平面与平行面平板的成象理论*

李 延 赓

（海 军 工 程 学 院）

在应用光学和光学仪器理论等著作中[1,2]，并未给出同心光束在平面上折射成象的焦散曲面方程，因而对折射成象的全貌不能有系统的完善的了解．本文从几何光学基本定律出发，导出同心光束在平面上折射成象的焦散曲面方程，并给出物象平面变换的矩阵表示式．对不同情况下的焦散曲面、放大率及象散差等进行了讨论，从而对平面及平行面平板的成象问题获得了较为完善的理论结果．

一、焦散曲线方程

在给定的直角坐标系 xoy 中，光束的方程可以表示为参数式：

$$y = A(i)x + B(i), \tag{1.1}$$

其中 $(x,\ y)$ 为光线上动点的坐标，$A(i)$ 和 $B(i)$ 为参数 i 的函数．对于给定的 i，式(1.1)给出光束中一条确定的光线．

今考虑任意两条邻近的光线：

$$\begin{cases} y = A(i)x + B(i), \\ y = A(i+\Delta i)x + B(i+\Delta i). \end{cases}$$

当 $\Delta i \to 0$ 时，上述方程组的解给出两光线交点（象点）的坐标 $(x,\ y)$，其解为

$$\begin{aligned} x &= -\frac{B'(i)}{A'(i)}, \\ y &= -A(i)\frac{B'(i)}{A'(i)} + B(i). \end{aligned} \tag{1.2}$$

上式给出象点坐标 $(x,\ y)$ 随参数 i 变化的关系，这即是焦散曲线的参数方程．

在三维情况下，式(1.1)给出平行于 z 轴的平面簇参数方程，而无限邻近的任意二平面的交线由式(1.2)给出．因此式(1.2)表示平行于 z 轴的一簇直线，此簇直线构成一个柱面，由此可以建立平面折射成象的三维理论．

二、平面折射成象的三维理论

设折射率分别为 n 与 n' 的两种均匀透明介质，其界面与所给直角坐标系 $oxyz$ 的坐标面 zox 重合．在折射率为 n 的介质中，一个发光点 S_0 的坐标为 $(0,\ y_0,\ 0)$．其光束中任意一条光线与 y 轴所决定的平面和坐标平面 yoz 的夹角为 θ，此光线的入射角为 i，折射角为 i'．可以证明以 $\theta,\ i'$ 为参数的折射线束方程的交面式为

$$\begin{aligned} y &= x\frac{\operatorname{ctg} i'}{\sin\theta} + y_0\frac{\frac{n'}{n}\cos i'}{\left[1-\left(\frac{n'}{n}\sin i'\right)^2\right]^{1/2}}, \\ y &= z\frac{\operatorname{ctg} i'}{\cos\theta} + y_0\frac{\frac{n'}{n}\cos i'}{\left[1-\left(\frac{n'}{n}\sin i'\right)^2\right]^{1/2}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

为了求出参数为 $\theta,\ i'$ 及 $\theta,\ \lambda' + \Delta i'$ 的任意两条邻近的子午光线在 $\Delta i' \to 0$ 时的交点（象点）坐标 $(x_m,\ y_m,\ z_m)$，可以分别对式(2.1)应用(1.1)与(1.2)式，则得子午焦散曲面参数方程：

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i' \sin\theta}{\cos^3 i}\, y_0, \\ y_m &= \frac{n'\cos^3 i'}{n\cos^3 i}\, y_0, \\ z_m &= \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i' \cos\theta}{\cos^3 i}\, y_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

若发光点 S_0 的坐标为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则 (2.2) 式经平移变换后可得

$$\begin{aligned} x_m &= x_0 + \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i' \sin\theta}{\cos^3 i}\, y_0, \\ y_m &= \frac{n'\cos^3 i'}{n\cos^3 i}\, y_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

* 1979 年 1 月 24 日收到．

$$z_m = z_0 + \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i'\cos\theta}{\cos^3 i}y_0.$$

由上式消去 θ, i 及 i' 可以得到焦散曲面方程：

$$n > n':\ y_m^{2/3} + \left\{[(x_m - x_0)^2 + (z_m - z_0)^2]\cdot\left[1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2\right]\right\}^{1/3} = \left(\frac{n'}{n}y_0\right)^{2/3}, \tag{2.4}$$

$$n < n':\ y_m^{2/3} - \left\{[(x_m - x_0)^2 + (z_m - z_0)^2]\cdot\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\right\}^{1/3} = \left(\frac{n'}{n}y_0\right)^{2/3}. \tag{2.5}$$

上述两个焦散曲面是以平行于 y 轴过 S_0 点的直线为轴的旋转曲面，并且以界面 zox 为其对称平面，因此当发光点位于界面下方（或上方）时，位于界面下方（或上方）的焦散曲面的部分才具有实际的物理意义。

