

激光振荡的全量子理论

谭维翰

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

一、引言

对激光振荡物理过程的研究,最早开始于 Townes 关于 Maser 的分析^[1]. 他给出频率牵引与输出谱宽的公式. Maser 输出半功率点的全宽 $\Delta\omega$ 与输出功率 P 间的关系为

$$\Delta\omega = 8\pi kT(\Delta\nu_B)^2/P, \quad (1)$$

$\Delta\nu_B$ 为分子谱线的半宽度,这公式是在分析 Maser 振荡过程导出来的,也一直沿用到 Laser 出现以后. 导出(1)式的基本思想是自发辐射中所包含的模式在一个有增益与损耗的腔内来回振荡、叠加并输出. 应指出 Townes 的理论假定了 (i) 增益与损耗是恒定的,与模式内累积的光子数无关; (ii) 反转粒子数低于阈值,增益小于损耗,振荡具有阻尼振荡的特点. 否则增益大于损耗,振幅愈来愈大,结果发散. 1963 年 Grivet 与 Blaquiere 等研究了反转粒子超过阈值时的振荡过程^[2], 将激光振荡与谐振电路相比拟,并应用噪音的 Nyquist 关系式,得出低于阈值时的谱宽 $\Delta\omega_b$ 与输出功率 P_b 的乘积 $\Delta\omega_b P_b$ 为高于阈值时的谱宽 $\Delta\omega_a$ 与输出功率 P_a 乘积 $\Delta\omega_a P_a$ 的两倍,即

$$\Delta\omega_b P_b = 2\Delta\omega_a P_a. \quad (2)$$

至于由低于阈值向高于阈值的过渡阶段,乘积 $\Delta\omega P$ 随反转粒子数的变化情况,则是 1966—1968 间解全量子方程的结果^[3,4].

激光的全量子理论是相对于半经典理论而言的. 半经典理论这个词最早来源于辐射的半经典理论^[5], 亦即将电磁场看作经典的可用 Maxwell 方程来描述的场,但与之相互作用的粒

子(包括原子与分子)则采用量子力学来描述. 应用这一办法来研究激光的振荡放大问题,使得激光的半经典理论. 它自 1964 年被 Lamb 提出以来,是富有成效的. 由于考虑了反转粒子数消耗于产生受激辐射的非线性过程,增益亦随之下降,这样将导致多模振荡以及各个模式间的耦合与竞争,这些均已得到实验验证. 但有关激光谱线宽度及光子统计分布特性,就要用全量子理论来处理. 全量子理论包括 Maxwell 电磁场的量子化,要比半经典理论复杂得多. 在下一节中,在引出辐射场量子理论一般结论后,将给出 Langevin 方程与密度矩阵方程另一种导出方式. 首先在测不准关系的基础上导出包括辐射场,原子系统及其相互作用在内的 Langevin 方程,然后在 Langevin 方程的基础上进一步导出密度矩阵方程,不直接采用微扰论方法. 第三节中综述激光振荡理论及实验研究结果,也包括近来的一些发展.

二、全量子方程的导出

* 1. 在 Heisenberg 表象中,量子化后的电场 \mathbf{E} 及场能 H_L 可表示为^[4]

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\sum(b_\lambda - b_\lambda^\dagger)\sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda}u_\lambda(x), \\ H_L &= \sum\hbar\omega_\lambda b_\lambda^\dagger b_\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $u_\lambda(x)$ 表示第 λ 个模式的空间分布, $b_\lambda, b_\lambda^\dagger$ 分别为湮没及产生算符,满足如下的对易关系

$$\begin{aligned} [b_\lambda, b_\rho^\dagger] &= b_\lambda b_\rho^\dagger - b_\rho^\dagger b_\lambda = \delta_{\lambda\rho}, \\ [b_\lambda, b_\rho] &= [b_\lambda^\dagger, b_\rho^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

根据(1), (2)式便可求出

$$\begin{aligned} \frac{db_\lambda}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [H_L, b_\lambda] = -i\omega_\lambda b_\lambda, \\ \frac{db_\lambda^\dagger}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [H_L, b_\lambda^\dagger] = i\omega_\lambda b_\lambda^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

