

显然, 如果电流 $\frac{i_{dc}}{i_0}$ 的极性反转, $\left\langle \frac{d\theta}{dT} \right\rangle$ 亦将易号, 即为图 10 中第三象限的那一部分曲线. 在实验测量中常常用慢扫描的锯齿电流观察特性曲线. 如果电流是从负值开始向正值扫描的, 则由上面的讨论可知, 我们将得到 $C' \rightarrow D' \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的那一段曲线, 其中在纵轴正半轴所截的部分大于在负半轴所截者, 表现出不对称性. 若把电流扫描极性倒转 (由正至负), 则上述不对称的情况亦随之倒转. 这些论证都已为实验所证明.

总之, 用相平面法处理系统的运动方程在非线形振荡理论中是行之有效的一种方法; 本文的结果表明, 对于含有约瑟夫逊结的电路也可以采用同样的手段. 就作者所知, 非线形振

荡理论中的许多基本方法^[7], 目前还没有充分地, 在超导电路的研究中发挥作用, 有关的课题应给予重视.

参 考 文 献

- [1] D. E. McCumber, *JAP*, **39**(1968), 3113.
- [2] C. A. Hamilton, *Rev. Sci. Inst.*, **43**(1972), 445.
- [3] D. B. Sullivan, J. E. Zimmerman, *Amer. J. Phys.*, **39**(1971), 1504.
- [4] 南京大学教材, 无线电振动学, 1964.
- [5] W. J. Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1958.
- [6] G. Sansone, R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [7] A. A. Андронов и др., *Теория Колебаний*, Государственное Издательство физико-Математической Литературы, Москва, 1959.
(中译本: 振动理论, 科学出版社, 1973, 北京)

经典电振子辐射阻尼常数的统计确定*

朱 如 曾

(中国科学院力学研究所)

一、引 言

如所熟知, 经典电子谐振子在经典的微观电动力学中占有极为重要的地位. 下面的讨论针对电子振子, 但所有的论述稍加修改几乎完全适合于一般的经典电振子.

经典电子谐振子的辐射阻尼常数的传统推导有如下述^[1,2]. 就一维自由谐振子而言, 出发点是运动方程

$$m\ddot{x} + 4\pi^2 m\nu_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} = 0, \quad (1.1)$$

其中, m 和 e 分别为电子的质量和电量, c 为光速, ν_0 是振子的固有频率. 左边第三项是电子的辐射阻尼力. 方程的适用条件要求阻尼力远小于其他的力^[1]. 故先略去阻尼力, 得近似解

$$x = x_0 e^{-2\pi i\nu_0 t}.$$

将此式代入 (1.1) 的阻尼项, 于是原方程成为

$$\ddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0, \quad (1.2)$$

其中

$$\gamma = \frac{8\pi^2\nu_0^2 e^2}{3mc^3}. \quad (1.3)$$

现在我们看到, 阻尼力远小于弹性力, 这意味着

$$\gamma/\nu_0 \ll 1. \quad (1.4)$$

可是, (1.1) 式含有 \ddot{x} , 这会导致电子自加速; 如果用 (1.1) 式右边加上光波的强迫力来处理介质的色散问题, 将导致违反因果性原理的结果. 所以, (1.1) 式本来就不是一个完满的方程. 这一困难的根源在于电子的点模型. 至今, 一个完满的经典电子运动方程仍未建立起来^[4]. 所以, 讨论经典电子振子的行为, 最好直接从 (1.2) 出发. 此时, 若将周期性外场作

* 1978 年 11 月 13 日收到.

用的情况也包括进去, (1.2) 应统一写为

$$\ddot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x + \gamma(\nu)\dot{x} = \frac{eE_0}{m} e^{-2\pi i\nu t}. \quad (1.5)$$

此处已略去磁场作用力, 当 $E_0 = 0$ 时, 取记号

$$\gamma(\nu) = \gamma. \quad (1.6)$$

我们将在条件

$$\begin{cases} \gamma(\nu)/\nu \ll 1 \\ \gamma/\nu_0 \ll 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

