非稳定光腔模式的几何光学分析

朱 如 曾

（中国科学院力学研究所）

1980 年 5 月 4 日收到

一、引　　言

与稳定腔不同，几何光学对非稳定腔的作用十分重大[1]. 整个非稳定腔的几何光学理论建立在 A. E. Siegman 于 1965 年提出的假定[2]的基础上.该假定认为,非稳定腔的基模是由位于腔轴上且互为映象的两个中心所发出的均匀点光束所构成. 可是模为什么一定是点光束? 发光中心为什么一定在腔轴上? 这些问题表明，Siegman 假定应该是某种更完善的理论的推论. 本文将致力于在几何光学的框架里建立这种完善的理论. 本文将提出“几何光学自再现条件”，利用“光束变换矩阵”[3]的概念,以此为基础，解决几何近似下的模式结构及稳定问题,同时把 Siegman 假定作为推论而包括进去. 本文还将导出满足部分自再现条件的“准模”. 虽然准模不是严格的模，但准模将在腔中停留一段时间,会严重影响输出,这正像文献 [4] 对会聚光束所指出的那样. 所以导出准模具有一定意义. 然而,若从衍射理论的积分方程出发，就得不到某些准模.

二、几何光学自再现条件

在旁轴近似下,考虑轴对称光腔的 x 方向. 选定参考平面，光线用 (x, θ) 表示. 往返一次后成为 (x', θ'):

$$\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

H 称为腔的“光线往返矩阵”. 光束一般可以用函数 $\theta = \theta(x)$ 和 $\rho(x)$ 来表示. $\rho(x)dx$ 表示穿过 dx 的光通量. 作为一个模式,应满足往返一次的自再现条件:

强度自再现条件

$$\rho'(x) = \gamma\rho(x), \tag{2.2}$$

等相面自再现条件

$$\theta'(x) = \theta(x), \tag{2.3}$$

位相自再现条件

$$\varphi' = \varphi + 2\pi m, \tag{2.4}$$

$$m = 0, \pm 1, \cdots,$$

式中 $0 < \gamma \leqslant 1$. 我们的对象是非稳定腔. 按定义,这是指[5]

$$|A + D| \geqslant 2, \quad 但 \quad H \neq \pm I, \tag{2.5}$$

虽然，当上式取等号时，衍射效应已十分重要，但作为一个完整的腔的几何光学理论，仍应考虑这种情况.

三、模光束 x 和 θ 关系的一般形式

本节将证明，非稳定腔基模光束满足如下线性关系:

$$ax + b\theta + c = 0, \tag{3.1}$$

式中 a, b, c 为实常数, a 和 b 不同时为零.

证明: 跟踪光线,由光通量守恒得

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{\rho(x)}{\rho'(x')}. \tag{3.2}$$

将 (2.1) 式和 (2.2) 式代入上式得

$$A + B\frac{d}{dx}\theta(x) = \frac{\rho(x)}{\gamma\rho(x')}. \tag{3.3}$$

首先讨论基模,因此取试解

$$\rho(x) = \rho(x') = 常数. \tag{3.4}$$

将 (3.4) 式代入 (3.3) 式得

$$A + B\frac{d}{dx}\theta(x) = \frac{1}{\gamma}. \tag{3.5}$$

(1) 若 $B \neq 0$，从 (3.5) 式易导出 (3.1) 式的形式.

(2) 若 $B = 0$ ($\because |H| \neq 0$, $\therefore A \neq 0$)

此时，(3.5) 式不能确定 $\theta(x)$ 的形式. 但可令

$$\theta(x) = kx + \psi(x), \tag{3.6}$$

式中 k 和 $\psi(x)$ 分别为待定常数和待定的无线性项的函数. 利用 (2.1), (2.3), (3.6) 式和 $B = 0$ 并考虑到 $\psi(0)$ 有限，在 $A \neq D$ 的条件下解得

$$k = \frac{C}{A - D}, \quad \psi(x) = 0. \tag{3.7}$$

此时显然 (3.6) 式具有 (3.1) 式的形式.

当 $A = D$ 时，应取 $C \neq 0$ (否则是稳定腔). 此时应将光束重新表示成 $x = x(\theta)$; 将强度分布表示成 $\rho_1(\theta)$; 自再现条件改为往返一次 $x(\theta)$ 不变而 $\rho_1(x)$ 乘上一个常数因子 γ. 再辅之以光通量守恒条件

$$\rho_1'(\theta')d\theta' = \rho_1(\theta)d\theta,$$

以及基模条件

$$\rho_1(\theta) = \rho_1(\theta') = \text{常数},$$

与 (3.3) 式的推导方法一样，可得

$$C\frac{dx}{d\theta} \pm 1 = \frac{1}{\gamma}. \tag{3.8}$$

此式显然决定 (3.1) 的形式，证毕.

