研究工作简报

关于脉冲星磁层的共转区域

胡 文 瑞
（中国科学院力学研究所）
1980 年 5 月 29 日收到

恒星演化到晚期，根据其质量的大小，可坍缩为白矮星，中子星或者黑洞. 六十年代由于射电天文学的发展，发现了脉冲星. 一般认为，脉冲星就是高速旋转的、具有强磁场的中子星. 因此，从观测和理论上研究脉冲星的性质就引起了强烈的兴趣. 脉冲星研究涉及三个基本问题，即中子星的内部结构，脉冲星的磁层结构，以及其辐射机制. 近来发现，脉冲星往往是 X 射线星体，这就需要分析脉冲星周围的环境，即了解脉冲星磁层的结构.

简单的脉冲星磁层分析假设脉冲星具有偶极位形的磁场，随脉冲星一起高速转动，在脉冲星周围感应电场，从而形成电荷分布. 如果磁轴与转轴不重合，从脉冲星极区激发的电磁辐射强度对远处星球呈现脉冲的讯号特征. 为了理论上分析简单，常常讨论磁轴与转轴重合的情形. 当脉冲星周围的磁层与星体共同转动时，在几百个脉冲星半径处就会达到光速，该处就称为光速圆柱. Ferraro 旋转定理认为[1]，有磁场的星体周围的等离子体中存在与星体共转的区域. 脉冲星的共转区一直延伸到光速圆柱[2]，但共转区会使密度分布出现奇异性. 而在定常和轴对称时，每个磁面上的角速度应保持不变. 事实上，由于许多星体表面附近都有一层有限电阻的大气，那里的电阻效应是不可忽略的，磁面上的转动角速度有剪切. 这样，无穷电导率条件下的 Ferraro 定理不能直接用到星体大气层中. 人们可以讨论无共转区的脉冲星磁层结构，这时也没有光速圆柱引起的困难.

仍然假设定常和轴对称，导电流体作纯粹的旋转运动. 在球坐标 (r, θ, φ) 中的感应方程可以写为

$$\left(\Delta B_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}B_\theta\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \ln \eta_m}{\partial \theta}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (1)$$

$$\left(\Delta B_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \ln \eta_m}{\partial r} \times \left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \eta_m\left(\Delta B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \eta_m}{\partial r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \eta_m}{\partial \theta}\frac{\partial B_\varphi \sin\theta}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (3)$$

其中 η_m 为磁粘性系数，Δ 为拉普拉斯算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4)$$

而磁势函数 $\psi(r, \theta)$ 满足关系

$$B_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5)$$

由 (3) 式可以看出，如果 η_m 和 B_φ 中有一个为零，则可得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0. \quad (6)$$

由 (6) 式可得到

$$\Omega = \Omega(\psi). \quad (7)$$

所以，每一个 $\psi =$ 常数的磁面上，角速度 Ω 也

必须保持不变，这就是 Ferraro 定理. 但是，上面的推导并不要求 η_m 一定为零，即只要 $B_\varphi=0$，有限电阻对 Ferraro 定理也成立.

如果 η_m 和 B_φ 都不为零，则每一磁面上的角速度可以不同. 如果已知磁场位形，可由(3)具体计算角速度的变化关系. (3) 式可以改写为

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial r}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}=f(r,\theta), \quad (8)$$

其中

$$f(r,\theta)=-r\left[\eta_m\left(\Delta B_\varphi-\frac{B_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\times\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta}\frac{\partial B_\varphi\sin\theta}{\partial\theta}\right]. \quad (9)$$

方程 (3) 是 $\Omega(r,\theta)$ 的一阶非齐次线性偏微分方程，其特征方程为

$$\frac{dr}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)}=-\frac{d\theta}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}=\frac{d\Omega}{f(r,\theta)}. \quad (10)$$

