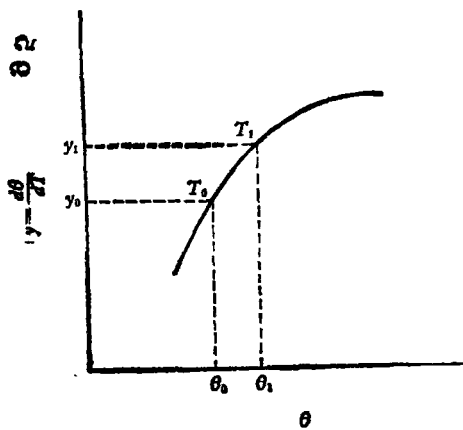


图 6 在相平面上决定时间标尺

一起始状态开始把相轨迹线分得充分的细，便可以足够精确地定出其上各个状态所对应的时间，从而获得需要的波形。

对于图 3—5 的相轨迹线决定时标后，我们可得到结两端的电压波形，如图 7—9 所示（图中只画出了波形的一个周期）。这些波形充分

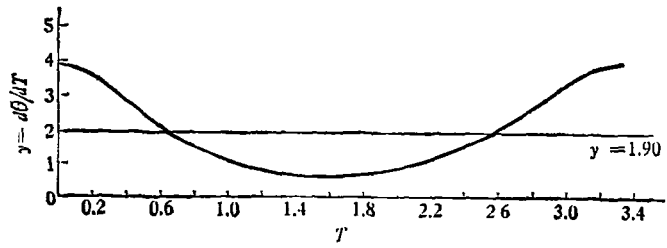


图 7 $i_{dc}/i_0 = 0.6$ 时，结两端的电压波形

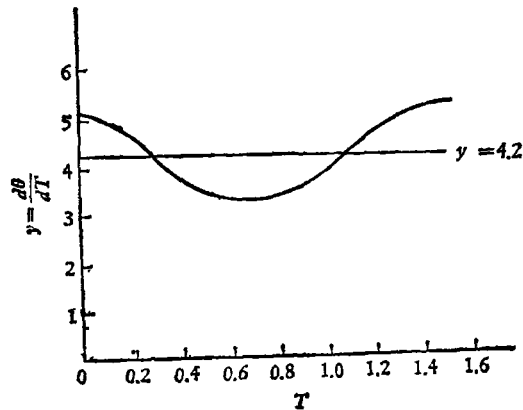


图 8 $i_{dc}/i_0 = 1$ 时，结两端的电压波形

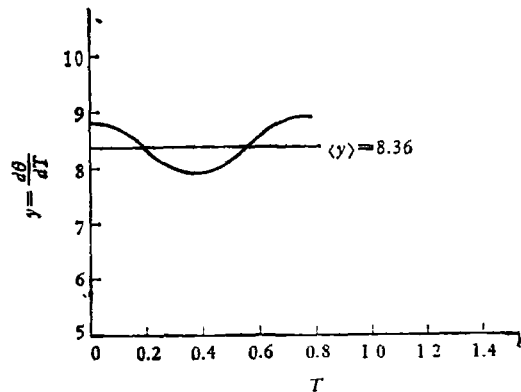


图 9 $i_{dc}/i_0 = 2$ 时，结两端的电压波形

地表达了系统的特性，并可计算出实用中感兴趣的量。例如，由波形曲线下所包围的面积，可得出平均电压的大小，亦标在各该图中。因为波形图是以直流电流 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 为参量的，故连同相应的平均电压值就给出了直流 $I-V$ 曲线上的一个点。由此求出的电流与电压的对应关系示于表 2。

需要注意的是，由于相平面的纵坐标是

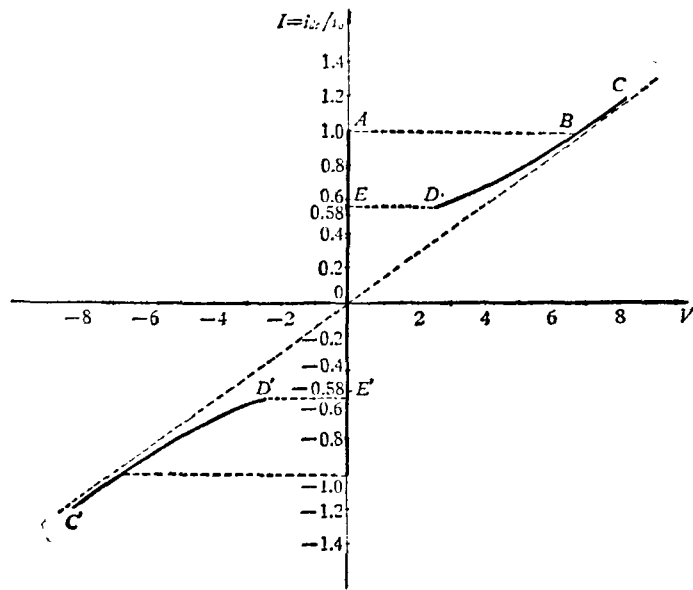


图 10 考虑了结电容后,约瑟夫逊结的直流 $I-V$ 特性曲线

表 2 电流与电压的对应关系

$\frac{i_{dc}}{i_0}$	0.6	0.75	1	1.2	2
$\langle \frac{d\theta}{dT} \rangle$	1.90	2.86	4.2	5.16	8.36
$\langle V \rangle$	3.03	4.55	6.7	8.2	13.4

$\frac{d\theta}{dT}$, 故实际上它和电压还相差一个常数的倍数, 在文献 [3] 中记为 ω_0 , 并约为 $\frac{6.7}{4.2}$. 为了与之对比, 我们不妨将表 2 第 2 行内的 $\langle \frac{d\theta}{dT} \rangle$ 值乘以同一倍数, 得到第 3 行所示的 $\langle V \rangle$. 这样, 在考虑了结电容之后, 它的 $I-V$ 特性曲线将如图 10 所示.

