

高速飞行物体的表现形状

叶 壬 癸

众所周知,由于光速有限,对于某个观测者来说,一个运动的物体由于各个部分同一时刻发出的光,不会同时到达观测者,因而其表现形状与真实形状不一样。这类问题早已有个人个别地讨论过^[1,2]。我们这里以简要方式比较普遍地讨论一下这个问题。

设有两个彼此以相对速度 v 运动的惯性参考系 s 及 s' , s' 相对于 s 以速度 v 向右运动。两个参考系都采用直角坐标架, x 及 x' 轴沿相对速度方向,其他两个坐标轴分别彼此平行。并且设,当两个坐标架的原点 O, O' 重合这个时刻,两个参考系都选为时间的零点。大家知道,这样约定的两个参考系的时、空坐标的变换就是熟知的洛伦兹变换:

$$\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y, \quad z' = (z - vt) / (\sqrt{1 - \beta^2}), \\ t' &= \left(t - z \frac{v}{c^2} \right) / (\sqrt{1 - \beta^2}), \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\beta = \frac{v}{c}$ 。

设在 s' 系中有一静止的物体 B。对于 s 系而言,此物体以速度 v 向右运动。我们要讨论的问题是:当静止在 s 系中 O 处的观测者看到固定在 B 上的 Q' 点落在矢径 r_0 末端时,物体 B 看起来是什么样子?

让我们在 B 上任取一点 P' , 假设 P' 与 Q' 的相对位置由常矢量 a 联系着。当 Q' 位于 r_0 处时, P' 本该在 r 处(如图示)。不过,由于光总是以有限速度 c 传播,当 Q' 在 r_0 处所发的光到达 O 时,一般说来, P' 在 r 处所发的光并不同时到达。因此,当 O 看到 Q' 在 r_0 处时,一般说来未能看到 P' 位于它“本该出现”的位置 r 处。正是由于这个原因,从 O 看起来, B 变形了。因

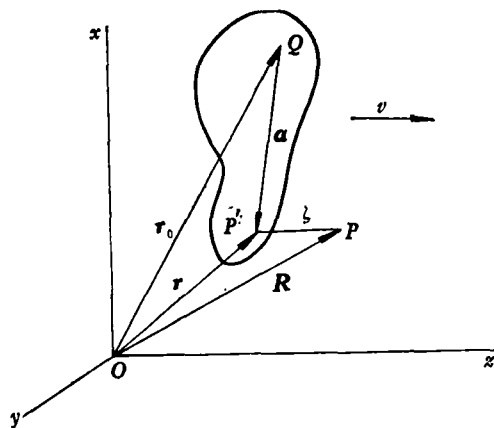


图 1

为同一时刻 O 看到的光是 B 上各点于不同时刻发出的。

我们可以设想,当 Q' 在 r_0 处所发的光到达 O 时, P' 点的表现位置应当在矢径 r 末端的左侧或右侧的某个 P 点, P 点与 r 末端的坐标只能是 z 值有所不同(设相差 ζ), x, y 坐标却总是相同的,因为 P' 的运动速度与 z 轴平行。让我们设 P 点的矢径为 R , 根据光速不变且 P' 跑到 P 处所发的光要与 Q' 在 r_0 处所发的同时到达 O 的条件,可得

$$\zeta/v + R/c = r_0/c, \quad (2)$$

式中 ζ 是 P' 点的表现位置 R 与“本该出现”的位置 r 的距离。为了明确起见,我们以大于零的 ζ 表示 P 点在 r 末端的右侧,这相应于 $r < r_0$ 的情况。

设矢径 r 的三个分量为 x, y, z , 则 R 的三个分量为 $x, y, z + \zeta$, 因而(2)式变为

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \zeta)^2} / c = r_0/c - \zeta/v,$$

令 $\rho^2 = x^2 + y^2$, 整理后得

$$\zeta^2(1-\beta^2) - 2\zeta(r_0\beta + \beta^2z) - \beta^2\rho^2 - \beta^2z^2 = \beta^2r_0^2. \quad (3)$$

可见, P' 点的表观位移 ζ 与 ρ, β, r_0, z 都有关系, 相当复杂. 不过, 我们可以暂时把 z 看成常数, 这相当于考虑“本该出现”位置落在 $z =$ 常数的平面上的所有 P' 点的表观位移. 把 z 看成常数后, (3) 式可整理成

$$\left[\zeta - \frac{r_0\beta + \beta^2z}{1-\beta^2} \right]^2 / \left[\frac{\beta(\beta r_0 + z)}{1-\beta^2} \right]^2 - \rho^2 / \left(\frac{\beta r_0 + z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = 1.$$

