的含量．配气比实验证实，He 增减 1—2 托时功率影响很小，Xe 的影响也小于 CO．并且 He，Xe 都是惰性气体．CO 分压强最低，仅 1.9 托左右．从仅增加 0.48 托气压就大大提高功率这一现象可以确定，工作过程中器件内损耗的主要是 CO 气体．我们还对电极和管壁的黑色沉积物进行了 X 射线物相分析．鉴定结果，阴极沉积物为 Ni 和 NiC，而阳极端沉积物为 $C_4H_6NiO_4\cdot 4H_2O$ 或 $Ni(C_2H_3O_2)_2\cdot 4H_2O$，是镍的碳氢化合物，高频加热也不会分解．显然它也会夺走混合气体中的 CO，使气压降低．其中氢的来源一般是管壁或电极吸附的水蒸气或所充气体中含有氢杂质．可见氢是造成 CO 量减少的重要原因．而镍溅射较大，吸附气体较多，又易与 CO 等起化学反应，故镍作 CO 激光器的阴极材料是不理想的．

在其它条件基本保持一致的情况下，我们对器件的电极材料与结构进行了一些改进．主要是采用无氧铜代替镍作 CO 激光器的阴极，并略增大阴极圆筒直径，以增大电子发射面积．此外阳极改用钨杆．与镍阴极器件一样，我们对放电管进行了彻底清洗，以减少水蒸气等杂质含量．这一点与 CO_2 激光器恰恰相反．少量氢或水蒸气能显著提高 CO_2激光器寿命，而对 CO 激光器则要尽量根除之．铜阴极 CO 激光器工作寿命已超过 2000 小时，现仍在正常运转．该器件初始功率 6 瓦，工作 550 小时后功率上升至 10—13 瓦，电转换效率 11.5%，其功率变化曲线见图 2 (b)．

铜阴极器件工作十几小时后，在阴极圆筒外表面发现彩色条纹，随时间推移条纹区逐渐扩大，并且从回气管口开始成放射状．经过三四百小时后，条纹不再明显扩大．我们认为彩色条纹的产生是器件中某种气体与电极起化学反应所致．从条纹不再扩大可见，后来这种气体已减少．这种情况对激光器寿命和功率都没有坏的影响．在阴极条纹区以外的部分，电极颜色一直与刚处理完时差不多，未见明显氧化．这说明无氧铜阴极在放电过程中不会夺取氧而使 CO 显著减少．事实证明，无氧铜阴极对于 CO 激光器是成功的．

四、结 束 语

由于镍电极除吸附 CO 气体外还在长期放电中发生化学反应生成不可逆固态沉积物而造成 CO 气体较大损耗，所以镍阴极 CO 器件寿命难以提高．而采用合适的阴极材料如铜则克服了这一缺点，可大大提高寿命．此外器件中残存的水蒸气在放电中是很有害的，为改善 CO 激光器输出和提高寿命有根除之必要．

实验过程得到有关人员协助，谨致谢意．

参 考 文 献

[1] G. A. Murray, A. L. S. Smith, *J. Phys. D*, **11-18** (1978), 2477.
[2] K. M. D. Amico, A. L. Smith, *J. Phys. D*, **10** (1977), 261.

旋转运动磁单极势与辐射能*

郑 哲 洙
（延边大学物理系）

近来许多工作给出磁单极势与场强的解，其中不少为静止磁单极的球对称解[1]．最近的一些工作，讨论了匀加速直线运动磁单极的推迟势与场强[2]，此外还给出任意变速运动磁单极势与场强的解[3]．本文讨论作旋转运动磁单极的势、场强和辐射能的表示式．磁单极场的

* 1979 年 7 月 16 日收到．

势与场强的表示式不同于电荷的场，但具有严格对偶相等的表现形式．至于辐射能，最大的辐射强度将分布在与磁单极旋转平面相垂直的 z 轴方向，而平行于旋转平面的方向辐射强度为最小．

