的深入研究是很有意义的.

参 考 文 献

[1] N F. Ramsey, *Phys. Rev.*, **103**(1956), 20.
[2] C. E. Hecht, *Phys. Rev*, **119**(1960), 1443.
[3] V. Vyšin, *Phys. Lett.*, **7**(1963), 120.
[4] 严子浚，物理学报，**21**(1965)，630.
[5] R. J. Tykodi, *Am. J. Phys.*, **43**(1975), 271.
[6] A-M. Tremblay, *Am. J. Phys.*, **44**(1976), 994.
[7] A. Danielian, *Am. J. Phys.* **44**(1976), 995.
[8] R. H. White, *Am. J. Phys.*, **44**(1976), 996
[9] R. J. Tykodi, *Am. J. Phys.*, **44**(1976). 997.
[10] P. T. Landsberg, *J. Phys. A*, **10**(1977), 1773.
[11] Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹，统计物理学，杨训恺等译，人民教育出版社，(1964)，270.

一个描写机械运动的新概念——急动度

黄 沛 天

(江 西 师 范 学 院)

一、牛顿力学留下的小空白

人们为了描写机械运动，引入了位移、速度、加速度等概念，同时还引入了质量、动量、相互作用力、力的冲量、惯性等概念. 由此概括出牛顿三定律，并成为描写机械运动的理论基础.

尔后，人们形成了讨论机械运动的某种模式：根据牛顿定律列出运动微分方程，并由初始条件求出它的特定解. 众所周知，这种方程是对时间的二阶微分方程. 定解初始条件一般是两个：初始位移和初始速度.

对于恒力作用下的运动情况，讨论比较简单. 如果是变力情况，而且力的变化与位移或速度有显函数关系(比如，弹力 $F=-kx$，某种阻力 $f=-\beta v$)，由牛顿运动微分方程，加上两个初始条件仍可求解. 如果力的变化不具有上述性质，而仅知道物体所受力随时间的变化率为 $d\boldsymbol{F}/dt=\boldsymbol{C}$(一般地说，$\boldsymbol{C}$ 可能是 t, x, v 以至加速度 a 的函数，也可以是不为零的常矢量)，已知初始位移和初始速度，能否求出方程的特定解呢？显然是求不出的. 因此，难以用对时间的二阶微分方程加两个初始条件求解一般变力情况下的机械运动问题.

自然界中的各种动力学过程，严格说来都是变力过程. 而对于一般的变力过程(特殊的变力过程除外)的讨论，由于实际意义往往不甚明显，可以说人们是故意暂时在牛顿力学中留下这一个小空白.

二、$\boldsymbol{j}$ 矢量的引入

1978 年 11 月号的《美国物理杂志》上，一位数学工作者 S. H. Schot[1] 发表了题为《急动度1)：加速度的时间变率》的文章，这篇文章的第一部分首先指出，在凸轮和星形轮等间歇运动机械的设计中，在铁路、公路的过渡轨道曲线的设计中，位移对时间的三阶导数——急动度概念得到了应用[2-5]，文章接着对这个概念的形成和理解作了简略的历史回顾：最早考虑力学中路程对时间的三阶导数的是法国的几何学家 A. Transon[6]，但是对这个三阶导数明确的物理意义的讨论却是 1928 年以后的事. 当时，P. Melchior 指出[7]，急动度的明确定义是“加速度对时间的导数”，并且认为加速度的变化快慢，会引起人们舒适感的不同. 1959 年以后，急动度概念开始在力学专著中出现[8,9]. 急动度显然也是矢量，并且用符号 $\boldsymbol{j}$ 表示. 因此，文章的第二部分和第三部分对平面运动的 $\boldsymbol{j}$ 分别讨

1) 原文 jerk，意为急拉或急推，本文试译为“急动度”.