方程(3)为 $b_\lambda, b_\lambda^\dagger$ 所满足的频率为 ω_λ 的简谐振子运动方程。而辐射场也正是由这样一些能量为 $\hbar\omega_\lambda$ 的简谐振子构成的。当然, $b_\lambda, b_\lambda^\dagger$ 虽具有振动的振幅的意义,但不互为对易,亦即是不互相独立的。还应注意到上面的讨论是对封闭的亦即与周围媒质没有相互作用的辐射系统进行,方程(5)是无阻尼的。如果不断与外界交换能量,那么由(5)式描述的无阻尼简谐振动应推广到有阻尼的情形。设 b_λ 在 $t=0$ 时的值为 $b_{\lambda 0}$, 经过与周围媒质交换能量后,这个初始值会阻尼掉,唯象地引进阻尼系数 χ_λ , 则(5)式为

$$\begin{aligned} \frac{db_\lambda}{dt} &= (-i\omega_\lambda - \chi_\lambda)b_\lambda, \\ \frac{db_\lambda^\dagger}{dt} &= (i\omega_\lambda - \chi_\lambda)b_\lambda^\dagger. \end{aligned} \quad (6)$$

由(4), (6)式容易解出 $[b_\lambda, b_\lambda^\dagger] = [b_\lambda, b_\lambda^\dagger]_0 e^{-2\chi t}$, 按初始值 $[b_\lambda, b_\lambda^\dagger]_0 = 1$, 便得 $[b_\lambda, b_\lambda^\dagger] = e^{-2\chi t}$ 。这表明在 $t > 0$ 时,对易关系(4)是不满足的。为了满足对易关系(4),有必要在方程(6)中引进无规力 $F_\lambda, F_\lambda^\dagger$ [4]。

$$\begin{aligned} \frac{db_\lambda}{dt} &= (-i\omega_\lambda - \chi_\lambda)b_\lambda + F_\lambda, \\ \frac{db_\lambda^\dagger}{dt} &= (i\omega_\lambda - \chi_\lambda)b_\lambda^\dagger + F_\lambda^\dagger, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\langle [F_\lambda(t), F_\lambda^\dagger(\tau)] \rangle = 2\chi\delta(t - \tau).$$

将 $[b_\lambda, b_\lambda^\dagger]$ 对无规力求平均 $\langle [b_\lambda, b_\lambda^\dagger] \rangle$, 应用(7)式易证明

$$\frac{d}{dt} \langle [b_\lambda, b_\lambda^\dagger] \rangle = 2\chi_\lambda [1 - \langle [b_\lambda, b_\lambda^\dagger] \rangle], \quad (8)$$

由 $[b_\lambda, b_\lambda^\dagger]_0 = 1$, 便得 $\langle [b_\lambda, b_\lambda^\dagger] \rangle = 1$ 。(4), (7)式为辐射场的 Langevin 方程。这就表明,只要唯象地引进阻尼系数 χ_λ , 就一定要引进无规力 $F_\lambda, F_\lambda^\dagger$ 。否则对易关系就不能满足。为阐明唯象理论的物理实质,还必须借助于热浴模型。假定我们所考虑的辐射体系与热浴不断交换能量。热浴的场能 H_B , 热浴与辐射体系的

相互作用能 H_{L-B} 分别为

$$\begin{aligned} H_B &= \sum \hbar\omega B_\omega^\dagger B_\omega, \\ H_{L-B} &= \hbar b^\dagger \sum g_\omega B_\omega e^{-i\omega t} + \hbar b \sum g_\omega^\dagger B_\omega^\dagger e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (9)$$

由此便能求出考虑到相互作用后, b^+ 的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dB_\omega^\dagger}{dt} &= i b^\dagger g_\omega e^{-i\omega t}, \\ \frac{db^+}{dt} &= i\omega_0 b^+ - \chi b^+ + \underbrace{i \sum g_\omega^\dagger B_\omega^\dagger(t_0) e^{i\omega t}}_{F^+(t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式给出无规力 $F^+(t)$ 用热浴算子 $B_\omega^\dagger(t_0) e^{i\omega t}$ 来表示的式子,也可以看成是无规力 F^+ 的定义。根据这个定义,便能求出无规力的相关函数。

$$\begin{aligned} \langle F^+(t) F^+(t') \rangle &= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} \langle B_\omega^\dagger B_\omega \rangle \\ &= 2\chi \bar{n}_\omega(T) \delta(t - t'), \\ \langle F(t) F^+(t') \rangle &= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} \langle B_\omega B_\omega^\dagger \rangle \\ &= 2\chi (\bar{n}_\omega(T) + 1) \delta(t - t'), \\ \chi &= \pi |g|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