由前两项可得到首次积分

$$\psi(r,\theta)=C_1. \quad (11)$$

当磁场位形给定时，$\psi(r,\theta)$ 是已知函数，它可以解出函数关系

$$\theta=\Theta(r,C_1). \quad (12)$$

由 (10) 式的第一和第三项可求出另一积分关系

$$\Omega(r,\theta)=C_2+\int\frac{f[r,\Theta(r,C_1)]}{\frac{\partial\psi[r,\Theta(r,C_1)]}{\partial\theta}}dr=C_2+F(r,C_1). \quad (13)$$

由两个首次积分可得到方程 (8) 的通解为

$$\chi\{\psi(r,\theta),\Omega(r,\theta)-F[r,\psi(r,\theta)]\}=0,$$

或者也可以写为

$$\Omega(r,\theta)=F[r,\psi(r,\theta)]+\chi[\psi(r,\theta)], \quad (14)$$

其中 χ 为待定的任意函数关系. 当 $f=0$ 或 $F=0$ 时，(14) 式就化为等旋转定理的关系 (7). 只要给定磁场的位形和电导率的分布关系，我们就可以由 (14) 式求出角速度的分布关系.

一般而言，电导率在星体外面的介质中是不均匀的. 在星体附近，有限电阻的效应必须考虑；但在星体较外层大气中，可以看成是无穷电导率. 这样，整个区域可以分为外场和内场区域两部分. 在外场区域中，$\eta_m\to0$，因此满足 Ferraro 定理，角速度由 (7) 式确定. 在内场区域中，η_m 有限，这时角速度由 (14) 式确定，转动有剪切效应. 由于内场区域的厚度较小，内场特征很类似于粘性边界层，转动可以有大的剪切，然后与一个沿磁面刚性转动的区域衔接. 由于转动的剪切可以随 θ 角变化，所以沿脉冲星赤道的 r 方向，角速度 $\Omega\left(r,\frac{\pi}{2}\right)$ 是 r 的函数，因此不一定有和星体共转的区域. 当 Ωr 随 r 不增大时，也就没有光速圆柱.

如果星体具有粘性剪切效应，则需要(3)式中的有限电阻项不比第一项小. 也就是要求磁雷诺数不能过大，即

$$\mathrm{R_m}=\frac{vL}{\eta_m}\lesssim1.$$

脉冲星的质量一般为 1 个太阳质量，半径约 1 公里，转动周期约 1 秒，等离子体的温度约为 10^6 K. 由此可估计脉冲星的大气标高 $L\simeq10^{-2}$ 厘米，磁粘性系数 $\eta_m=10^4$ 厘米^2/秒，特征转动速度为 $v\simeq6$ 公厘/秒. 相应的磁雷诺数 $\mathrm{R_m}\simeq0.6$. 这表明，脉冲星大气层中确实可以存在很显著的较差转动，具有边界层的特征. 对于地球或土星磁层也有类似的情况. 因为这些星体表面的气体电导率很低，那里的磁粘性效应不强，而只有动力学粘性起作用.

由于脉冲星大气的特征标高 L 远小于脉冲星半径，不妨记此特征有限电阻层典型厚度为 $r_0\varepsilon$，它比星的半径 r_0 小得多，即 $\varepsilon\ll1$. 所以

$$\left|\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\right|\gg\frac{1}{r_0}\left|\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta}\right|,\quad\left|\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\right|\gg\frac{\eta_m}{r_0}.$$

这时，(9) 式中可略去 η_m 和 $\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta}$ 项，近似得到

$$f(r,\theta)=-\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\left(\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}\right). \quad (15)$$

对于轴对称的无力场，不难得到环向场分量与极场的关系

$$r\sin\theta B_{\varphi}(r,\theta)=G(\psi), \tag{16}$$

其中G为待定函数．因此，(15)式可化为

$$f(r,\theta)=-\frac{G'(\psi)}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right). \tag{17}$$

求解微分方程(8)式的特征方程(10)，用后两式得到首次积分关系

$$\Omega(r,\theta)=C_2-G'(\psi)\int\frac{1}{\sin\theta}\times\left.\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\right|_{r=R(\theta)}d\theta, \tag{18}$$

其中 $r=R(\theta)$ 是由(11)式解出的函数关系．只要具体给出 η_m，ψ 和G的分布，就可以求出Ω.