至此可见，基模由 a 和 b 不同时为零的矢量 (a, b, c) 所确定，其物理意义如下:

若 $a \neq 0$，则表示点光束，其曲率半径为

$$R = -\frac{b}{a}, \tag{3.9}$$

发光中心的 x 坐标为

$$x_0 = -\frac{c}{a}. \tag{3.10}$$

若 $a = 0$，但 $b \neq 0$，则表示平行光束，它与腔轴夹角为

$$\theta_0 = -\frac{c}{b}. \tag{3.11}$$

四、基 模 分 析

1. 解法

文献 [3] 中已证，光束往返一次后的变换可用"光束变换矩阵"

$$M\begin{bmatrix} H^{-1\prime} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -C & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

来表示:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

因为 $[a, b, c]$ 和 $\lambda[a, b, c]$ 显然表示同一光束，所以自再现光束必须是 M 的本征矢量. 又为使 a 和 b 不同时为零，所取本征值必须是 $H^{-1\prime}$ 的本征值，也即 H 的本征值.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[A + D + \sqrt{(A + D)^2 - 4}],$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[A + D - \sqrt{(A + D)^2 - 4}]. \tag{4.3}$$

显然，λ 是光束往返一次的线性放大率. 当 $|\lambda| > 1$ 时，表示发散光束，$|\lambda| < 1$ 时是会聚光束. 当 $x_0 = 0$ 时是轴点光束，$x_0 \neq 0$ 时是离轴点光束. 由于腔镜的有限口径，会聚光束和离轴光束虽然满足等相面自再现条件，但在强度分布上不能严格自再现，故称之为"准模".

2. 稳定性问题

Siegman[2] 考虑了模式在 R 变化下的稳定性；本文作者[3]允许发光点可以离轴作二维变动，严格地考察了模的二维稳定性，得到:

[定理 1]，不管腔模是点光束还是平行光束，当 $|\lambda| > 1$ 时，模稳定；当 $|\lambda| < 1$ 时，模不稳定.

现在我们进一步给出

[定理 2]，当 $\lambda = 1$ 时，模不稳定.

证明: 如果 $C = 0$，可将 H 改写为 HTT^{-1}，并将参考平面想象地移到 T 与 T^{-1} 之间，于是腔的往返矩阵成为

表 1　非稳定腔基模特性表

H的性质	H的本征值	M的本征矢量	基模的性质	稳定性	例
$A+D=2$，$A\neq D$（必定 $BC\neq 0$）	$\lambda_1=\lambda_2=1$	$\left(\frac{A-1}{B},\ 1,\ 0\right)$	轴点光束模 $R=\frac{B}{1-A}$，$x_0=0$	不稳	共心球面镜腔 $(d=r_1+r_2)$*
		$\left(\frac{A-1}{B},\ 1,\ \text{任意非零实数}\right)$	离轴点光束模 $R=\frac{B}{1-A}$，$x_0\neq 0$	不稳	
$A+D=-2$，$A\neq D$（必定 $BC\neq 0$）	$\lambda_1=\lambda_2=-1$	$\left(\frac{A+1}{B},\ 1,\ 0\right)$	轴点光束模 $R=\frac{-B}{1+A}$，$x_0=0$	不稳	球面镜腔 $(d=r_1\neq r_2)$
$A=D=1$ $B\neq 0$，$C=0$	$\lambda_1=\lambda_2=1$	$(0,\ 1,\ 0)$	轴向平行光束模 $\theta_0=0$	不稳	平行平面腔
		$(0,\ 1,\ \text{任意非零实数})$	交轴平行光束准模 $\theta_0\neq 0$	不稳	
$A=D=1$ $B=0$，$C\neq 0$	$\lambda_1=\lambda_2=1$	$(1,\ 0,\ 0)$	轴点光束模 $R=0$，$x_0=0$	不稳	
		$(1,\ 0,\ \text{任意非零实数})$	离轴点光束准模 $R=0$，$x_0\neq 0$	不稳	
$A=D=-1$ $B\neq 0$，$C=0$	$\lambda_1=\lambda_2=-1$	$(0,\ 1,\ 0)$	轴向平行光束模 $\theta_0=0$	不稳	平面镜和全反射直角棱镜所构成的腔在垂直于棱线的方向
$A=D=-1$ $B=0$，$C\neq 0$，	$\lambda_1=\lambda_2=-1$	$(1,\ 0,\ 0)$	轴点光束模 $R=0$，$x_0=0$	不稳	球面镜腔 $(d=r_2\neq r_1)$
$\|A+D\|>2$，$C\neq 0$	$\lambda_{1,2}=\frac{A+D}{2}\pm\frac{1}{2}\times\sqrt{(A+D)^2-4}$	$\left(1,\ \frac{D-\lambda_{1,2}}{C},\ 0\right)$	轴点光束模和准模 $R_{1,2}=\frac{A-D}{2C}\pm\frac{1}{2C}\times\sqrt{(A+D)^2-4}$ $x_0=0$	$\|\lambda\|>1$ 的模稳定；$\|\lambda\|<1$ 的模是准模，且不稳定	非共焦非稳定球面镜腔 $\left(d\neq\frac{r_1+r_2}{2}\right.$，且 $\left(1-\frac{d}{r_1}\right)\left(1-\frac{d}{r_2}\right)>1$ 或 $\left.\left(1-\frac{d}{r_1}\right)\left(1-\frac{d}{r_2}\right)<0\right)$
$\|A+D\|>2$，$C=0$（必定 $A=D^{-1}\neq 1$）	$\lambda_1=A$	$(0,\ 1,\ 0)$	轴向平行光束模(或准模) $\theta_0=0$	$\|A\|>1$，稳定，若 $\|A\|<1$，是准模且不稳定	共焦非对称球面镜腔 $\left(d=\frac{r_1+r_2}{2}\right.$，但 $\left.r_1\neq r_2\right)$
	$\lambda_2=D=A^{-1}$	$\left(1,\ \frac{B}{A-D},\ 0\right)$	轴点光束模(或准模) $R=\frac{B}{D-A}$，$x_0=0$	$\|A\|<1$，稳定，若 $\|A\|>1$，是准模，且不稳定	