论了两种表示形式:

一种是切向分量、法向分量表示法，对加速度 $\boldsymbol{a}(t)=\dot{v}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$ 求导可得

$$\boldsymbol{j}(t)=\left(\ddot{v}-\frac{v^3}{\rho^2}\right)\boldsymbol{t}+\frac{v}{\rho}\left[3\dot{v}-\left(\frac{v}{\rho}\right)\dot{\rho}\right]\boldsymbol{n}, \tag{1a}$$

或化为

$$\boldsymbol{j}(t)=\left(\ddot{v}-\frac{v^3}{\rho^2}\right)\boldsymbol{t}+\frac{1}{v}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{\rho}\right)\right]\boldsymbol{n}, \tag{1b}$$

这里 v, ρ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ 分别为速率、轨道曲率半径、单位切向矢量、单位法向矢量，字母上面的点表示对时间的微商. 对 $\boldsymbol{j}$ 的这种表示形式，文章从几何学的角度讨论得比较详细. 引入了一个仿射微分不变量——越轨率 (aberrancy)，并由此讨论了 $\boldsymbol{j}$ 的一些几何特性.

$\boldsymbol{j}$ 的另一种表示法是径向分量、横向分量表示法，对加速度 $\boldsymbol{a}(t)=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$ 求导可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(t)=&(\dddot{r}-3\dot{r}\dot{\theta}^2-3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_r\\&+(3\ddot{r}\dot{\theta}+3\dot{r}\ddot{\theta}+r\dddot{\theta}-r\dot{\theta}^3)\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned} \tag{2}$$

这里 r, θ, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ 分别表矢径、矢径与极轴的夹角、单位径向矢量和单位横向矢量. 文章最后举了几个典型例子来说明在不同运动中 $\boldsymbol{j}$ 的变化情况. 这里仅把对单摆振动得到的结果摘录于下: 运动微分方程为

$$\ddot{\theta}+(g/l)\sin\theta=0 \quad (-90^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}=-(2g\cos\theta)\boldsymbol{e}_r-(g\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}=&[3(2g^3/l)^{1/2}\cos^{1/2}\theta\sin\theta]\boldsymbol{e}_r\\&-[3(2g^3/l)^{1/2}\cos^{3/2}\theta]\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned} \tag{5}$$

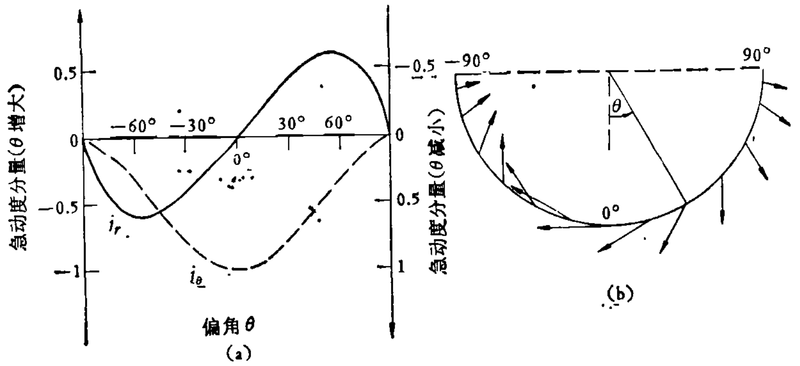

图 1 摆在 ±90° 间摆动

(a) 急动度的分量; (b) 急动度矢量 (θ 增大)

图 1 (a) 中，急动度矢量的径向和横向分量在归一化形式下(即 $3g\sqrt{2g/l}=1$) 被分别描绘为角偏移的函数. 从图中可以看到，急动度的两个分量在最大偏移 ($\theta=\pm 90^\circ$) 时等于零，在摆动正通过中点时(即 $\theta=0$)，径向分量改变符号. 急动度的横向分量只是在 $\theta=0$ 时有一个极小值，而径向分量在

$$\theta=\arccos(\sqrt{3}/3)=\pm 54.74^\circ$$

时分别有极值. 实际的急动度矢量如图 1(b)所示，图 1(b) 是对半个周期并且当 θ 增大时的描绘，对 θ 减小的半个周期得到的急动度矢量，图 1(b) 只需左右反转.