由(11)式易于得出(7)式中的对易关系。

2. 现在求辐射场的密度矩阵方程,从包括辐射场与热浴在内的总的体系出发,并应用二级微扰理论,便求得辐射场的密度矩阵 ρ 所满足的方程[4]。设 ρ_{LB} 为总体系的密度矩阵,则 $\rho = \text{tr}_B(\rho_{LB})$,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \delta([b^+ \rho, b] + [b^+, \rho b]) \\ &\quad + \xi([b \rho, b^+] + [b, \rho b^+]). \end{aligned} \quad (12)$$

考虑到 $[b, f] = \frac{\partial f}{\partial b^+}$, $[b^+, f] = -\frac{\partial f}{\partial b}$, 则(12)式可写为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\delta \left(\frac{\partial b^+ \rho}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho b}{\partial b} \right) \\ &\quad + \xi \left(\frac{\partial b \rho}{\partial b} + \frac{\partial \rho b^+}{\partial b^+} \right) \\ &= 2\rho(\xi - \delta) + 2\xi \frac{\partial^2 \rho}{\partial b \partial b^+} + (\xi - \delta) \\ &\quad \times \left(b^+ \frac{\partial \rho}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho}{\partial b} b \right). \end{aligned} \quad (13)$$

(13) 式可通过下面步骤加以证明:

设 ρ 按正常顺序展开,

$$\rho_N = \sum \rho_{mn} b^{+m} b^n, \quad (14)$$

则可证明

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N}{dt} = & -\sum \frac{\partial \rho_N \dot{B}_\omega}{\partial B_\omega} - \sum \frac{\partial \dot{B}_\omega^+ \rho_N}{\partial B_\omega^+} \\ & + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} F + F^+ \frac{\partial \rho_N}{\partial b^+}. \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式右端前面两项的物理意义是 ρ_N 流进流出元体积的结果, 后两项是 ρ_N 中明显地依赖于时间的项引起的, 这两项偏导数是在 B_ω^+ , B_ω 为常数的条件下取定的. 由 (10) 得

$$\left(\frac{\partial b^+}{\partial t}\right)_{B_\omega^+} = F^+, \quad \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_{B_\omega} = F, \quad (16)$$

故有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial b^+}{\partial t}\right)_{B_\omega^+} \left(\frac{\partial \rho_N}{\partial b^+}\right) + \left(\frac{\partial \rho_N}{\partial b}\right) \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_{B_\omega} \\ & = F^+ \frac{\partial \rho_N}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} F. \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式就是 (15) 式的后两项. 现计算 (15) 式前后两项的贡献.

$$\begin{aligned} & -\sum \frac{\partial (\dot{B}_\omega^+ \rho_N)}{\partial B_\omega^+} - \sum \frac{\partial (\rho_N \dot{B}_\omega)}{\partial B_\omega} \\ & = -\sum \frac{\partial (i g_\omega b^+ \rho_N)}{\partial B_\omega^+} - \sum \frac{\partial (-i g_\omega^* \rho_N b)}{\partial B_\omega} \\ & = -\sum [B_\omega (i g_\omega b^+ \rho_N) - (i g_\omega b^+ \rho_N) B_\omega] \\ & \quad - \sum [-B_\omega^* (-i g_\omega^* \rho_N b) + (-i g_\omega^* \rho_N b) B_\omega^*] \\ & = [F b^+ \rho - b^+ \rho F] - [F^+ \rho b - \rho b F^+] \\ & = F b^+ \sum \rho_{mn} b^{+m} b^n - b^+ \sum \rho_{mn} b^{+m} b^n F \\ & \quad - F^+ \sum \rho_{mn} b^{+m} b^{n+1} + \sum \rho_{mn} b^{+m} b^{n+1} F^+. \end{aligned} \quad (18)$$

注意到

$$\begin{aligned} F b^+ & = F(t) (b^+(0) e^{(i\omega - \chi)t} \\ & \quad + \int_0^t F^+(\tau) e^{(i\omega - \chi)(t-\tau)} d\tau), \\ \langle F b^+ \rangle & = \int_0^t \langle F(t) F^+(\tau) \rangle e^{(i\omega - \chi)(t-\tau)} d\tau \\ & = \chi (n_\omega + 1), \end{aligned} \quad (19)$$

将 (18) 式右端对 F , F^+ 求平均, 使得

$$\begin{aligned} & \sum \rho_{mn} (n_\omega + 1) \chi (m+1) b^{+m} b^n \\ & - \sum \rho_{mn} n_\omega \chi (m+1) b^{+m} b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum \rho_{mn} n_\omega \chi (m+1) b^{+m} b^n \\ & + \sum \rho_{mn} (n_\omega + 1) \chi (n+1) b^{+m} b^n \\ & = 2\chi \rho_N + \chi \left(b^+ \frac{\partial \rho_N}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} b \right). \end{aligned} \quad (20)$$