让我们令

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta(\beta r_0 + z)/(1-\beta^2), \\ b &= (\beta r_0 + z)/\sqrt{1-\beta^2}, \\ w &= \zeta - [\beta(r_0 + \beta z)/(1-\beta^2)] \end{aligned} \right\} (4)$$

或

$$\zeta - w = \beta(r_0 + \beta z)/(1-\beta^2),$$

则上式变为

$$w^2/a^2 - \rho^2/b^2 = 1. \quad (5)$$

(5) 式是在 w, ρ 平面上, 中心位于 $w = 0, \rho = 0$ 的双曲线. 根据 w 与 ρ 的定义可知, w 轴与 z 轴重合, 并且由于 $\rho^2 = x^2 + y^2$, (5) 式表示的事实上是以 w 轴或 z 轴为对称轴的旋转双曲面 (当 $r_0 = z = 0$ 时, 这个旋转双曲面退化成圆锥面. 这就是说, 当 O, O' 重合时, s' 系中 $x'O'y'$ 平面从 O 看起来成为顶点在 O 的圆锥面). 由于我们所讨论的运动物体, 是自左向右运动的, 很易明白, (5) 式所表示的双曲面, 只是左侧一叶才是当 O 看到 Q' 在 r_0 处时, 物体 B 上 $z =$ 常数的平面所形成的表观曲面.

作为例子, 让我们讨论一个正在头顶上自西向东高速飞行的立方体的表观形状. 我们让这个立方体固定在 s' 系中, 边长都是 1, 各边分别与坐标轴平行. 当 s 系的观测者 O 看到立方体底面中心正在自己头顶上相距为 r_0 处时, 立方体东、西两个端面“本该出现”的位置分别落在 $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}$ 的平面上, 因为东西方向的长度缩小了 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍. 根据 (4) 式 (设 $\beta = 0.866, r_0 = 1$) 可得立方体西侧端面对应的

$$a = 2.134, b = 1.232, \zeta - w = 2.714.$$

东侧端面

$$a = 3.866, b = 2.232, \zeta - w = 4.214.$$

据此, 可按 (5) 式画出立方体东、西两端面的表观形状, 它们分别为图中 AB 及 CD 绕 z 轴旋转所得的曲面的一部分 (从 $x=1$ 到 $x=2$ 及 $y = -1/2$ 到 $y = +1/2$ 之间的部分). 由于

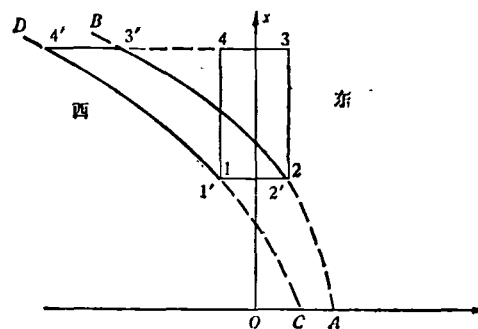


图 2

立方体其他四个侧面都在自身平面里运动, 这些侧面各点的表观位置总在自身平面里. 所以, 当 O 看到上述立方体的底面中点正在头顶上时, 这个物体表观形状就是端面为旋转双曲面的四棱柱. 其东、西两端面在 zOx 平面上的截线分别如图中 $2', 3'$ 及 $1', 4'$ 两曲线. 就是说, 由于洛伦兹收缩, 立方体在 zOx 平面上的截面“本应”是矩形 $1, 2, 3, 4$, 但由于光速有限, 其表观形状变为 $1', 2', 3', 4'$. 其中 $3', 4'$ 与 $3, 4$ 一样高, $2', 1'$ 也与 $2, 1$ 一样高 ($1', 2'$ 分别在 $1, 2$ 左侧 0.034 及 0.023 处, 图上无法显示出来). 总之, 这个立方体看起来就如各部分分别受到拉伸或扭曲, 因而出现复杂形状. 有趣的是, 当 O 看到立方体底面中点正在头顶上时, 立方体的西侧端面清晰可见, 只不过被扭成旋转双曲面的一部分, 形象受到严重歪曲.