的限制之下进行讨论. 这个条件使得阻尼力远小于其他力, 并且从下面所得到的 γ 和 $\gamma(\nu)$ 的表示式 (2.10) 和 (2.10') 可知, 条件 (1.7) 即为

$$\begin{cases} r_c/\lambda \ll 1, \\ r_c/\lambda_0 \ll 1, \end{cases} \quad (1.7')$$

其中, r_c 为电子的经典半径,

$$r_c = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-13} \text{ 厘米},$$

λ 和 λ_0 分别为作用在电子上的电磁波的波长和振子自由辐射的波长. 所以, 甚至对 X 射线, (1.7') 也能被满足, 至于更短的波长, 相对论和量子效应变得重要, 已不在方程 (1.5) 所能代表的范围之内了.

采用方程 (1.5) 作为出发点后, 存在 $\gamma(\nu)$ 如何确定的问题. 这时, 可以令振子的辐射功率与单位时间内振子克服阻尼力所做的功相等来确定. 不过, 下面我们将提供 $\gamma(\nu)$ 的统计确定方法, 这一方法完全不涉及振子发射辐射的具体细节. 不仅如此, 它通过对 $\gamma(\nu)$ 的确定, 反过来, 实际上还确定了振子的辐射功率表示式

$$\bar{U} = \frac{16\pi^4\nu_0^2 e^2 x_0^2}{3c^3}. \quad (1.8)$$

由于 $\gamma(\nu)$ 是基本参量, 这一讨论又能避开 \tilde{x} 所带来的困难, 故具有一定意义.

二、 $\gamma(\nu)$ 的统计确定

设在 x 方向振动的一维谐振子处于温度为 T 的热平衡辐射环境下. 在辐射场的随机扰动下, 振子将相应地作一定强度的随机振动. 现

在, 我们来分析扰动力的强度与振子振动强度之间存在什么关系. 辐射场的扰动力为平稳随机函数 $f(t) = eE(t)$, 它在区间 $(-\infty < t < +\infty)$ 上不是绝对可和函数, 不能进行傅氏变换. 为了克服这一困难, 我们定义平方可和的函数

$$f_{T_0}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{当 } |t| \leq T_0, \\ 0, & \text{当 } |t| > T_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

于是可以写出傅氏积分

$$f_{T_0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{T_0}(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu, \quad (2.2)$$

$$x_{T_0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_{T_0}(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu. \quad (2.3)$$

把 $f_{T_0}(t)$ 和 $x_{T_0}(t)$ 的傅氏分量代入 (1.5) 式解得 $\tilde{x}_{T_0}(\nu)$ 和 $g_{T_0}(\nu)$ 之间有关系

$$\tilde{x}_{T_0}(\nu) = \frac{g_{T_0}(\nu)}{2\pi m [2\pi(\nu_0^2 - \nu^2) - i\nu\gamma(\nu)]}. \quad (2.4)$$

由帕塞瓦尔定理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{T_0}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}_{T_0}(\nu)|^2 d\nu.$$

把 (2.4) 式代入上式, 并在两边取系综平均 $\langle \rangle$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x_{T_0}^2(t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle |g_{T_0}(\nu)|^2 \rangle d\nu}{4\pi^2 m^2 |2\pi(\nu_0^2 - \nu^2) - i\nu\gamma(\nu)|^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据 (1.7) 和 $\gamma(\nu)$ 估计会具有的平坦性可知, 上式右边, $|2\pi(\nu_0^2 - \nu^2) - i\nu\gamma(\nu)|^{-2}$ 的行为接近于 $K\delta(\nu - \nu_0)$, 其中心在 $\nu = \nu_0$ 处, 宽度为 $\gamma(\nu_0)$. 在 $|\nu - \nu_0| \lesssim \gamma(\nu_0)$ 的范围内, 可视 $\gamma(\nu)$ 和 $\langle |g_{T_0}(\nu)|^2 \rangle$ 为常数 (的确, 由下面的结果可知, $\langle |g_{T_0}(\nu)|^2 \rangle$ 和 $\gamma(\nu)$ 均与 ν^2 成正比例, 因此, 在 $|\nu - \nu_0| \leq \gamma(\nu_0)$ 的范围内的相对变化为 $\sim \gamma(\nu_0)/\nu_0 \ll 1$), 同时还可取 $\nu + \nu_0 \simeq 2\nu_0$, 于是 (2.5) 式成为

$$\frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x_{T_0}^2(t) \rangle dt = \frac{\langle |g_{T_0}(\nu_0)|^2 \rangle}{16\pi^2 \nu_0^2 m^2 \gamma(\nu_0) T_0}. \quad (2.6)$$

