3. 实验上直接观察到强子的三喷注现象，这个发现提供了胶子存在的证据.

参　考　文　献

[1] D. Barber et al., *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979), 1110.

[2] D. Barber et al., *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979), 1113.

[3] D. Barber et al., MIT Laboratory for Nuclear Science Report, Report No.106 and No.#106.

单轴液晶连续体弹性形变理论

谢　毓　章

（清华大学液晶物理研究小组）

液晶是具有某些晶体性质的液体．它的分子排列方向有一定的规则性．它的许多物理特性，例如导电性、导热性、光学性能等等都具有各向异性的特点．在一定条件之下，它对所处环境的变化，例如温度、电场、磁场等等相当敏感，因此日益被人们所重视，对液晶的研究也日益增多．近年来本刊已有几篇介绍的文章和推导形变自由能表示式的文章[1-3]．本文不再多赘述．对于长丝状液晶（nematic liquid crystal，物理学名词译为丝状液晶，化学化工名词译为向列相液晶）和螺旋状液晶（cholesteric liquid crystal，物理学名词无译名，化学化工名词译为胆甾相液晶）一个经常遇到的宏观理论就是所谓富兰克（Frank）连续体弹性理论[4]，它的核心是液晶的自由能密度 g 的表达式．本文的目的不是在推导 g 的表达式而是从与熟知的固体弹性理论作比较来说明该表达式的物理内容和几何图象．

单轴液晶是指具有单轴对称性的液晶，这里包括长丝状、螺旋状和碟层状 A 相（smectic A，物理学名词译为脂状 A 相，化学化工名词译为碟状 A 相，又有人称之为近晶 A 相）液晶等．连续体理论把液晶当作连续介质来处理并且引用一个平滑的矢量场 $\boldsymbol{n}$ 来描述液晶中液晶分子的排列状况．$\boldsymbol{n}$ 称为指向矢（director，也有人称之为方向子），它描述液晶中某处大量液晶分子的长轴平均取向．习惯上把 $\boldsymbol{n}$ 取作单位矢量，是一个无量纲的物理量．液晶理论与一般液体理论不同之处就在这个指向矢 $\boldsymbol{n}$ 的引入．

处于平衡状态的液晶在外力作用下可以改变它的指向矢的方向．取消外力后指向矢又有恢复原来平衡状态下排列取向的趋势．这与固体在外力作用下发生形变，而当外力取消后要恢复到原来状态的情况非常相似．我们把液晶中指向矢取向与平衡状态下取向的差别称为弹性形变．富兰克连续体弹性形变理论又称曲率弹性（curvature elasticity）理论就是讨论在小形变条件下弹性形变对液晶的影响．

为了描述形变，让我们在液晶中所要讨论的那一点 P 选取一个右手直角坐标系（x_1，x_2，x_3），把指向矢在这三个坐标轴方向的分量称为（n_1，n_2，n_3）．为了简单起见，我们令 P 点处的指向矢 $\boldsymbol{n}$ 的方向与正 x_3 轴相重合，也就是说在 P 点 $n_1 = n_2 = 0$，$n_3 = 1$．在 P 点附近，由于形变的关系，$\boldsymbol{n}$ 将与 x_3 轴方向发生偏离．在小

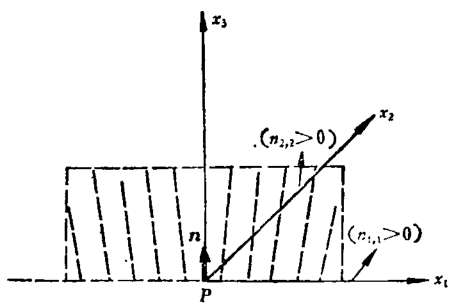

图1　$n_{1,1}$ 和 $n_{2,2}$ 描述展曲形变

形变条件下，这些偏离当然与 $n_{1,1}=\dfrac{\partial n_1}{\partial x_1}$, $n_{1,2}=\dfrac{\partial n_1}{\partial x_2}$, ···等等各个 $\boldsymbol{n}$ 的分量的一阶导数有关．由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，所以 $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$．对这个式子的微分在应用 $n_1=n_2=0$, $n_3=1$ 的条件后就得出 $n_{3,j}=0$ $(j=1,2,3)$． 因此九个 $\boldsymbol{n}$ 的一阶导数中只需要考虑 $n_{1,j}$ 和 $n_{2,j}$ $(j=1,2,3)$ 这六个一阶导数． 从这六个一阶导数可以看出基本的形变有三种类型：展曲(splay)，扭曲 (twist)，和弯曲 (bend)． 下面对这三种形变分别进行讨论．