由式 (2.3) 可以得到放大率为

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_0} = 1,\ \frac{\partial x_m}{\partial y_0} = \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i'\sin\theta}{\cos^3 i},\ \frac{\partial x_m}{\partial z_0} = 0;$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial y_m}{\partial y_0} = \frac{n'\cos^3 i'}{n\cos^3 i},\ \frac{\partial y_m}{\partial z_0} = 0; \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial z_m}{\partial y_0} = \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin^3 i'\cos\theta}{\cos^3 i},\ \frac{\partial z_m}{\partial z_0} = 1.$$

此结果表明：在平行于 zox 平面的平面内象与物的大小相等；在 y 轴方向，象的长短随 i' 而变；切变仅发生在垂直于 y 轴的各平面间。

根据折射定律可以得到角放大率：

$$\frac{\mathrm{tg}\, i'}{\mathrm{tg}\, i} = \frac{di'}{di} = \frac{n\cos i}{n'\cos i'}. \tag{2.7}$$

根据式 (2.3) 可得平面折射不变式：

$$y_m n'^2 \mathrm{tg}^3 i' = y_0 n^2 \mathrm{tg}^3 i. \tag{2.8}$$

为了求出参数为 θ, i 与 $\theta+\Delta\theta$, i' 任意两条邻近的弧矢光线在 $\Delta\theta \to 0$ 时交点坐标 (x_s, y_s, z_s)，可以分别对 (2.1) 式应用 (1.1) 和 (1.2) 式，则得

$$x_s = 0,\ y_s = \frac{n'\cos i'}{n\cos i}y_0,\ z_s = 0. \tag{2.9}$$

由上式可知：弧矢焦面退化为在 y 轴上的一段直线。

当发光点 S_0 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) 时，则 (2.9) 式可经坐标平移变换为

$$\begin{aligned} x_s &= x_0, \\ y_s &= \frac{n'\cos i'}{n\cos i}y_0, \\ z_s &= z_0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

由此可得放大率为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_s}{\partial x_0} = 1,\ \frac{\partial x_s}{\partial y_0} = 0,\ \frac{\partial x_s}{\partial z_0} = 0; \\ &\frac{\partial y_s}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial y_s}{\partial y_0} = \frac{n'\cos i'}{n\cos i},\ \frac{\partial y_s}{\partial z_0} = 0; \\ &\frac{\partial z_s}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial z_s}{\partial y_0} = 0,\ \frac{\partial z_s}{\partial z_0} = 1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

此结果表明：仅在 y 轴方向弧矢象的长短随 i' 而变化。

由 (2.7) 及 (2.10) 式可以得到平面折射不变式：

$$y_s \mathrm{tg}\, i' = y_0 \mathrm{tg}\, i. \tag{2.12}$$

子午象与弧矢象之间的象散差 Δ 为

$$\Delta = \sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - y_s)^2 + (z_m - z_s)^2}. \tag{2.13}$$

将 (2.3) 及 (2.10) 式代入上式可得

$$n > n',\ \Delta = P\frac{n'}{n}\left(1 - \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}\right); \tag{2.14}$$

$$n < n',\ \Delta = P\frac{n'}{n}\left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} - 1\right), \tag{2.15}$$

其中 $P = \frac{y_0}{\cos i}$，(2.14) 式与文献[1]中结果一致。

三、物象平面变换的矩阵表示

我们引入如下表示式：

物位矢：$S_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,

子午象位矢：$S_m=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\\z_m\end{pmatrix}$，

弧矢象位矢：$S_s=\begin{pmatrix}x_s\\y_s\\z_s\end{pmatrix}$.

平面折射子午变换矩阵：

$$T_m\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2-1\right]\frac{\sin^3 i'\sin\theta}{\cos^3 i} & 0\\ 0 & \frac{n'\cos^3 i'}{n\cos^3 i} & 0\\ 0 & \frac{n'}{n}\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2-1\right]\frac{\sin^3 i'\cos\theta}{\cos^3 i} & 1\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

平面折射弧矢变换矩阵：

$$T_s\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{n'\cos i'}{n\cos i} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

因此 (2.3) 及 (2.10) 式可改写成如下的变换关系：

$$S_m=T_m\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}S_0, \tag{3.3}$$

$$S_s=T_s\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}S_0. \tag{3.4}$$

据逆矩阵的定义：$T\cdot T^{-1}=T^{-1}\cdot T=1$，可证明

$$T_m^{-1}\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=T_m\begin{pmatrix}n & n'\\ i & i'\\ & \theta & \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$T_s^{-1}\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=T_s\begin{pmatrix}n & n'\\ i & i'\\ & \theta & \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

此结果表明：变换矩阵与其逆变换矩阵之间的关系即是 n 与 n'，i 与 i' 之间的互换关系。这就说明了光具有可逆性.