因为 $f_{T_0}(t) = eE_{xT_0}(t)$, 所以

$$g_{T_0}(v_0) = e E_{xT_0}(v_0),$$

所以

$$\langle |g_{T_0}(v_0)|^2 \rangle = \frac{8}{3} \pi e^2 T_0 \rho_{T_0}(v_0), \quad (2.7)$$

其中

$$\rho_{T_0}(v_0) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\langle |E_{xT_0}(v_0)|^2 \rangle}{2T_0}.$$

把(2.7)代入(2.6),然后在等式两边取极限 $T_0 \rightarrow \infty$, 并记

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} \langle x_{T_0}^2(t) \rangle dt,$$

和

$$\rho(v_0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \rho_{T_0}(v_0),$$

则得

$$\overline{x^2(t)} = \frac{e^2}{6\pi m^2 v_0^2 \gamma(v_0)} \rho(v_0). \quad (2.8)$$

我们知道, $\rho(v_0)$ 就是平衡辐射场的能谱密度, 所以, (2.8) 式表示振子随机振动的强度 $\overline{x^2(t)}$ 是由辐射场在振子共振频率处的能谱密度 $\rho(v_0)$ 所决定的. 考虑到谐振子的位能为

$$V(t) = 2\pi^2 m v_0^2 x^2(t),$$

(2.8) 式给出

$$\overline{V(t)} = \frac{\pi e^2}{3m\gamma(v_0)} \rho(v_0). \quad (2.9)$$

此式表明, 辐射场在振子共振频率处的能谱密度决定振子的平均位能. 将瑞利-琴斯公式

$$\rho(v) = \frac{4\pi v^2}{c^3} kT$$

和能量均分定理

$$\overline{V(t)} = \frac{1}{2} kT$$

代入(2.9)式, 得到

$$\gamma(v_0) = \frac{8\pi^2 v_0^2 e^2}{3m c^3}. \quad (2.10)$$

至此, 我们已求得共振频率 v_0 处的阻尼常数 $\gamma(v_0)$, 下面我们将证明, 当外场频率 v 偏离共振时, 只要把(2.10)中的 v_0 改成 v 即可:

$$\gamma(v) = \frac{8\pi^2 v^2 e^2}{3m c^3}. \quad (2.10')$$

证明: 设固有频率为 v_0 的振子甲处于频

率为 $v(v \neq v_0)$ 的外场作用之下. 另取一个 e 和 m 都与甲相同, 而固有频率恰恰为 v 的振子乙, 使它也受到另一频率为 v 的外场作用. 因此, 振子乙与外场共振, 故 $\gamma_Z(v)$ 可用(2.10')来表示:

$$\gamma_Z(v) = \frac{8\pi^2 v^2 e^2}{3m c^3}. \quad (2.11)$$

固定作用在振子甲上的外场的振幅和初位相, 并适当选择作用在振子乙上的外场的振幅和初位相, 则可以使得

$$x_{\text{甲}}(t) = x_Z(t). \quad (2.12)$$

这样, 甲乙两振子的 e 和 $x(t)$ 完全一样, 同时我们应该考虑电子的内部结构及内部运动状态也是一样的. 因此应该要求它们所激发的电磁场的结构及其对电子本身的反作用力完全相同, (注意, 这一“要求”比场源激发场的具体规律要求低得多)即阻尼项相同,

$$-\gamma_{\text{甲}}(v)\dot{x}_{\text{甲}}(t) = -\gamma_Z(v)\dot{x}_Z(t). \quad (2.13)$$

把(2.11)–(2.13)相结合, 得到

$$\gamma_{\text{甲}}(v) = \frac{8\pi^2 v^2 e^2}{3m c^3},$$

证毕.