首先我们看，$n_{1,1}$ 和 $n_{2,2}$ 描述的是展曲形变．在图1中，从 x_1x_3 平面上来看，$n_{1,1}$（假设为正）的存在表示，在 x_1 轴上越远离 P 点，指向矢越向外倒向 x_1 轴，所以指向矢将呈现一幅展开的图象，因此称为展曲．如果 $n_{1,1}$ 是负值，那么将出现收拢的图象．同样从 x_2x_3 平面上看，$n_{2,2}$ 的存在也将出现展开或收拢的图象．

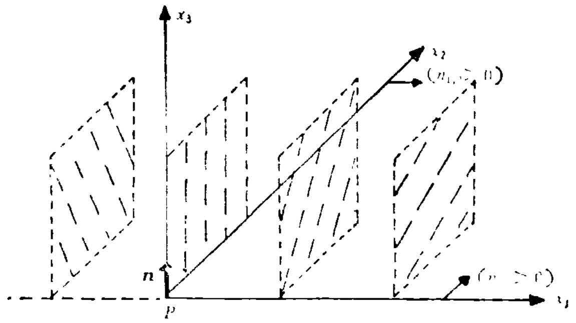

图2　$n_{1,2}$ 和 $n_{2,1}$ 描述扭曲形变

其次扭曲形变是与 $n_{1,2}$ 和 $n_{2,1}$ 有关的．从图2来看，$n_{2,1}$（假设为正）的存在表示，在正 x_1 轴上，越远离 P 点，指向矢将越在正向倒向 x_1x_2 平面．同样 $n_{1,2}$（假设为正）的存在表示，在正 x_2 轴上越远离 P 点，指向矢也越在正向倒向 x_1x_2 平面． 图中画出了在不同 x_1 位置的 x_2x_3 平面上指向矢改变的情况 $(n_{2,1}>0,\ n_{1,2}=0)$． 这些平面上的指向矢发生了相对的转动，就象这些平面发生了扭转一样，因此称之为扭曲．

弯曲形变是与 $n_{1,3}$ 和 $n_{2,3}$ 有关的．从图3来看，$n_{1,3}$（假设为正）的存在表示，在 x_3 轴上越远离 P 点，指向矢越倒向正 x_1 轴方向． 同样，

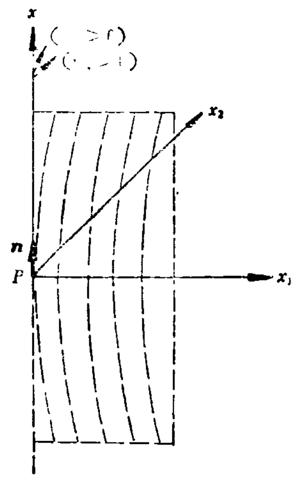

图3　$n_{1,3}$ 和 $n_{2,3}$ 描述弯曲形变

$n_{2,3}$（假设为正）的存在表示，在 x_3 轴上越远离 P 点，指向矢越倒向正 x_2 轴方向． 图中画出了在 x_1x_3 平面上指向矢方向改变的情况．这里原来竖直的指向矢排列形成了逐渐弯曲的状态．因此称为弯曲形变．

虽然我们已经看出 $n_{1,1}$ 和 $n_{2,2}$ 与展曲形变有关，$n_{1,2}$ 和 $n_{2,1}$ 与扭曲形变有关，$n_{1,3}$ 和 $n_{2,3}$ 与弯曲形变有关，但是我们不能简单地就用这六个导数分别表达这些形变，因为这些导数与所选择的坐标系直接相关，而形变本身却应该与坐标系的选择无关．举个例子来看：譬如说把 x_1 轴和 x_2 轴绕 x_3 轴转动 $\pi/4$ 成为 x_1' 轴和 x_2' 轴，从而形成了 (x_1', x_2', x_3) 这个新的坐标系．这里的变换式是

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),\quad x_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-x_1)$$

$$\rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'-x_2'),\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'+x_2');$$

$$n_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(n_1'-n_2'),\quad n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(n_1'+n_2').$$

现在看 $n_{1,1}$，在这个变换中将有

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_1}{\partial x_1}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1}(n_1'-n_2')\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1'}(n_1'-n_2')\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial x_2'}(n_1'-n_2')\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial n_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial n_2'}{\partial x_2'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial n_2'}{\partial x_1'} + \frac{\partial n_1'}{\partial x_2'}\right).$$