上面立方体的例子, 如果让 $r_0 \gg 1$, 则 $a \gg 1, b \gg 1, (\zeta - w) \gg 1$, 但

$$a/b = \beta/\sqrt{1-\beta^2}.$$

在这情况下, 立方体东、西两端面趋于平面且彼此互相平行, 但不与 z 轴垂直. 它们的法线与 z 轴的交角 α 为

$$\alpha = \text{tg}^{-1} b/a,$$

或

$$\cos \alpha = v/c.$$

这个现象就是 Terrell 在 1959 年的文章中所指出的所谓表观旋转现象。Terrell 所得结果只是我们这里的一个特例。事实上,即使在 Terrell 的特定条件下,东、西两端面虽然转过 α 角,但其余四个侧面并没有旋转。因此立方体不是出现旋转而是出现切变。就像上、下底分别加一对切向力而产生的切变。当 r_0 不是远大于立方体的边长时,如上面所讨论的那样,表观形变很复杂,就好象不同部分受到不同的拉伸、压缩和扭曲。

(5)式及(4)式是解答高速运动物体在各个时刻表观形状的关键式子。原则上任何物体都可分割为 $z = \text{常数}$ 的薄片,这些薄片边界都有明确的 x, y 值,每个薄片的表现形状都是曲面(5)的一部分,其边界的 x, y 值保持不变。这样就可勾画出整个物体的表现形状。

当然,当运动物体具有球对称时,采用球极坐标更方便。例如对于高速飞行的球,可以利用球极坐标很方便地得出一个重要而又简单的关于运动的球的表现形状的结论。现论证如下:

(1) 设 s, s' 系的 z, z' 轴作为球极坐标架 $\theta = 0$ 及 $\theta' = 0$ 的准线。规定 φ 或 φ' 分别从各自的 x 或 x' 轴起算(右手系统)。这样, s' 相对于 s 的速度就沿 $\theta = 0$ 方向。

(2) 在球极坐标中,顶点在原点,对称轴沿半直线 $\theta = 0$ 的圆锥面方程可写为

$$\cos \theta = \lambda, \quad (6)$$

式中 λ 为该圆锥面的半顶角 α 的余弦,即 $\cos \alpha = \lambda$ 。

(3) 当圆锥面的对称轴不是 $\theta = 0$, 而是 $\theta = \delta, \varphi = 0$ 的半直线时,方程(6)就要进行变换。这相当于让(6)式的圆锥面不动,但坐标架绕 y 轴向相反方向转过 δ 角,即让原来坐标架中 $\theta = \delta, \varphi = \pi$ 的半直线作为新坐标架 $\theta = 0$ 的准线。根据坐标架变换时方程式中各量的相应变换规律,(6)式应变换为

$$\cos \delta \cos \theta + \sin \delta \sin \theta \cos \varphi = \lambda,$$

物理

或

$$a \cos \theta + b \sin \theta \cos \varphi = \lambda, \quad (7)$$

其中 $a^2 + b^2 = 1$ 。(7)式就是以 $\theta = \delta, \varphi = 0$, 半直线为轴,顶点在原点的圆锥面方程,其半顶角 $\alpha = \cos^{-1} \lambda$ 。

(4) 一个在 s' 系中静止的球,从 s' 系原点 O' 看起来,其边缘部分射来的光线分布在一个圆锥面上,不妨称它为“光线圆锥面”。这个圆锥面可用类似(7)式的方程

$$a' \cos \theta' + b' \sin \theta' \cos \varphi' = \lambda' \quad (8)$$

来描述,其中 $a'^2 + b'^2 = 1$ 。至于 $\lambda' = \cos \alpha'$ 的具体数值,则由这个球的大小及球心到 O' 的距离而定。(8)式中各量加撇号无非是强调它们是 s' 系所观测的量而已。

(5) 当 s 系中 O 与 O' 重合时,从观测者 O 看起来,由于光行差的缘故,(8)式的光线圆锥面必须变换为

$$a' \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} + b' \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} \cos \varphi = \lambda'. \quad (9)$$

这是因为光行差现象要求 $\cos \theta', \sin \theta'$ 与 $\cos \theta, \sin \theta$ 的变换关系为

$$\cos \theta' = (\cos \theta + \beta) / (1 + \beta \cos \theta),$$

$$\sin \theta' = (\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}) / (1 + \beta \cos \theta),$$

并且 $\cos \varphi' = \cos \varphi$ 。这里 $\cos \theta'$ 与 $\sin \theta'$ 的变换式子很容易在一般狭义相对论书中找到,不过要注意,我们考虑的光线是射向 O' 而不是从 O' 发出。至于 $\cos \varphi' = \cos \varphi$, 也很容易从洛伦兹变换(1)推出:按 $x' = x$ 可得

$$r' \sin \theta' \cos \varphi' = r \sin \theta \cos \varphi.$$

同样根据洛伦兹变换可知,在我们这里

$$r' = r(1 + \beta \cos \theta) / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

