



# 似 几 何 光 学

王大凯

(西北大学物理系)

## 一、引 言

众所周知，基于光线概念的几何光学基本定律是人类最古老的科学知识的一部分。到十九世纪末，光的电磁理论为波动学说奠定了牢固的基础之后，如何把几何光学与波动光学统一起来就成为是一个很自然的问题。在这方面，至今仍广为采用的方法是在麦克斯韦(Maxwell)方程组中令  $\lambda \rightarrow 0$  导出几何光学的基本方程式——程函方程<sup>[1]</sup>。但这种方法至少在以下两个方面显得不能令人满意：一是由于它过远地离开了物理背景，致使某些概念的引入变得难于理解，例如在成象理论中定义的几种哈密顿(Hamilton)特征函数就属于这类情况；二是由于从开始就令  $\lambda \rightarrow 0$ ，所以它不能明确回答这样一个问题，即这种极限理论对于我们通常的光学问题所处理的波长 ( $10^{-5}\text{cm}$  量级) 究竟在怎样的范围内近似成立。诚然，前一个问题是从教育学的角度来考虑的，而后一个问题则不论从理论上或是从实践上看都是非常重要的。

1967年 A. Walther 在他的一篇文章<sup>[2]</sup>中指出，在成象系统中应用稳相法(Method of Stationary Phase)对德拜(Debye)积分作近似计算，可以完成从波动光学向几何光学的过渡。此后把类似的处理光学问题的方法称为似几何光学(Parageometrical Optics)。下面将可看出，它相当好地克服了传统方法的不足之处。

概括起来说，似几何光学归结为三个步骤：  
(1) 对于给定的光学问题，按照波动光学求得积分形式的解；(2) 用稳相法对此积分作近似

计算；(3) 讨论近似解成立的条件。由此可见，从实质上说它是波动光学的一种近似。但从结果上看，它更接近于几何光学。这也就是取名为似几何光学的原因。

## 二、稳相法简述

稳相法作为一种数学方法很早已经存在。这里的讨论仅着重于基本概念的阐述而不致力于严密的数学推导。进一步的论述可参考文献[1]的附录 III。

大家知道，利用复变函数理论中的留数定理可以证明<sup>[3]</sup>：

$$\int e^{iAx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{|A|}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \quad A > 0 \text{ 取正号}; \quad (1)$$

$$A < 0 \text{ 取负号}.$$

由此式可得到著名的菲涅耳(Fresnel)积分

$$\int \sin(\pi x^2) dx = \int \cos(\pi x^2) dx = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

如果用曲线将上式的被积函数表示出来(图1)，

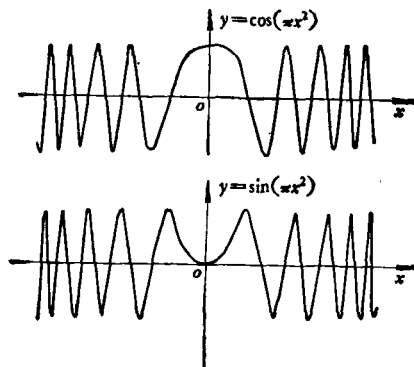


图 1

1) 不注明积分限表示  $(-\infty, +\infty)$ , 下同。

我们就可以清楚地看到,  $x$  离开坐标原点愈远, 曲线愈趋于密集的振动. 因此, 除原点附近之外, 曲线的正值所包围的面积与负值所包围的面积几乎完全抵消, 这就是说, 对 (1) 式积分的贡献主要来自原点附近的一个邻域  $2\delta(x)$ , 其大小由相位从零变化到  $\pm\pi$  确定, 即

$$A(\delta x)^2 = \pm\pi \quad \text{或} \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{\pi}{|A|}}. \quad (2)$$

据此我们可以断言, 积分

$$I = \int_{x_1}^{x_2} e^{iAx^2} dx \quad (3)$$

的值可以分为以下三种情况来估算:

(1) 如果  $2\delta(x)$  的范围全部落入积分限  $(x_1, x_2)$  之内, 则

$$I \approx \sqrt{\frac{\pm i\pi}{|A|}}, \quad A > 0 \text{ 取正号}; \quad (4)$$

$$A < 0 \text{ 取负号}.$$

(2) 如果  $2\delta(x)$  的范围全部落入  $(x_1, x_2)$  之外, 则

$$I \approx 0.$$

(3) 如果  $2\delta(x)$  的范围部分在  $(x_1, x_2)$  之内, 部分在  $(x_1, x_2)$  之外, 则没有简单的近似结果.