后两项的贡献为

$$F^+ \frac{\partial}{\partial b^+} \sum \rho_{mn} b^{+m} b^n + \frac{\partial}{\partial b} \sum \rho_{mn} b^{+m} b^n F. \quad (21)$$

将 (21) 式对 F^+ , F^- 求平均后为

$$2\chi n_\omega \sum \rho_{mn} m n b^{+m-1} b^{n-1} = 2\chi n_\omega \frac{\partial^2 \rho_N}{\partial b^+ \partial b}. \quad (22)$$

由 (15), (20), (22) 便得出对 F , F^+ 求平均后为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N}{dt} & = 2\chi \rho_N + \chi \left[b^+ \frac{\partial}{\partial b^+} \rho_N + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} b \right] \\ & \quad + 2\chi n_\omega \frac{\partial^2 \rho_N}{\partial b \partial b^+}. \end{aligned} \quad (23)$$

若将 ρ 按反常顺序展开,

$$\rho_A = \sum \rho_{mn} b^m b^{+n}. \quad (24)$$

同样可以证明

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_A}{dt} & = 2\chi \rho_A + 2\chi \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial b \partial b^+} \\ & \quad + \chi \left(b^+ \frac{\partial \rho_A}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho_A}{\partial b} b \right) \\ & \quad + 2\chi (n_\omega + 1) \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial b \partial b^+}. \end{aligned} \quad (25)$$

按 (23), (25) 式, 并将 ρ 按正常与反常顺序展开, 使得

$$\begin{aligned} \rho & = \frac{\rho_A + \rho_N}{2}, \\ \frac{d}{dt} \rho & = 2\chi \rho + \chi \left(b^+ \frac{\partial \rho}{\partial b^+} + \frac{\partial \rho}{\partial b} b \right) \\ & \quad + 2\chi (n_\omega + 1) \frac{\partial^2 \rho}{\partial b \partial b^+}. \end{aligned} \quad (26)$$

将 (14), (26) 式进行比较, 使得

$$\xi - \delta = x, \quad \frac{\delta}{\xi - \delta} = \bar{n}. \quad (27)$$

(26), (27) 给出了与微扰论方法导出结果一致的密度矩阵方程.

3. 关于原子系统, 我们采用自旋算符来描写, 它与电子系统算符的关系如下.

自旋算符	电子系统算符
$\sigma^+ \longleftrightarrow$	$a_1^\dagger a_1$
$\sigma^- \longleftrightarrow$	$a_1^\dagger a_2$
$\sigma_x \longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1)$

下面写出包括辐射场、原子系统及其相互作用在内的 Langevin 方程。导出方式与前面相仿，但较繁琐，从略。

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_1^+ &= (i\omega_1 - \chi_1)b_1^+ + ig_1^*\sigma^+ + F^+, \\
 \dot{b}_1 &= (-i\omega_1 - \chi_1)b_1 - ig_1\sigma^- + F, \\
 \dot{\sigma}_x &= -\gamma_1\sigma_x + i \sum_{\lambda} (g_{\lambda}b_{\lambda}^+\sigma^- - g_{\lambda}^*b_{\lambda}\sigma^+) \\
 &\quad + \Gamma_x, \\
 \dot{\sigma}^+ &= (i\omega_0 - \gamma_2)\sigma^+ \\
 &\quad - i2 \sum_{\lambda} g_{\lambda}b_{\lambda}^+\sigma_x + \Gamma^+, \\
 \dot{\sigma}^- &= (-i\omega_0 - \gamma_2)\sigma^- \\
 &\quad + i2 \sum_{\lambda} g_{\lambda}^*b_{\lambda}\sigma_x + \Gamma^-.
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \langle [\Gamma_x(\tau), \Gamma^\pm(t)] \rangle &= (\gamma_1 + \gamma_2)[\sigma_x, \sigma^\pm]\delta(\tau - t), \\
 \langle [\Gamma^+(\tau), \Gamma^-(t)] \rangle &= 2\gamma_2[\sigma^+, \sigma^-]\delta(\tau - t), \\
 \langle \Gamma^+(\tau)\Gamma^-(t) + \Gamma^-(\tau)\Gamma^+(t) \rangle &= 2\gamma_2(\sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+)\delta(\tau - t), \\
 2\gamma_2 &= g^2, \quad \gamma_1 = g^2 n_{\omega_0}, \\
 \sigma^{+2} = \sigma^{-2} &= 0, \quad \sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+ = 1, \\
 \langle \sigma^\pm, \sigma_x \rangle &= \mp\sigma^\pm, \quad \sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ = 2\sigma_x.
 \end{aligned} \tag{29}$$