第一个括号内的两项仍然表示展曲形变，但是第二个括号内的两项却是扭曲形变的表示式．这样，在 (x_1, x_2, x_3) 坐标系中所描述的展曲形变 $n_{1,1}$，在新坐标系 (x_1', x_2', x_3) 中变成了展曲和扭曲的混合形变，这显然是不合理的．展曲只能是展曲，不可能因为换了个坐标系而突然增加了扭曲．因此对于展曲形变的描述我们必须把 $n_{1,1}$ 和 $n_{2,2}$ 组合起来，使得这个组合的表示式在新的坐标系中仍然是单纯地描述展曲形变才成．对于扭曲形变和弯曲形变也要有同样的要求．

但是究竟应该如何组合呢？这就需要考虑到液晶的对称性．液晶对 x_3 轴是对称的，所以在上面所举的变换中，形变的表示式应该保持不变．在这个变换中不难计算出

$$\frac{\partial n_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n_2}{\partial x_2} = \frac{\partial n_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial n_2'}{\partial x_2'},$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial x_1} - \frac{\partial n_1}{\partial x_2} = \frac{\partial n_2'}{\partial x_1'} - \frac{\partial n_1'}{\partial x_2'}.$$

另外，$\boldsymbol{n}$ 本身是一个矢量，在变换中不会改变．所以展曲形变的表示式是 $n_{1,1} + n_{2,2}$，扭曲形变的表示式是 $n_{2,1} - n_{1,2}$．在这个变换中 x_3 是不变的，因此 $n_{1,3}$ 和 $n_{2,3}$ 的变换仍然成为两个弯曲形变的组合表示式，而不会引入展曲或扭曲形变．所以弯曲形变的表示式可以保留成为 $n_{1,3}$ 和 $n_{2,3}$ 而不必另外加以组合．用矢量来表示的话可以有

$$n_{1,1} + n_{2,2} = \nabla \cdot \boldsymbol{n},$$

$$n_{2,1} - n_{1,2} = \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}),$$

$$(n_{1,3}, n_{2,3}) = (\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n}.$$

这样，展曲形变表示式是 $\nabla \cdot \boldsymbol{n}$，扭曲形变表示式是 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})$，而弯曲形变表示式是 $(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n}$．展曲形变的正和负表示展开和收拢两种不同形式．扭曲形变的正和负表示左旋和右旋两种不同形式．弯曲形变的正和负表示上弯和下弯，或者右弯和左弯两种不同形式．

液晶指向矢取向的改变引起了弹性形变．在小弹性形变条件下，类比于固体弹性理论中的胡克定律，我们可以设想，液晶的与弹性形变相关的自由能是形变的二阶函数，正象固体弹性形变能量是位移的二阶函数一样．我们在液晶中要考虑的 P 点周围，取一个单位体积，令它的弹性形变自由能为 g，也就是自由能密度，那么 g 的最普遍的形式将是

$$g = \frac{1}{2}[k_{11}(\nabla \cdot \boldsymbol{n} - k_1/k_{11})^2 + k_{22}(\boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{n} - k_2/k_{22})^2 + k_{33}(\boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{n} - k_3/k_{33})^2],$$

这些 k 都是常数．

但是在弯曲形变过程中左弯和右弯，或者向上弯和向下弯只不过是由于观察者的位置不同而已．只要弯曲形变的大小相同，所需的能量也就不会有任何差别．因此常数 k_3 必须等于零，否则 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{n})$ 的正负不同时将给出不同的能量值．这个条件对 k_1 和 k_2 并不适用，因为展开和收拢的能量可以不同，扭紧和扭松的能量也可以不同．这样自由能密度的最普遍形式是

$$g = \frac{1}{2}\{k_{11}(\nabla \cdot \boldsymbol{n} - k_1/k_{11})^2 + k_{22}[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) - k_2/k_{22}]^2 + k_{33}[(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n}^2]\}.$$

实验告诉我们指向矢 $\boldsymbol{n}$ 的符号并没有多大的物理意义，也就是说对于液晶的宏观性质，分子的头尾并没有多大区别，$\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 是相当的．当然，从单个分子来看是有首尾之分的，因为它的化学结构并不对称．这一点更说明了在用指向矢 $\boldsymbol{n}$ 来描述液晶宏观性质的连续体理论中，所考虑的已经不是单个分子的性能而只是大量分子的统计平均性能而已．$\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 相当这一点也可以说明在液晶中正向排列的分子和反向排列的分子的数目基本上相同．