我们知道，对于一个电荷和一个磁荷共存的体系，真空中的 Maxwell 方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\&\quad+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{(e)}(\boldsymbol{r},t),\\\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=4\pi\rho^{(e)}(\boldsymbol{r},t),\\-\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\&\quad+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{(m)}(\boldsymbol{r},t),\\\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=4\pi\rho^{(m)}(\boldsymbol{r},t).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

上式用四维电磁场张量可改写为

$$\left.\begin{aligned}&\partial_\alpha\tilde{F}_{\beta\mu}+\partial_\beta\tilde{F}_{\mu\alpha}+\partial_\mu\tilde{F}_{\alpha\beta}=i\frac{4\pi}{c}e_{\alpha\beta\mu\nu}J_\nu^{(e)},\\&\partial_\alpha F_{\beta\mu}+\partial_\beta F_{\mu\alpha}+\partial_\mu F_{\alpha\beta}\\&\quad=-i\frac{4\pi}{c}e_{\alpha\beta\mu\nu}J_\nu^{(m)},\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

式中 $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ 是 $F_{\alpha\beta}$ 的对偶张量[3]．

在 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$, $\rho^{(e)}\to\rho^{(m)}$, $\rho^{(m)}\to-\rho^{(e)}$ 这种电磁对偶变换下，$F_{\mu\nu}\to\tilde{F}_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}\to-F_{\mu\nu}$, Maxwell 方程(1)和(2)保持不变．

Maxwell 方程组(1)的第四式的普遍解为[4]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho^{(m)}(\boldsymbol{r}',t)\\&\quad+\nabla\times\boldsymbol{A}^{(e)}(\boldsymbol{r},t),\end{aligned}\quad(3)$$

式中不变矢量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 满足关系

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\quad(4)$$

当不存在磁荷 $\rho^{(m)}$ 时，$\boldsymbol{A}^{(e)}$ 表示通常意义下的矢势．(1)的第三式的解同样可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=-\nabla\phi^{(e)}(\boldsymbol{r},t)\\&\quad-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}^{(e)}(\boldsymbol{r},t)\\&\quad+\frac{1}{c}\int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&\quad\times\boldsymbol{J}^{(m)}(\boldsymbol{r}',t).\end{aligned}\quad(5)$$

若磁流 $\boldsymbol{J}^{(m)}$ 等于零，则(5)式中的 $\phi^{(e)}$ 表示习惯上所定义的标势．

同理，(1)的第一、二式的普遍解各为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}',t)\\&\quad-\nabla\times\boldsymbol{A}^{(m)}(\boldsymbol{r},t),\end{aligned}\quad(6)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=-\nabla\phi^{(m)}(\boldsymbol{r},t)\\&\quad-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}^{(m)}(\boldsymbol{r},t)\\&\quad-\frac{1}{c}\int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&\quad\times J^{(e)}(\boldsymbol{r}',t).\end{aligned}\quad(7)$$

由(4)和(5)可见，当磁荷与磁流存在时，右边积分项不等于零，这就是所谓奇异弦的贡献．此时，不成立通常的位势与场强关系．

设仅仅存在一个磁单极 g 时，Maxwell 方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{H}&=4\pi g\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\\nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\\\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0,\\-\nabla\times\boldsymbol{E}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}g\boldsymbol{v}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

用电磁场张量上式可写成四维形式：

$$\left.\begin{aligned}&\partial_\nu F_{\mu\nu}=0,\\&\partial_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j_\mu.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

式中 $j_\mu=[g\boldsymbol{v}, icg]$. 同时满足磁荷守恒定律

$$\frac{\partial g}{\partial t}+\nabla\cdot j=0,\quad(10)$$

或者

$$\partial_\mu j_\mu=0.\quad(11)$$

此时由于不存在电荷，可以从(6)和(7)得到方程(8)的解：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla\times\boldsymbol{A},\\\boldsymbol{H}&=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