在 V. M. Faires 编著的《运动学》[Kinematics (McGraw-Hill, New York, 1959)] 一书中，急动度概念的意义及其应用得到足够的重视和描述. 该书在第一章中就把急动度与速度、加速度概念放在并列的位置分别加以介绍，并且指出，从人们对舒适的观点来说，我们对加速度的时间变率 $d\boldsymbol{a}/dt$ 有了很大的注意，这种舒适感正与机械元件 (比如凸轮) 的设计有关. 而描写这种舒适感的差别的概念就叫做急动度 (jerk) 或者叫做冲度 (pulse). 因此，该书明确指出，在凸轮的设计中要对急动度 $\boldsymbol{j}$ 进行有意义的计算. 在以后的章节中作者对许多机械元件也都作了这种计算示范.

总之，人们从社会实践的需要出发，首先在

工程技术中引入了 $\boldsymbol{j}$ 矢量的概念，并且正在逐步引起数学、物理工作者的注意.

三、$\boldsymbol{j}$ 引入之后

$\boldsymbol{j}$ 毕竟是一个纯运动学量，与此相应的动力学描写显然是“力的时间变率”. 尽管目前这方面的问题还讨论得较少，但是从物理学的角度来说，其理论意义并不亚于 $\boldsymbol{j}$. 我们可用前面提到的 $\boldsymbol{C}=\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}=\frac{dm\boldsymbol{a}}{dt}$ 来表示这一新的动力学量. 如果物体的质量不变，则有 $\boldsymbol{C}=m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=m\boldsymbol{j}$.

引入了 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 之后，对机械运动的描写将会进一步出现什么新的问题呢? 这是人们不能不考虑的. 我认为至少有下面一些问题值得认真考虑和讨论.

首先，与之相应的运动微分方程就是三阶的，因而初始条件一般说也必须有三个，即除了初始位移、初始速度之外，还要加上一个初始加速度（当加速度与位移或速度有确定的显函数关系时，初始条件可少于三个）. 这样一来，机械运动状态的确定就不仅仅是位移和速度了.

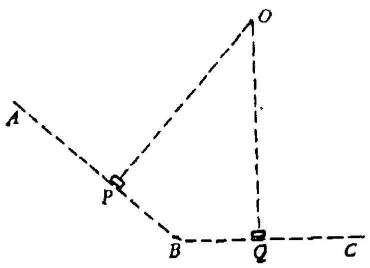

图 2

比如图 2 所示的物体从 P 位置运动到 Q 位置，可以用一细线将它悬挂于 O，摆至 Q 处；也可沿光滑面 ABC（B 处为圆滑过渡）滑至 Q 处. 显然，两种途径到达 Q 处的位移和速度都一样. 按通常的说法，这两种 Q 处的机械运动状态相同. 现在如果把加速度也算作确定状态的参量，那么摆至 Q 处具有向心加速度，而滑至 Q 处加速度为零，因此是两种不同的机械运动状态.

第二，是对惯性的理解. 牛顿定律告诉我们，当合外力为零时，物体将保持原来的静止或匀速直线运动状态，这就是惯性，而质量是惯性的量度. 现在根据 $\boldsymbol{C}=m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$，结合上面关于加速度是状态参量的认识，能否认为，当 $\boldsymbol{C}=0$ 时，物体将保持原来的匀加速直线运动状态（亦包括加速度为零的情况），而这种保持性也是惯性，它的量度仍然是质量 m.

第三，是对相互作用的理解. 既然惯性可以有广义的理解，那么，$\boldsymbol{C}$ 可不可以广义地理解为相互作用? 如果不可，那么物体速度的变化意味着“力”的物理图象的存在，物体加速度的变化意味着一个什么样的物理图象的存在呢? 如果 $\boldsymbol{C}$ 可以理解为相互作用量，那么 $\boldsymbol{C}$ 相互作用与力相互作用又有哪些区别? 从机械运动的效果来说，力的效果是使物体运动速度改变，而 $\boldsymbol{C}$ 的效果是使物体运动的加速度改变. 从人的生理感觉来说，人受很大力作用与受很大的 $\boldsymbol{C}$ 作用时都有不适之感，这两种不适之感的区别何在? 是否还可以找出力作用和 $\boldsymbol{C}$ 作用的其他明显差异?! 另外，从 $\boldsymbol{K}=m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$, $\boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, $\boldsymbol{C}=m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ 的对称形式，能否得到什么新的启示，第一式中的 $\boldsymbol{K}$ 是否也可以作为一种相互作用量来理解?! 一句话，仅把机械相互作用理解为唯一的“力的作用”是否是一种粗糙的先入之见.