考虑到 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 的一致性，那么自由能密度的表达式对 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 应该是相同的．不过我们所选择的右手坐标系是令 $\boldsymbol{n}$ 的方向与正 x_3 轴方向相同．如果我们把 $\boldsymbol{n}$ 倒转成 $-\boldsymbol{n}$ 同时把 x_3

轴也倒转成 $-x_3$ 轴以便保持正 x_3 轴与指向矢方向相合，那么坐标系就成为左手系了．为了维持右手坐标系可以同时把 x_2 轴也倒转．这样新的坐标系与旧坐标系之间的代换是

$$x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = -x_3.$$

原来的指向矢在新坐标系中的分量是

$$n_{1'} = n_1,\ n_{2'} = -n_2,\ n_{3'} = -n_3,$$

而倒转过的指向矢在新坐标系中的分量是

$$n_1' = -n_{1'} = -n_1,\ n_2' = -n_{2'} = n_2,$$
$$n_3' = -n_{3'} = n_3.$$

因此

$$\frac{\partial n_1'}{\partial x_1'} = -\frac{\partial n_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial n_1'}{\partial x_2'} = \frac{\partial n_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial n_1'}{\partial x_3'} = \frac{\partial n_1}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial n_2'}{\partial x_1'} = \frac{\partial n_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial n_2'}{\partial x_2'} = -\frac{\partial n_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial n_2'}{\partial x_3'} = -\frac{\partial n_2}{\partial x_3},\quad(1)$$
$$\frac{\partial n_3'}{\partial x_1'} = \frac{\partial n_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial n_3'}{\partial x_2'} = -\frac{\partial n_3}{\partial x_2},\ \frac{\partial n_3'}{\partial x_3'} = -\frac{\partial n_3}{\partial x_3}.$$

这就是说

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{n}' = -\nabla \cdot \boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{n}' \times (\nabla' \times \boldsymbol{n}') = \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}).$$

所以在把指向矢 $\boldsymbol{n}$ 换成 $-\boldsymbol{n}$ 时自由能密度 g 的表示式中第一项发生了改变，但是第二项不变．既然对于 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 来讲 g 应该是相同的，那就只能是 $k_1 = 0$，但 k_2 是不受限制的．这样考虑到轴对称性和 $\boldsymbol{n}$ 与 $-\boldsymbol{n}$ 的相当性之后，我们可以有自由能密度 g 的最普遍形式为

$$g = \frac{1}{2}\{k_{11}(\nabla \cdot \boldsymbol{n})^2 + k_{22}[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) - k_2/k_{22}]^2 + k_{33}[(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n}]^2\}.$$

由于 k_{11} 与展曲 $\nabla \cdot \boldsymbol{n}$ 项相关所以称为展曲弹性常数，k_{22} 与扭曲 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})$ 项相关所以称为扭曲弹性常数，k_{33} 与弯曲 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{n})$ 项相关所以称为弯曲弹性常数．三种形变是互相独立的．弹性形变是由于外力对液晶作功引起的，所以弹性形变自由能密度是正值，这样三个弹性常数就必然都是正值：

$$k_{11} > 0,\ k_{22} > 0,\ k_{33} > 0.$$

对于长丝状液晶来讲，还有更高的对称性．任何一个包含 x_3 轴的平面都是一个对称平面．与这个反射对称相对应的变换是

$$x_1 \to x_1,\ x_2 \to -x_2,\ x_3 \to x_3;$$
$$n_1 \to n_1,\ n_2 \to -n_2,\ n_3 \to n_3.$$

在这种变换下不难看出

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) \to -\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}),$$

因为只要有一个下标“2”就要改变一次符号，而组成 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})$ 的三项当中每一项都只含一个“2”的下标．这就要求 $k_2 = 0$．所以长丝状液晶的自由能密度是

$$g = \frac{1}{2}\{k_{11}(\nabla \cdot \boldsymbol{n})^2 + k_{22}[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})]^2 + k_{33}[(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n}]^2\}.$$

对于螺旋状液晶，如果只考虑扭曲，那么

$$g_{扭} = \frac{1}{2}k_{22}[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) - k_2/k_{22}]^2.$$

液晶的平衡状态是 $g_{扭}$ 具有最小值的状态，也就是

$$\frac{\partial}{\partial[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})]} g_{扭} = k_{22}[\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) - k_2/k_{22}] = 0$$