(28)–(31)为辐射场与原子体系的全量子方程组，对单模振荡、谱线均匀加宽的情形，全量子方程组可以化简，最后得出 b^+ 所满足的非线性

$$\begin{aligned}
 \text{振动方程} \left(b^+ = e^{i\omega t} \tilde{b}^+, \quad \Omega = \frac{\omega_0\chi + \omega\gamma_2}{\chi + \gamma_2} \right), \\
 \ddot{\tilde{b}}^+ + \left(\chi + \gamma_2 + i \frac{(\omega - \omega_0)(\chi - \gamma_2)}{\chi + \gamma_2} \right) \dot{\tilde{b}}^+ \\
 + \left[\chi\gamma_2 \left(1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\chi + \gamma_2)^2} \right) - g^2(S_{33} - S_{22})^0 \right. \\
 \left. + \bar{c}(\tilde{b} + \tilde{b}) \right] \tilde{b}^+ = \tilde{F}_{\text{tot}}^+.
 \end{aligned} \tag{32}$$

式中 $(S_{33} - S_{22})^0$ 为初始反转粒子数， \tilde{F}_{tot}^+ 为无规力， \bar{c} 为常数。

三、激光振荡的全量子方程的解

1. 方程 (32) 给出 \tilde{b}, \tilde{b}^+ 所满足的 Langevin 方程。它是非线性的、量子的，并包含有无规力的影响。如果将算符 $\tilde{b}, \tilde{b}^+, \tilde{F}_{\text{tot}}, \tilde{F}_{\text{tot}}^+$ 等换成相应的可对易的量 u, u^*, Γ, Γ^* 等，则 (32) 式过渡到经典的 Langevin 方程；如果又不及无规力的影响，则进一步过渡到半经典理论的非线性振动方程。要严格地解 (32) 是困难的。Risken 等求解经典的 Langevin 方程^[6]，研究了阈值附近激光振荡的谱宽与光子统计分布。我们先定性研究方程 (32) 的解。在 (32) 式中令 $\tilde{b} = \tilde{b}^+ = 0$ ，并不计及无规力 \tilde{F}_{tot}^+ ，于是有稳态解

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}^+ &= 0, \\
 \text{或} \quad \sqrt{\bar{c}} \cdot \tilde{b}^+ &= \sqrt{g^2(S_{33} - S_{22})^0 - \chi\gamma_2 \left(1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\chi + \gamma_2)^2} \right)}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

从 (33) 看到，当根号内为负数，亦即在阈值以下时，不存在稳态解， $\tilde{b}^+ = 0$ ；只有在阈值以上才存在稳态解将 \tilde{b}^+ 对 $(S_{33} - S_{22})^0$ 作图，A 点为阈值，由 O 至 A 一段为阈值以下的阻尼振荡。在高于阈值时，便实现了稳态振荡，即图中 AB 曲线所表示的情形，在 OA 段，振幅和位相都可以有起伏；而在 AB 段，有起伏的主要是位相。可以证明，对于前一种情形，我们有

$$\langle b^+(t)b(0) \rangle \simeq r_0^2 e^{-\frac{1}{2}[(\Delta\Phi^+)^2 + (\Delta\Phi^-)^2]}, \tag{34}$$

对于后一种情形

$$\langle b^+(t)b(0) \rangle \simeq r_0^2 e^{-\frac{1}{2}(\Delta\Phi^+)^2}. \tag{35}$$

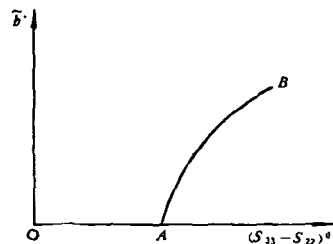


图 1

$\Delta\varphi'$, $\Delta\varphi$ 分别为振幅及位相起伏, 若设这两种起伏的均方值相等, $(\Delta\varphi')^2 = (\Delta\varphi)^2$, 则由 (34), (35) 式易看出阻尼解的谱宽应是稳态解的两倍。

现求经典的 Langevin 方程的解, 略去 (32) 式中的二次微分项, 并将算符换成可对易的量, 则得

$$\frac{d}{dt} u - \beta(\bar{n} - u^*u)u = \Gamma, \quad (36)$$

β, \bar{n} 为常数. 令 $u = re^{-i\varphi}$, 则由 (36) 式得 Fokker-Planck 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{(\bar{n} - r^2)r^2\omega\} \\ = 0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

(37) 式的稳态解为

$$\begin{aligned} \omega(r) = \frac{N}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{4} + \frac{a^2}{2}}, \quad r = \sqrt{\beta/Q} r, \\ a = \sqrt{\beta/Q} \bar{n}. \end{aligned} \quad (38)$$

N 为归一化常数.