再利用上面已有过的 $\sin \theta'$ 的变换式就可得

$$\cos \varphi' = \cos \varphi.$$

1) 设在 s' 系中,光源距 O' 为 r' , 则于 O, O' 重合时到达原点的光,其发光时刻为 $t' = -r'/c$ 。据

$$z = (x' + vt') / \sqrt{1 - \beta^2}, \text{ 得}$$

$$r \cos \theta = (r' \cos \theta' - \beta r') / \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\text{稍加整理后就得 } r' = r(1 + \beta \cos \theta) / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

有了(9)式,只要整理一下就成为

$$(a' - \lambda'\beta)\cos\theta + b'\sqrt{1 - \beta^2}\sin\theta\cos\varphi = \lambda' - a'\beta, \quad (10)$$

让我们令

$$ka = k\cos\delta = a' - \lambda'\beta, \\ kb = k\sin\delta = b'\sqrt{1 - \beta^2},$$

就可解得

$$k = \pm(a'^2 + \lambda'^2\beta^2 - 2a'\lambda'\beta + b'^2 - b'^2\beta^2)^{1/2} \\ = \pm[1 - 2a'\lambda'\beta + \beta^2(\lambda'^2 - b'^2)]^{1/2}.$$

这样(10)式就可写为

$$a\cos\theta + b\sin\theta\cos\varphi = (\lambda' - a'\beta)/k \triangleq \lambda, \quad (11)$$

其中 $a^2 + b^2 = 1$. 由于 $\beta = 0$ 时, O, O' 无区别, $\lambda = \lambda'$. 所以 k 只能取正根.

(11)与(7)形式相同,因此它也是描述了 O 看到的一个“光线圆锥面”. 只不过圆锥的半顶角变了,成为

$$\alpha = \cos^{-1}\lambda = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda' - a'\beta}{k}\right) \neq \cos^{-1}\lambda'.$$

圆锥的对称轴方向也变了,因为决定对称轴方位的 a, b 与 a', b' 不同.

可见,基于洛伦兹变换的光行差现象,对光线方向的变换是一种“保光线圆锥面”的变换,简称为保锥变换. 这表明,一个运动的球,看起来它的边缘界线或轮廓依然是圆的,但视角的一半 $\alpha = \cos^{-1}\lambda$ 与这个球静止时不同,球所在的方位也不同.

必须指出,保锥变换只保证顶点在观测者所在地的位于一个圆锥面上的光线经变换后仍在同一个圆锥面上,但沿圆锥轴线的光线变换后一般说来可就不仍在圆锥轴上. 这可以从 $\cos\delta$ 与 $\cos\delta'$ 的关系 $a = (a' - \lambda'\beta)/k$ 不同于光线方向的变换公式 $\cos\theta = (\cos\theta' - \beta)/(1 - \beta\cos\theta')$ 看出来,并且,原来分别通过圆锥横截面上某直径两端的两条光线,变换后也未必分别通过横截面上某直径的两端. 保锥变换只保证相邻光线变换后仍为相邻光线,但不保证“相对”光线(分别通过圆锥横截面直径两端的光线)变换后仍为“相对”光线.

作为例子,可以算出一个球心在 $y' = z' = 0, x' = 2$, 半径为 1 的球,自 O' 看起来,视角为 60° . 当 O 与 O' 重合时,自 O 看起来,在 $\beta = 0.866$ 条件下,这个高速运动的球的轮廓仍为圆形,但视角只剩下 $32^\circ 16'$ 左右. 不过,要是 O 有立体视觉的话,他会看到,这个物体的边缘事实上是一个位于 $x=1.5$ 平面里的椭圆,其长轴的两个端点落在 $z = -1.268$ 及 $z = -4.732$ 处. 只不过从这个椭圆上各点射来的光,分布在一个半顶角为 $\frac{1}{2}(32^\circ 16')$ 的圆锥面上,所以轮廓仍保持圆形.

还有一个很值得讨论的问题:设想在 s' 系中均匀地分布着一些静止的发光粒子,我们来讨论,从高速飞行的 s 系看起来,这些粒子的分布将是什么样子?