的状态．因此平衡条件是

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) = k_2/k_{22}.$$

由于 $k_{22} > 0$，所以 $\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})$ 的符号由 k_2 的符号来决定．$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n})$ 是从 $n_{2,1} - n_{1,2}$ 来的．当 $n_{2,1} > 0$ 时各 x_2x_3 层平面上的指向矢随着正 x_1 的增加而倒向正 x_2 轴方向．应用右手定则，正 x_1 方向为正方向，那么这个旋转是左旋的或是负螺旋．反过来，$n_{2,1} < 0$ 是右旋或正螺旋．所以 $k_2 < 0$ 是正螺旋而 $k_2 > 0$ 是负螺旋．这就是 k_2 的物理意义．

由于指向矢 $\boldsymbol{n}$ 满足 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$ 的条件，按照矢量分析，

$$\nabla(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}) = 2(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n} + 2\boldsymbol{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{n}) = 0,$$

所以有

$$(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{n}).$$

因此自由能密度的另一种表示形式是

$$g = \frac{1}{2}\{k_{11}(\nabla \cdot \boldsymbol{n})^2$$

$$+ k_{22}[\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{n}) - k_2/k_{22}]^2$$
$$+ k_{33}[\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{n})]^2\}.$$

这里也许有人会提出，在这个表示式中只考虑了单独的展曲、扭曲和弯曲项，在二阶近似的条件下难道不会有它们的交叉项 $(\nabla\cdot\boldsymbol{n})[\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{n})]$、$(\nabla\cdot\boldsymbol{n})[(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}]$ 和 $[\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{n})][(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}]$ 的出现吗？只要从表现 $\boldsymbol{n}$ 和 $-\boldsymbol{n}$ 相当性的变换中就可以看到这些项是不能满足自由能密度 g 对 $\boldsymbol{n}\to-\boldsymbol{n}$ 变换的不变性的．所以它们都不能存在．

碟层状液晶除去可以有指向矢取向的形变之外，分子层本身也可以发生弹性畸变，所以问题比较复杂一些．如果只考虑指向矢的形变，那么上面所得出的自由能密度 g 的表示式对碟层状 A 相液晶仍然可以适用．碟层状 A 相液晶的分子形成与指向矢相垂直的分子层．如果各分子层的厚度相同，那么沿任意路线 $d\boldsymbol{l}$ 来计算液晶中两点 A 和 B 之间所包含的分子层数应该都是相同的，也就是说

$$l^{-1}\int_A^B \boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{l}$$

为不变量．如果 A 与 B 重合，路线成为闭合曲线，那么应该有

$$\oint_C \boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

根据斯托克斯定理

$$\oint_C \boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{l} = \int(\nabla\times\boldsymbol{n})\cdot d\boldsymbol{S},$$

就可以得出 $\nabla\times\boldsymbol{n}=0$．因此碟层状 A 相液晶只能有展曲形变，而不发生扭曲形变和弯曲形变．从物理上讲就是碟层状 A 相液晶的扭曲弹性常数和弯曲弹性常数很大，因而很难获得足够的能量来激发这两种形变．

有了液晶形变自由能密度的表达式，那么许多与形变相关的问题就都可以解决了．

参 考 文 献

[1] 朱秀昌，物理，1 (1972)，89.
[2] 赵南明，物理，7 (1978)，203.
[3] 林磊，物理，9 (1980)，8.
[4] F. C. Frank., *Disc. Faraday Soc.*, **25** (1958), 19.

磁 层 物 理 学

宋 礼 廷

（北京大学地球物理系）

一、引　言

人类对地球环境的认识在最近二十年有一个飞跃的发展．这一方面是由于科学技术的进步，各种新的探测方法和手段不断改进，另一方面也由于人类第一次飞出地球，有可能从外部认识地球的环境．人造卫星发射以来，这二十年已经有数千颗卫星在我们这个星球外空飞行过，做了各种科学探测和研究，使我们原来对外空环境的观感有了很大的改变．磁层物理学就是在这种对地球空间环境崭新认识的基础上，成长起来的科学分支．

什么叫磁层（Magnetosphere）？

地球外层空间由 1000 公里高度以上，大气变为完全电离状态，称为等离子体，这些等离子体被约束在地球偶极磁场内．但是到远处，地球磁场不能维持偶极形态，由太阳日冕不断流出的高速等离子体流（称太阳风）将地磁场压迫到一个有限的空穴区内，这样在向日面太阳风将地磁场局限在约 10 个地球半径（R_E）范围内，而在背日面，太阳风流过又将地磁场吹到很