利用稳态解 (38) 式, 可求光子计数几率. 设在 dt 时间间隔内测量到一个光子的几率为 $p(1, dt, t)$. 则 $p(1, dt, t) = \alpha I(t) dt$. 利用 $\omega(r)$ 可求得在 T 时间内测得 n 个光子的几率为

$$p(n, T) = \int_0^\infty \frac{(\alpha T I)^n}{n!} e^{-\alpha T I} \omega dl. \quad (39)$$

图 2 给出了光子计数分布的理论值 $p(n, T)$ 与实验值的比较^[7]是很符合的. 图中还给出了按泊松分布算出的光子计数分布与实验值比

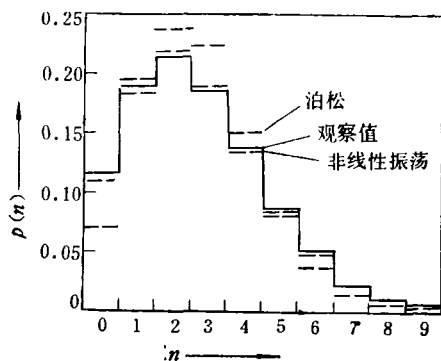


图 2

较差别较大.

为了计算谱线宽度, 还要求出 (37) 式的非稳态解 $\omega(\varphi, \varphi, \dot{\varphi})$, 并进一步计算出强度起伏的相关函数 $K(a, \tau)$,

$$\begin{aligned} K(a, \dot{\varphi}) &= \langle (\varphi^2(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}) - \langle \varphi^2 \rangle) (\varphi^2(\dot{\varphi}) \\ &\quad - \langle \varphi^2 \rangle) \rangle \\ &= K(a, 0) \sum_{m=1}^{\infty} M_m e^{-\lambda_{0m} \tau}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Delta\omega P = \Delta\omega_a P_a \lambda_{01}(a), \quad (41)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{1}{\sqrt{\beta\theta}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m}{\lambda_{0m}}. \quad (42)$$

$a = \sqrt{\beta/Q} \bar{n}$ 为泵浦参数, $\Delta\omega P$ 为谱宽与输出功率的乘积, $\Delta\omega_a P_a$ 为远大于阈值时的乘积, λ_{01} 为这两种乘积之比, 它的值在 1 与 2 间变化. 图 3 给出了由阈值以下过渡到阈值以上的变化曲线^[7]. λ_{eff} 为考虑到各种弛豫方式带来的修正, 图 4 给出谱宽 $\Delta\omega$ 随 a 的变化曲线, 而实验值均落在 λ_{eff} 这条曲线上^[8].

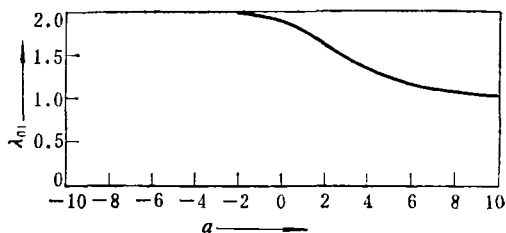


图 3

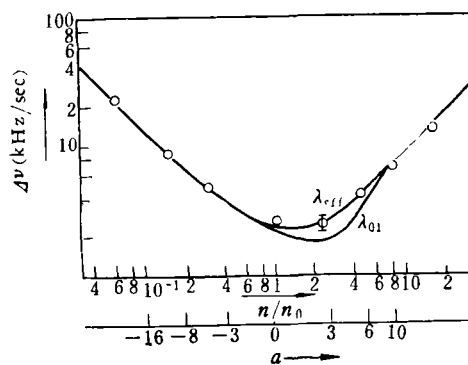


图 4

2. 近年来对激光的统计特性有较多的研究^[9-11], 所采用的辐射场的约化密度矩阵 ρ 也满足方程 (12), 关于这一点还要作一些说明,

方程的导出是依据描述辐射场与热浴系统及其相互作用的运动方程(10),由(9)式得出

$$\begin{aligned} \frac{db^+}{dt} &= i\omega_0 b^+ + i \sum_{\omega} g_{\omega}^* B_{\omega}^+(t) e^{i\omega t} \\ &= i\omega_0 b^+ + i \sum_{\omega} g_{\omega}^* \\ &\quad \times \left[i \int_{t_0}^t b^+(\tau) g_{\omega} e^{i\omega\tau} d\tau + B_{\omega}^+(t_0) \right] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (43)$$