余下的情况是当外场为零时的 γ . 在一级近似下, 可以略去阻尼力, 振子的 $x(t)$ 是频率为 v_0 的振动. 根据上面的“要求”, e 和 $x(t)$ 决定阻尼力, 故得

$$\gamma = \gamma(v_0) = \frac{8\pi^2 v_0^2 e^2}{3m c^3}.$$

三、讨 论

1. 我们的推导用了以下四点:

(1) 平衡辐射场对电荷的作用力是随机洛伦兹力 $\mathbf{F}(t) = c\mathbf{E}(t)$, 加上形式是 $-m\gamma(v)\dot{x}$ 的辐射阻尼力;

(2) 辐射场服从经典统计的普遍关系: 瑞利-琴斯公式;

(3) 振子遵从经典统计的普遍关系: 能量均分定律;

(4) 振子与辐射场之间能够达到热平衡状

态。

以上四点没有涉及电荷激发电磁场的具体细节。所以，尽管经典电动力学在处理电子的自场反作用问题上尚存在着困难，但 $\gamma(\nu)$ 的表示式 (2.10) 和 (2.10') 却可以不受这一“困难”的影响而预先确定出来。

2. 我们不考虑电子激发电磁场的具体细节，就能定出 $\gamma(\nu)$ 的原因在于：

(1) 用 $\gamma(\nu)$ 来描写自场反作用，本身是一种近似；

(2) 我们要求振子与辐射场之间能够达到热平衡状态，这实际上是对振子与辐射场之间的相互作用加上了一种限制；

3. 从能量交换的角度来看， γ 可视为“动力摩擦系数”^[5]，它与振子输运给场的能量速率有关，而随机洛仑兹力决定场输送给振子的能量

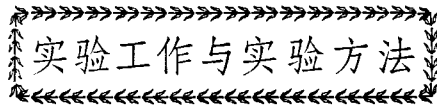
速率。两者要达到平衡，故 γ 不可取任意值。这与自发辐射的爱因斯坦系数的热平衡确定方法是一样的；

4. 因为方程 (1.5) 中的阻尼项所对应的功率就是振子的辐射功率，因此，我们对 $\gamma(\nu)$ 的确定也就是用统计方法确定了振子辐射功率的表示式 (1.8) 和振子对电磁波的散射截面。

感谢谈镐生教授的指导和甘子钊同志的有益意见。

参 考 文 献

- [1] 曹昌琪,《电动力学》,1962年,第五章.
- [2] W. Heitler,《The Quantum Theory of Radiation》,1954年,第一章.
- [3] 朗道和栗弗席兹,《场论》,1959年,§9-9.
- [4] 张宗燧,《电动力学及狭义相对论》,1957年,第五章,第九章和第十章.
- [5] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan*, **12** (1957), 570, and **12** (1957), 1203.



一个带误差校正的并串行模数转换器

模数转换器研制小组

(中国科学院物理研究所)

一、前 言

在我们生活的这个世界上,许多物理量,例如温度、长度、重量等等,都是模拟量,即它们的变化是连续的。在进行数值计算以前,首先必须把它们换算成数字量,例如用温度计测出某物体的温度是多少度;用尺子量出某物体的长度是多少米;用秤来称出某物体的重量是多少公斤;把这些连续量变成不连续的数字(这些数字是度量单位的倍数)。然后用纸记下这些测得的数字,进行计算。这个过程就是一个模数转换过程。从某种意义上说,温度计、尺子、秤等也可称作是模数转换器(通常用 ADC 或 A/D 表示)。本文所讨论的模数转换器是指把

电学模拟量(电压或电流)转换成数字量的设备,常见的数字电压表就是这类模数转换器的一种。当然,真是要用它来作模数转换器用时,因其速度太慢而常常不能满足使用者的要求。

任何物理实验装置如果要和数字电子计算机打交道,首先必须把实验装置送出的模拟物理量(如温度、光强、压力等)经传感元件(如热敏元件、光电器件、压电元件等)转换成与之有一定关系的电压或电流信号,再用模数转换器把这些电压或电流转换成数字量,这些数字量与物理实验装置送出的物理量是等值的(这里所谓的等值是指通过一定的转换关系,可以用这些数字量换算成与装置送出的物理量足够准确接近的物理量,其接近的程度视模数转换器