图 10 所示的 $I-V$ 曲线与文献 [3] 中采用机械模拟法所得者相同. 但是, 由于本例中 $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0.49$, 故按表 1 可知仅当

$$\frac{i_{dc}}{i_0} > 0.58 \quad (16)$$

时才有周期解, 且当 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.58$ 时结两端平均电压约为 2.5. 这样, 文献 [3] 把特性曲线划到 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.50$ 处是不恰当的; 而文献 [1] 中划到

$\frac{i_{dc}}{i_0} = 0.58$, $\langle V \rangle = 0$ 的点同样也是不恰当的.

另一方面, 对于 $0 < \frac{i_{dc}}{i_0} < 1$ 时还存在另一个常数解 $\theta = \arcsin\left(\frac{i_{dc}}{i_0}\right)$, 它对应于

$$\left\langle \frac{d\theta}{dT} \right\rangle = 0,$$

故图 10 中纵轴上 $[0, 1]$ 也是特性曲线的一个组成部分. 这样, 当 $0.58 < \frac{i_{dc}}{i_0} < 1$ 时, 系统有两种可能的状态, 分别对应于结两端的平均电压为零或不为零, 究为何者则决定于它的历史. 例如, 若 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 由零逐渐加大, 则它开始时便处于零电压态, 及至到达 A 点处 $\frac{i_{dc}}{i_0} = 1$, 便过渡至 B 点表示的非零电压态, 然后随着 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 的继续增大沿曲线 BC 变化. 反之, 若 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 从 C 点开始逐渐减小, 则系统先处于非零电压态, 故到达 B 点时并不发生过渡, 需到 D 点方才过渡至 E 点. 这样, 在特性曲线上便呈现出滞后的现象.

显然, 如果电流 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 的极性反转, $\left\langle \frac{d\theta}{dT} \right\rangle$ 亦将易号, 即为图 10 中第三象限的那一部分曲线. 在实验测量中常常用慢扫描的锯齿电流观察特性曲线. 如果电流是从负值开始向正值扫描的, 则由上面的讨论可知, 我们将得到 $C' \rightarrow D' \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的那一段曲线, 其中在纵轴正半轴所截的部分大于在负半轴所截者, 表现出不对称性. 若把电流扫描极性倒转 (由正至负), 则上述不对称的情况亦随之倒转. 这些论证都已为实验所证明.

总之, 用相平面法处理系统的运动方程在非线形振荡理论中是行之有效的一种方法; 本文的结果表明, 对于含有约瑟夫逊结的电路也可以采用同样的手段. 就作者所知, 非线形振

荡理论中的许多基本方法^[7], 目前还没有充分地, 在超导电路的研究中发挥作用, 有关的课题应给予重视.

参 考 文 献

- [1] D. E. McCumber, *JAP*, **39**(1968), 3113.
- [2] C. A. Hamilton, *Rev. Sci. Inst.*, **43**(1972), 445.
- [3] D. B. Sullivan, J. E. Zimmerman, *Amer. J. Phys.*, **39**(1971), 1504.
- [4] 南京大学教材, 无线电振动学, 1964.
- [5] W. J. Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1958.
- [6] G. Sansone, R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [7] A. A. Андронов и др., *Теория Колебаний*, Государственное Издательство физико-Математической Литературы, Москва, 1959.
(中译本: 振动理论, 科学出版社, 1973, 北京)

经典电振子辐射阻尼常数的统计确定*

朱 如 曾

(中国科学院力学研究所)

一、引 言

如所熟知, 经典电子谐振子在经典的微观电动力学中占有极为重要的地位. 下面的讨论针对电子振子, 但所有的论述稍加修改几乎完全适合于一般的经典电振子.

经典电子谐振子的辐射阻尼常数的传统推导有如下述^[1,2]. 就一维自由谐振子而言, 出发点是运动方程

$$m\ddot{x} + 4\pi^2 m\nu_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} = 0, \quad (1.1)$$

其中, m 和 e 分别为电子的质量和电量, c 为光速, ν_0 是振子的固有频率. 左边第三项是电子的辐射阻尼力. 方程的适用条件要求阻尼力远小于其他的力^[1]. 故先略去阻尼力, 得近似解

$$x = x_0 e^{-2\pi i \nu_0 t}.$$

将此式代入 (1.1) 的阻尼项, 于是原方程成为

$$\ddot{x} + 4\pi^2 \nu_0^2 x + \gamma \dot{x} = 0, \quad (1.2)$$

其中

$$\gamma = \frac{8\pi^2 \nu_0^2 e^2}{3mc^3}. \quad (1.3)$$

现在我们看到, 阻尼力远小于弹性力, 这意味着

$$\gamma/\nu_0 \ll 1. \quad (1.4)$$

可是, (1.1) 式含有 \ddot{x} , 这会导致电子自加速; 如果用 (1.1) 式右边加上光波的强迫力来处理介质的色散问题, 将导致违反因果性原理的结果. 所以, (1.1) 式本来就不是一个完满的方程. 这一困难的根源在于电子的点模型. 至今, 一个完满的经典电子运动方程仍未建立起来^[4]. 所以, 讨论经典电子振子的行为, 最好直接从 (1.2) 出发. 此时, 若将周期性外场作

* 1978 年 11 月 13 日收到.