例如，可具体讨论如下的磁粘性系数:

$$\eta_m(r,\theta)=\eta_0(\theta)\exp\left[-\left(\frac{r-r_0}{\varepsilon r_0}\right)\right]. \tag{19}$$

如果极向磁场的位形很接近于偶极场，则由偶极场关系可得到磁势分布为

$$\psi=\frac{a}{r}\sin^2\theta+\psi_0. \tag{20}$$

不妨取 $\psi_0=0$．利用(11)和(20)，将(19)代入(18)后可求出积分关系为

$$\Omega(r,\theta)=C_2+\frac{G'(\psi)}{\varepsilon r_0}\varphi[\theta,\psi(r,\theta)], \tag{21}$$

其中的积分函数φ的定义是

$$\varphi(\theta,C_1)=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\eta_0(\theta)}{\sin\theta}\times\exp\left[-\left(\frac{\frac{a}{C_1}\sin^2\theta-r_0}{\varepsilon r_0}\right)\right]d\theta, \tag{22}$$

θ_0为某一初始角度．当 $r\gg\varepsilon r_0$ 时，$\varphi[\theta,\psi(r,\theta)]\to 0$，就得到外场的等旋度关系．

作为一个最简单的情况，如果取

$$\eta_0(\theta)=\eta_*\sin^2\theta\cos\theta, \tag{23}$$

则(22)式可以通过积分得到

$$\varphi[\theta,\psi(r,\theta)]=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon r_0}{r}}\sin\theta\times\exp\left[-\left(\frac{r-r_0}{\varepsilon r_0}\right)\right], \tag{24}$$

由此可得到角速度分布关系为

$$\Omega(r,\theta)=\frac{\eta_*G'(\psi)}{2\sqrt{\varepsilon r_0 r}}\exp\left[-\left(\frac{r-r_0}{\varepsilon r_0}\right)\right]\times\sin\theta+\chi(\psi), \tag{25}$$

(25)式表明，当 $r-r_0\gg\varepsilon r_0$ 时，磁粘性引起的较差自转项迅速趋于零，但有限电阻在 εr_0 厚度的层内产生有限的较差转动效应．这种效应可以使外部磁层中没有共转的区域．假设(23)有很大的任意性，但由此得出的具体性质则大体相当，即在有限电阻层内的磁面上有较差转动．目前，脉冲星磁层研究中往往假设没有共转区[3-5]，但也有人指出刚性转动会引起困难[6]．可能需要进一步研究非刚性转动的模型．

这里讨论的结果不仅可用于脉冲星磁层结构，对一般行星的环境也适用．

参 考 文 献

[1] V. C. A, Ferraro *Monthly Notices RAS*, **97** (1937), 458.
[2] P. Goldreich, Julian, W. H., *Astrophys. J.*, **157** (1969), 869.
[3] F. C., Michel, *Astrophys. J.*, **180**(1973), 207
[4] E. T. Scharlemann, Wagoner, R. V., *Astrophys. J.*, **182**(1973), 951.
[5] W. H. Julian, *Astrophys. J.*, **183**(1973), 967.
[6] I. Okamoto, *Monthly Notices RAS*, **167**(1974), 457.

来 函 照 登

《物理》编辑部:

贵刊1980年9卷4期刊登拙著“相变和临界现象(I)”一文，其中380页上“二维伊辛模型的严格解，是后来昂萨格获得诺贝尔奖金的原因”一句说得不对，应予删除．我们感谢杨振宁教授在一封信中提醒：授奖决议中并未明显提到伊辛模型．能否将此信刊出，以兹更正．此问

撰安

于 渌、郝柏林

1981年1月30日