引入矢势 $A_\mu=(\boldsymbol{A},i\phi)$，则(9)的解为

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.\quad(13)$$

上述磁单极势要满足 Lorentz 规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,\quad(14)$$

或者

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \tag{15}$$

上述这些公式是磁单极场的基本方程，它不同于电子所产生的电磁场的基本方程，但两者具有明显对偶相等的形式．

下面讨论旋转磁单极的势．把(13)代入(9)，就能得到磁单极势所满足的熟知的非齐次方程

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu. \tag{16}$$

设磁单极以任意速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着半径为 a 的圆周作旋转运动．取圆心为坐标原点，此时(16)的解就能给出在 t 时刻空间任意点 $p(r, \theta, \varphi)$ 上的磁单极势，亦即(16)式的推迟解为[3]

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(0)} + \frac{1}{c}\int d\tau \frac{g\boldsymbol{v}(\tau)}{R}\delta\left(\tau - t + \frac{R}{c}\right). \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{A}^{(0)}$ 为齐次解．下面我们仅仅讨论对应于非齐次解的第二项，即磁单极所产生的势

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int d\tau \frac{g\boldsymbol{v}(\tau)}{R}\delta\left(\tau - t + \frac{R}{c}\right), \tag{18}$$

式中 τ 为推迟时刻，$\boldsymbol{R}$ 为磁单极到 p 点的矢量．设磁单极在 xy 平面内作旋转运动，则有

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}. \tag{19}$$

当 p 点离原点很远时

$$R \simeq r - \frac{a r_a}{r}, \tag{20}$$

式中 r_a 表示径矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的投影．设磁单极的矢径 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴成角为 ψ，则 $\psi = \omega\tau = \frac{v}{a}\tau$，此时可把上式改写为

$$R = r - a\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi). \tag{21}$$

把(21)代入(18)得

$$\boldsymbol{A} = \frac{g}{cr}\int d\tau \boldsymbol{v}(\tau)\,\delta\Big(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a}{c}\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi)\Big). \tag{22}$$

同理，可得标势为

$$\phi = \frac{g}{r}\int d\tau\delta\Big(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a}{c}\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi)\Big) = \frac{g}{r}. \tag{23}$$

(23)表示磁单极的静磁势．

设磁单极的旋转周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$，此时(18)中对推迟时刻 τ 所进行的积分界限可取为包含着推迟时刻 τ 的某一周期，亦即

$$\boldsymbol{A} = \frac{g}{cr}\int_{\tau'}^{\tau'+T} d\tau \boldsymbol{v}(\tau)\,\delta\Big(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a}{c}\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi)\Big), \tag{24}$$

式中 $\tau' < \tau < \tau' + T$．在上式中的 δ 函数除一周期中的某一时刻外都等于零，它是个周期性函数，其周期也是 T．按 Fourier 级数理论可得

$$\delta\left[\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a}{c}\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi)\right] = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp i\omega n\left[\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a}{c}\sin\theta\cos(\omega\tau - \varphi)\right]. \tag{25}$$

把(25)代入(24)得

$$\boldsymbol{A} = \sum_n \boldsymbol{A}(n)\exp(-in\gamma), \tag{26}$$

式中

$$\boldsymbol{A}(n) = \frac{e}{cr}\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\alpha}{\omega}\boldsymbol{v}(\tau)\exp in\left[(\omega\tau - \varphi) + \frac{\pi}{2} - \beta\sin\theta\sin\alpha\right], \tag{27}$$

$$\gamma = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2}, \tag{28}$$

$$\alpha = \omega\tau - \varphi + \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

由于被积函数具有周期性，这里把一周期的积分界限换成为 $-\pi$ 到 $+\pi$．

旋转磁单极的速度 $\boldsymbol{v}$ 在极坐标中的分量为

$$\left.\begin{aligned} v_r &= 0, \\ v_\theta &= -v\cos\theta\cos\alpha, \\ v_\varphi &= v\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