假定 g_{ω}^2 是近乎相等的,于是(43)式中的

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} g_{\omega}^2 e^{i\omega(t-\tau)} &\simeq \pi g^2 \left[\delta(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\pi} \frac{P}{t-\tau} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

由(43),(44)便得到(10).但对于两能级的原子系统,(44)式一般不成立,由(43)式只能得出

$$\begin{aligned} b^+ &= b^+(0) e^{i\omega_0 t} + \int_{t_0}^t e^{i\omega_0(t-\tau)} \\ &\quad \times i \sum_{\omega} g_{\omega}^* B_{\omega}^+(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (45)$$

若将(45)式中的 $B_{\omega}^+(\tau)$ 取为初始值 $B_{\omega}^+(t_0)$,则得出 b^+ 的一级近似为

$$b^{+(1)} = b^+(0) e^{i\omega_0 t} + \int_{t_0}^t e^{i\omega_0(t-\tau)} F^+(\tau) d\tau. \quad (46)$$

应用(45)式计算 $\langle F b^{+(1)} \rangle$,则(19)式仍成立,有关密度矩阵方程的推导也成立.故(12)式可以看成是假定(44)的结果,也可以看成是微扰的近似(46)的结果.对于辐射场与二能级原子体系的相互作用,可按(28),(29)式,并令 $\chi = F = F^+ = \gamma_1 = \gamma_2 = \Gamma_x = \Gamma^{\pm} = 0$,于是有

$$\begin{aligned} \dot{b}_1^+ &= i\omega_1 b_1^+ + i g_1^* \sigma^+, \\ \dot{\sigma}^+ &= i\omega_0 \sigma^+ - i 2 g_1 b_1^+ \sigma_x, \\ [\sigma^+, \sigma^-] &= 2\sigma_x. \end{aligned} \quad (47)$$

对于稳态,反转粒子数不变, σ_x 也不变,方程(47)就与方程(10)没有区别.故约化密度矩阵方程(12)也同样适用于辐射场与二能级原子系统相互作用的情形(在微扰意义下).于是根据(12)式便得

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\delta [bb^+o + \rho bb^+] + 2\delta [b^+ob] \\ &\quad - \xi [b^+b\rho + \rho b^+b] + 2\xi [bob^+], \end{aligned} \quad (48)$$

在粒子表象中为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{nn}}{dt} &= -\delta [n+1+n'+1] \rho_{n,n} \\ &\quad + 2\delta \sqrt{nn'} \rho_{n-1,n'-1} - \xi [n+n'] \rho_{n,n'} \\ &\quad + 2\xi \sqrt{(n+1)(n'+1)} \rho_{n+1,n'+1}. \end{aligned} \quad (49)$$

注意这结果是在弱讯号的情形下得到的;如果是强激光输出,则应考虑由于受激辐射使得反转粒子数下降.设泵浦功率为 P ,反转粒子的纵弛豫为 Δ/T_1 .由于受激辐射带来的消耗率为 $B'\Delta n$,则平衡时 $P = \frac{\Delta}{T_1} + B'\Delta n$,故有 $\Delta =$

$$\frac{P}{\frac{1}{T} + B'n} = \frac{\Delta_0}{1+Bn},$$

这将影响到参数 $\delta (=$

$\chi\Delta)$,使它变为 $\delta/(1+Bn)$.于是(49)为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{nn}}{dt} &= \frac{-\delta}{1+Bn} [n+1+n'+1] \rho_{n,n} \\ &\quad + \frac{2\delta}{1+Bn} \sqrt{nn'} \rho_{n-1,n'-1} \\ &\quad - \xi [n+n'] \rho_{n,n} \\ &\quad + 2\xi \sqrt{(n+1)(n'+1)} \rho_{n+1,n'+1}. \end{aligned} \quad (50)$$