我们上面说过,当两个参考系原点重合时,对于同一光源与原点的距离 r 与 r' , 存在着关系式

$$r' = r(1 + \beta\cos\theta)/\sqrt{1 - \beta^2},$$

或

$$r = (r'\sqrt{1 - \beta^2})/(1 + \beta\cos\theta). \quad (12)$$

对于 $r' = \text{常数}$ 的球面来说,由(12)式可知,从 s 系的观测者 O 看起来,这样的球面成为旋转椭球面,对称轴就是 $\theta = 0$ 与 $\theta = \pi$. 这只要把(12)式变回直角坐标就一目了然. 它变为

$$\rho^2/a^2 + w^2/b^2 = 1, \quad (13)$$

其中

$$a = r', \quad b = r'/\sqrt{1 - \beta^2},$$

$$w = z + \beta r'/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (14)$$

下面图中画出了 $r' = 1$ 及 $r' = 2$ 两个球面所变换成的旋转椭球(设 $\beta = 0.866$). 当然,这种图只画出了球面或旋转椭球面被某个包含 x 轴或 w 轴的平面所截的曲线.

从(13)式或图都清楚表明,位于 s' 系中 $r' = 1$ 及 $r' = 2$ 这两个球面上的发光体,从 s 系中位于 O 的观测者看起来,分别分布在两个不同的旋转椭球面上. 可以设想,如果把 s' 系中均匀分布着粒子的空间分割为许多厚度均匀

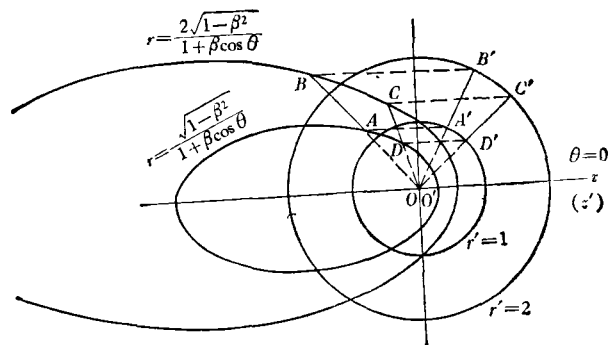


图 3

的很薄的同心球壳，则每个球壳从 s 系看起来都是一个旋转椭球壳，这些椭球壳厚度可就不均匀了。沿 s 系运动方向正前方变厚了，而后方变薄了。从(12)式可知，在 $\theta = 0$ 方向，

$$r/r' = (\sqrt{1-\beta^2})/(1+\beta) < 1,$$

在 $\theta = \pi$ 方向，

$$r/r' = (\sqrt{1-\beta^2})/(1-\beta) > 1,$$

在 $\theta = \pi/2$ 方向，

$$r/r' = \sqrt{1-\beta^2} < 1.$$

等等。总之，正前方的粒子变远而且变稀，后方

粒子变近而且密。就好像一侧受到压挤而另一侧受到拉伸，压缩比与 β, θ 有关，

$$r/r' = (\sqrt{1-\beta^2})/(1+\beta\cos\theta).$$

作为例子，我们在图中画出了 s' 系中 $A'B'C'D'$ 这个周界变成了 s 系中的 $ABCD$ 。请注意，径向直线 $A'B', C'D'$ 变换后仍为直线，各点和 z 轴的距离也保持不变。

参 考 文 献

- [1] Terrell, J. *Phys. Rev.*, **116** (1959), 1041.
- [2] V. F. Weisskopf, *Phys. Tod.*, **13** (1960), 24.

热致液晶分子结构和物理性质

王 良 御
(清 华 大 学)

液晶的物理参数是液晶分子宏观整体性质的反映，它和液晶分子结构密切相关。到目前为止，已合成出数千种液晶化合物，对其物理参数积累了相当数量的数据，如测定了许多液晶的介电常数、折光指数、粘度、弹性常数、有序参数等物理量。另一方面又经 X 射线衍射、红外、紫外、核磁共振波谱等手段的研究，确定了液晶分子结构。于是，逐步揭示出液晶的分子结构和物理性质之间的内在联系，从而为合成新型液晶材料，研究液晶结构指明了方向。本

物理

文从液晶分子化学结构特征，说明液晶分子结构对液晶物理性质的影响。

一、液晶分子结构和介电各向异性

液晶介电各向异性特征是决定液晶分子在电场中行为的主要参数。Meier 等人^[1]将 Onsager 对各向同性液体介电性质的公式推广应用于各向异性的液晶物质。从分子极化度 α ，分子中所含偶极矩的大小以及它和分子长轴夹角