因而由(26)可得

$$
\left.\begin{aligned}
&A_r(n) = 0, \\
&A_\theta(n) = -\frac{gv}{cr}\frac{1}{2\pi}\cos\theta\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\cos\alpha \\
&\qquad \cdot\exp[i(n\alpha - n\beta\sin\theta\sin\alpha)], \\
&A_\varphi(n) = \frac{gv}{cr}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\sin\alpha \\
&\qquad \cdot\exp[i(n\alpha - n\beta\sin\theta\sin\alpha)].
\end{aligned}\right\} \quad (31)
$$

利用 Bessell 函数公式，我们得到

$$
\left.\begin{aligned}
&A_r(n) = 0, \\
&A_\theta(n) = -\frac{g}{r}\operatorname{ctg}\theta J_n(n\beta\sin\theta), \\
&A_\varphi(n) = i\frac{gv}{cr}J'_n(n\beta\sin\theta).
\end{aligned}\right\} \quad (32)
$$

这就是我们所要的旋转磁单极势的表示式.

现在讨论旋转磁单极的场强与辐射能. 旋转磁单极的场强由(12),(26)和(31)可得

$$E_\theta = -\frac{g\beta^2}{ra}\sum_n nJ'_n(n\beta\sin\theta)\cos n\gamma, \quad (33)$$

$$E_\varphi = \frac{g\beta}{ar}\operatorname{ctg}\theta\sum_n nJ_n(n\beta\sin\theta)\sin n\gamma. \quad (34)$$

(31) 是远离磁单极处的推迟势，所以 (33) 和 (34)也表示远离磁单极处的场强，这与辐射场的情形相同. 此时磁场和电场之间一般满足关系

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{r}.$$

因而得到

$$
\left.\begin{aligned}
H_\theta &= E_\varphi = \tilde{F}_{12}, \\
-H_\varphi &= E_\theta = \tilde{F}_{31}, \\
H_r &= E_r = \tilde{F}_{32} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (35)
$$

因此，旋转磁单极的电磁场张量具有形式

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_3 & E_2 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & -iH_2 \\ -E_2 & 0 & 0 & -iH_3 \\ 0 & iH_2 & iH_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

由磁单极场方程可定义能流密度矢量，即

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}). \quad (37)$$

用分量可写成

$$S_r = \frac{c}{4\pi}(E_\varphi^2 + E_\theta^2),\ S_\theta = S_\varphi = 0. \quad (38)$$

由旋转磁单极在每秒中辐射到立体角 $d\Omega$ 内的能量为

$$dW = S_r d\Omega. \quad (39)$$

因而利用(33)和(34)可得

$$dW = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^2n^2\beta^2c}{8\pi a^2}[\operatorname{ctg}^2\theta J_n^2(n\beta\sin\theta) + \beta^2 J'^2_n(n\beta\sin\theta)]\,d\Omega. \quad (40)$$

利用 Bessell 函数的渐近式，上式可改写为

$$dW = \frac{g^2v^4}{32\pi a^2c^3}\left[1 + \cos^2\theta - \frac{\beta^2\sin^4\theta}{4}\cdot(1+3\beta^2)\right]\frac{d\Omega}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{7/2}}. \quad (41)$$

当 v 不大时，可忽略 β^2 以上项，则上式变为

$$dW = \frac{g^2v^4}{32\pi a^2c^3}(1+\cos^2\theta). \quad (42)$$

这表明最大的辐射强度分布在与磁单极旋转平面相垂直的 z 轴方向，而平行于旋转平面的方向辐射强度为最小，这与旋转电荷的情形相同.

参 考 文 献

[1] M. Prasad, C. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975), 760; J. P. Hsu, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 646.

[2] 侯伯宇，兰州大学学报，**2** (1977), 37.

[3] 杜东生、阮图南，高能物理与核物理，2-1(1978), 49.

[4] J. Schwinger et al., *Ann. Phys.*, **101** (1976), 451.