由(50)式可求出稳态 $\frac{d\rho_{nn'}}{dt} = 0$ 时的光子统计分布

$$\rho_{n,n} = \frac{N^{n+1/B}}{Z(n+1/B)}, \quad N = \frac{\delta}{\xi B} \quad (51)$$

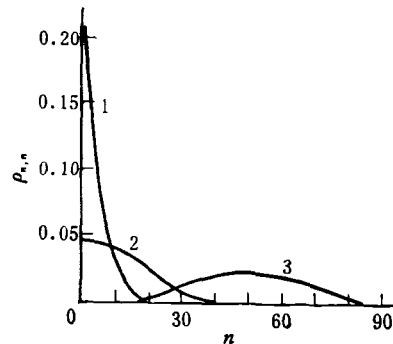


图 5

按(51)式计算出平均光子数 $\langle n \rangle = \frac{1}{B} \left(\frac{\delta}{\xi} - 1 \right)$, (51)式中的 Z 为规一化常数, 当 N 很大时, ρ_{nn} 趋近于 Poisson 分布, $\rho_{nn} \rightarrow \frac{N^n}{n!} e^{-N}$. 图 5 给出三种情形的光子统计分布^[1]: 1——低于阈值, $\delta < \xi$; 2——等于阈值, $\delta = \xi$; 3——超过阈值的 20%, $\delta/\xi = 1.2$. 取定 B , 使得当 $\delta/\xi = 1.2$ 时, $\langle n \rangle = 50$.

四、小 结

目前激光器的热噪音水平还比较高, 有些在激光振荡中可能存在的量子现象不易表现出来, 以致解经典的 Langevin 方程已与实验很好符合. 但激光振荡的全量子理论, 在描述激光振荡的物理过程、揭示光子的统计及相关性等方面比半经典理论深入, 有效得多了. 广泛开展光子计数及相关性测定等实验研究是很有意

义的.

参 考 文 献

- [1] J. P. Gordon, H. J. Zeiger and C. H. Townes *Phys. Rev.*, **95**(1954), 282; **99**(1954), 1264
- [2] P. Grivet and A. Blaquiere, Proc. on the Symposium Opt. Masers (ed. Jerome Fox), New York, Polytechnic Press, (1963).
- [3] Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi" Course 42, "Quantum optics", (1969) 586.
- [4] H. Haken, *Hander der Physik Band, XXV/2c. Licht und Materie, Ie* (1970).
- [5] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 2nd ed, (1968)
- [6] H. Risken, Ch. Schmid and W. Weidlich, *Z. Physik*, **194**(1966), 337.
- [7] W. Smith and J. A. Armstrong, *Phys. Rev. Letters*, **16**(1966), 1169.
- [8] F. T. Arecchi, *Phys. Letters*, **25A**(1967), 59.
- [9] R. R. Schaefer and C. R. Willis, *Phys. Rev. A*, **13**(1976), 1874.
- [10] R. Roy and L. Mandel, *Opt. Communications*, **23**(1977), 306.
- [11] M. Scully and W. E. Lamb Jr., *Phys. Rev.*, **159**(1967), 208.

冷 中 子 技 术

刘 圣 康 周 宗 源
(南京大学物理系)

一般中子源产生的是快中子. 快中子在减速剂中碰撞减速. 当能量降到 0.025 电子伏左右时, 中子能量与减速剂分子热运动能量达成热平衡. 这时的中子叫做“热中子”. 在热中子谱中, 一部分中子的能量小于 0.005 电子伏(波长大于 4 埃), 叫做“冷中子”. 当中子能量小于 10^{-4} 电子伏(波长大于 30 埃)时, 叫做“甚冷中子”. 当能量小于 10^{-7} 电子伏(波长大于 1000 埃)时, 叫做“超冷中子”.

一、冷中子技术的物理基础^[1]

中子同其他微观粒子一样, 具有波粒二象

性. 冷中子的波动性较显著. 当它由真空入射到介质平面时, 就会产生折射和反射等现象. 设 n 为此介质的中子折射系数, 当中子入射角 $\theta > \sin^{-1} n$ 时, 就会发生全反射现象.

中子与物质作用时, 存在一个散射势:

$$U = \frac{2\pi\hbar}{m} Nb,$$

式中 m 为中子的质量, \hbar 为普朗克常数, N 为单位体积内的原子数, b 为原子核的平均散射长度. 对于铁磁材料, 还要添一项 $\pm \mu B$, μ 为中子磁矩, B 为磁感应强度. 当中子自旋与 B 反平行时取 + 号, 平行时取 - 号.

对大多数元素的原子核而言, $b > 0$, 即中