* d 表示两个腔镜顶点之间的距离，r_1 和 r_2 分别表示两镜的曲率半径.

$$H_1 = T^{-1}HT = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix}.$$

因为 $H \neq \pm I$，所以可以选择 T 而使 $C_1 \neq 0$. 因此，我们只要限于考察 $C \neq 0$ 的情况即可. 易知，此时必是点光束模. 由 $ABCD$ 定律[3]得

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}.$$

微分上式，并利用 $|H| = 1$, $R_1 = (\lambda - D)/C$, 可得

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \lambda^{-2} = 1,$$

$$\frac{d^2R_2}{dR_1^2} = -2C\lambda^{-3} = \pm 2C.$$

由此立即可见系统不稳定，证毕.

3. 基模的分析结果

应用本节上述解法和稳定性定理对基模分析所得的详细结果列于表 1 中. 从表中可见，除准模外，全部模都是轴点光束(包括轴向平行光束为其特例). 这表示，Siegman 的假定是本理论的推论.

五、高阶模的导出

为了得到与基模相对应的高阶模，我们保持基模的波阵面形状不变，即保持 (3.1) 式，而抛弃 $\rho(x)$ = 常数的要求. 这样便能对每一基模找到对应的高阶模的强度分布. 只考虑轴点光束

$$\theta = x/R. \tag{5.1}$$

将 (5.1) 和 (2.1) 式代入 (3.3) 式得

$$\gamma\left(A + \frac{B}{R}\right) = \frac{\rho(x)}{\rho\left(Ax + \frac{B}{R}x\right)}. \tag{5.2}$$

注意到要求 $\rho(x) \geqslant 0$, 上式解出

$$\rho(x) = Kx^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5.3}$$

$$\gamma_n = (A + B/R)^{-(2n+1)} = \lambda^{-(2n+1)}, \tag{5.4}$$

其中 K 为任意正实常数，而 λ 为对应的基模本征值.

从 (5.3) 式可见，高阶模的辐射集中在镜的边缘上，为选模提供了方便. (5.3) 和 (5.4) 式与衍射积分方程的几何近似结果相同. 这也说明本文理论的正确性.

感谢谈镐生教授的指导和帮助.

参 考 文 献

[1] Ю. А. Ананьсв *Кванмовая Электроника*, **6**(1971), 3—34.

[2] A. E. Siegman, *Proc. I. E. E. E*, **53** (1965), 277.

[3] 朱如曾，激光，待发表.

[4] Ю. А. Ананьев и др., *ЖЭТФ*, **58** (1970), 786.

[5] 朱如曾、封开印编译，谈镐生审校，激光物理，国防工业出版社，(1975), 162.

用 X 射线荧光光谱薄试样法测定磁泡薄膜的原子比值

程建邦 张文龙

(中国科学院物理研究所)

郝贡章 欧通桃

(冶金工业部有色金属研究院)

1980 年 2 月21日收到

磁泡存贮器作为一种新的计算机存贮器在国内外受到广泛的重视. 对于磁泡材料组份的测定国外多采用电子探针方法[1,2]. 这种材料是用外延法生长在钆镓石榴石基片上的含有多元稀土的薄层. 我们对中国科学院金属研究所王桢枢等同志的纸片薄样法进行了改进，提高了