第四，从选择用 jerk 一词来表示加速度的时间变率可知，人们开始就是对物体在短时间内有大的加速度变化的情况人手进行研究的，因此是否可以用它来精确建立“碰撞”等瞬时过程的定量描写的理论呢?

当然，问题还可以列出一些，这里就不一一枚举.

四、结束语

总而言之，从一辆汽车由静止开始：用小油

门起动，到逐渐加大油门行驶，到最后关闭油门，停止运动，或者从其他任一实际的运动来说，都存在着变加速运动的问题．因此，要更准确、细致地描写机械运动就少不了要引入 j 这一物理量．当然，一般地说，j 也是变的，也就是说，原则上还可以引入比 j 更高阶的位移对时间的高阶导数．但是一个新物理量的引入主要是在于它有无实际意义，而并不在于描写它的数学符号的早已存在．j 之所以被引入正说明了这一点，至于今后人们对 j 的兴趣的增减，当然也主要取决于它能解决多少实际问题．不过，作为基础理论工作者也应该关心这类问题的进展．

参考文献

[1] S. H. Schot, *Am. J Phys.*, 46(1978), 1090.

[2] F. Freudenstein and G. N. Sandor, Mechanical Design and Systems Handbook, Ed. by H. A. Rothbart, McGraw-Hill, New York, (1964). Sec. 4, 13.

[3] V. M. Faires, Design of Machine Elements, (1965, 4th ed.), Macmillan, New York, 528.

[4] J. H. Bickford, Mechanisms for Intermittent Motion, (1972), Industrial, New York, 24.

[5] F. G. Royal-Dawson, Elements of Curve Design for Road, Railway, and Racing Track on Natural Transition Principles, (1932), Spon, London.

[6] A. Transon, *J. Math. Pures. Appl.*, **10**(1845), 320.

[7] P. Melchior, *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, **72**(1928), 1842.

[8] V. M. Faires, Kinematics, McGraw-Hill, New York, (1959), 9.

[9] J. P. DenHartog, Mechanics, Dover, New York, (1961), 161.

快速分子离子束技术的发展动态

毛 孝 田

（复 旦 大 学）

随着天体物理、等离子体物理和固体物理等学科的发展，对分子离子的研究日益引起人们的重视．近年来，由于现代加速器的技术成就，人们在研究中广泛采用了各种束流技术，其中包括新发展起来的快速分子离子束技术．这一技术是采用快速分子离子（离子速度一般可达 10^8厘米/秒）轰击箔靶，由箔靶诱导分子离子离解，通过研究离解后所产生的碎片，来了解分子离子与物质相互作用的新现象．在不少情况下可得到以前不知道的有关分子离子结构的新知识．因为这一技术具有直观、计算简便、适用范围广等优点，且具有某种几何放大作用，所以国外开展这方面研究的加速器逐渐增多，也取得了一些重要成果．现就这方面的发展情况作一概略介绍．

一、基 本 原 理

到目前为止，快速分子离子束技术所研究的分子离子主要是 $^4HeH^+$，$^3HeH^+$，H_2^+，H_3^+，OH^+，CO_2^+，N_2O^+ 等．这些分子离子一般由双等离子体离子源产生．双等离子体离子源的特点是在电离区中存在着强烈的磁约束．如将氢气和氦气通入离子源的电离区，使之电离，由于磁约束存在，在电离区内可形成 $^4HeH^+$，H_2^+，H_3^+ 等各种分子离子．由引出电极可得到包含多种分子离子的束流．该离子束首先经过能量为几个 MeV 的静电加速器加速，然后由磁分析器选择所需的分子离子束，再经过严格准直，打到厚度为 100 Å 左右的固体薄靶上．以后的