我们引入形变矩阵(或形变张量)：

$$\sigma=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

根据(2.6)及(3.1)式可以得到子午形变矩阵：

$$\sigma_m\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=T_m\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

根据(2.11)及(3.2)式可以得到弧矢形变矩阵：

$$\sigma_s\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}=T_s\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta & \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

由此得出结论：形变矩阵与变换矩阵相等.

还需要指出：在折射定律 $n\sin i=n'\sin i'$ 中，令 $n'=-n$，则得反射定律 $i=-i'$. 因此，折射问题将转化为反射问题. 由 (3.1)，(3.2)，(3.5)，(3.6) 式可以得到平面反射变换矩阵：

$$T_r=T_r^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

由 (3.8)，(3.9) 式可得平面反射形变矩阵：

$$\sigma_r=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

平面反射物象变换关系式为

$$S=T_rS_0,$$

即

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

这就是平面镜物象变换的数学表达式[1].

四、平行面平板的折射成象理论

设一块均匀透明介质制作的平行面平板，其厚度为 e，取它的下表面与坐标系 $oxyz$ 的坐标面 zox 重合，平板介质折射率为 n'，周围介

质折射率为 n. 在 zox 平面下方介质 n 中,发光点 S_0 的坐标为(x_0, y_0, z_0),根据存在的问题,需要引入坐标平移变换矢:

$$P=\begin{pmatrix}0\\-e\\0\end{pmatrix} \text{ 及 } P^{-1}=\begin{pmatrix}0\\e\\0\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

象位矢 S 与物位矢 S_0 满足如下变换关系:

$$S=P^{-1}+T\begin{pmatrix}n & n'\\ i & i'\\ & \theta\end{pmatrix}\left[P+T\begin{pmatrix}n' & n\\ i' & i\\ & \theta\end{pmatrix}S_0\right]. \tag{4.2}$$

由 (4.2) 式知道子午象位矢为

$$S_m=P^{-1}+T_m\begin{pmatrix}n & n'\\ i & i'\\ & \theta\end{pmatrix}P+S_0.$$

计算上式给出的子午焦散曲面参数方程:

$$\begin{aligned}
x_m &= x_0-\frac{n}{n'}\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2-1\right]\frac{\sin^3 i\sin\theta}{\cos^3 i'}e,\\
y_m &= y_0+\left(1-\frac{n\cos^3 i}{n'\cos^3 i'}\right)e, \qquad (4.3)\\
z_m &= z_0-\frac{n}{n'}\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2-1\right]\frac{\sin^3 i\cos\theta}{\cos^3 i'}e.
\end{aligned}$$

由(4.3)式中消去θ, i 及 i',得到焦散曲面方程:

$$\begin{aligned}
n'>n,\ &(y_m-y_0-e)^{2/3}\\
&+\left\{[(x_m-x_0)^2+(z_m-z_0)^2]\cdot\left[1-\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right]\right\}^{1/3}=\left(\frac{n}{n'}e\right)^{2/3}; \qquad (4.4)\\
n'<n,\ &(y_m-y_0-e)^{2/3}\\
&-\left\{[(x_m-x_0)^2+(z_m-z_0)^2]\cdot\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2-1\right]\right\}^{1/3}=\left(\frac{n}{n'}e\right)^{2/3}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

由 (4.3) 式可以得到子午形变矩阵:

$$\sigma_m=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

由此得出结论: 子午象与物的大小相等, 形状相同.

由 (4.2) 式知道弧矢象位矢为

$$S_s=P^{-1}+T_s\begin{pmatrix}n & n'\\ i & i'\\ & \theta\end{pmatrix}P+S_0.$$

计算上式给出的弧矢焦散曲面参数方程:

$$\begin{aligned}
x_s &= x_0,\\
y_s &= y_0+\left(1-\frac{n\cos i}{n'\cos i'}\right)e, \qquad (4.7)\\
z_s &= z_0.
\end{aligned}$$

由上式可以得到弧矢形变矩阵:

$$\sigma_s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

此结果表明: 弧矢象与物的大小相等, 形状相同.

由 (4.3) 及 (4.7) 式可以计算象散差:

$$n'>n,\ \Delta=\frac{ne}{n'\cos i'}\left(1-\frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'}\right), \tag{4.9}$$

$$n'<n,\ \Delta=\frac{ne}{n'\cos i'}\left(\frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'}-1\right). \tag{4.10}$$

(4.9) 式确实与文献[1]所给出的公式一致.

由上述的情况可以得出如下的结论: 平行面平板折射成象, 象与物的大小相等、形状相同. 可以知道平板的第一折射面使象产生形变, 而第二折射面则有消除形变的作用. 象散差仅决定于平板的材料、厚度及观察方向,而与物的位置无关. 仅当垂直于界面观察时象散差为零,子午象与弧矢象重合.

参 考 文 献

[1] A. И. 杜德罗夫斯基,光学仪器理论第一卷,科学出版社, (1975), 79 页, 90—95 页.

[2] Б. В. 费菲洛夫,应用光学,中国工业出版社, (1964), 48—51 页, 55—57 页.