在光学问题中经常遇到如下形式的积分:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} p(x) e^{ikf(x)} dx,$$

式中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$\lambda$  为波长. 现假定  $f(x)$  存在唯一的极值点  $x_0$ , 即

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0,$$

则可将  $f(x)$  在  $x_0$  附近展开成幂级数至二次项的表达式, 写为

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

于是

$$I \approx e^{ikf(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} p(x) e^{ik \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2} dx.$$

此式被积函数指数部分的相位变化最慢的区域是  $x_0$  附近的一个邻域, 其范围可根据 (2) 式求得:

$$\delta(x_0) = \sqrt{\frac{\lambda}{|f''(x_0)|}}. \quad (5)$$

如果再假定函数  $p(x)$  变化足够慢, 以致在上式所确定的范围内,  $p(x)$  可近似地看作常数. 于是被积函数将成为如图 2 所示(只表示出实部)那样的“调幅波”. 根据类似于对积分 (3) 式所作的讨论, 可以预料在第一种情况下积分结果近似为

$$I \approx \sqrt{\frac{\pm i\lambda}{|f''(x_0)|}} p(x_0) e^{ikf(x_0)}; \quad (6)$$

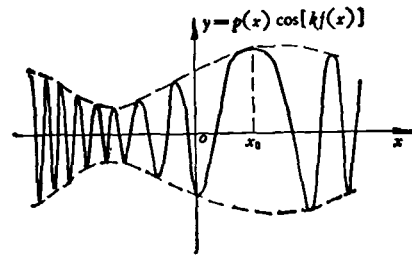


图 2

在第二种情况下应有

$$I \approx 0;$$

而在第三种情况下没有简单的近似结果.

将以上讨论推广到多重积分没有原则上的困难. 以二维情况为例, 计算积分

$$I = \iint e^{i(\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + Cxy)} dx dy, \quad (7)$$

可先对  $x$  积分, 使用一次稳相法得

$$I = \sqrt{\frac{\pm 2\pi i}{|A|}} \int e^{i \frac{AB-C^2}{2A} y^2} dy,$$

然后再对  $y$  积分, 使用稳相法得

$$I = \frac{2\pi i \sigma}{\sqrt{|AB - C^2|}}, \quad (8)$$

式中

$$\sigma = \begin{cases} 1, & AB > C^2, A > 0; \\ -1, & AB > C^2, A < 0; \\ i, & AB < C^2. \end{cases} \quad (9)$$

并且对积分有主要贡献的也是坐标原点附近的一个邻域,

$$\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y) = \frac{\lambda}{\sqrt{|AB - C^2|}}. \quad (10)$$

同样可将此结果用于计算积分

$$I = \iint_M p(x, y) e^{ikf(x, y)} dx dy. \quad (11)$$

结果是,在第一种情况下

$$I \approx \frac{2\pi i \sigma}{\sqrt{|AB - C^2|}} p(x_0, y_0) e^{ikj(x_0, y_0)}, \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{yy}(x_0, y_0), \\ C &= f''_{xy}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (13)$$

$\sigma$  的含义与(9)式相同,  $x_0, y_0$  是稳相点坐标, 即由方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

所确定的解。在第二种情况下, 积分值近似为零。而在第三种情况下, 没有简单的近似结果。在二维情况下的稳相法常被称为鞍点法 (saddle point method)。

### 三、简单光学系统

让我们从最简单的情况——光在自由空间中传播的问题开始。惠更斯 (Huygens)-菲涅耳-基尔霍夫 (Kirchhoff) 衍射公式 (简称 H. F. K.) 给出了这个问题的解:

$$U(x, y, z) = \iint U(x', y', z') \cos \varepsilon \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} dx' dy', \quad (15)$$

式中  $U(x, y, z)$  和  $U(x', y', z')$  分别表示在点  $(x, y, z)$  和  $(x', y', z')$  处光波的复振幅,  $r$  表示此两点之间的距离,  $\varepsilon$  表示矢径  $\mathbf{r}$  与  $z$  轴之间的夹角, 即

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \\ \cos \varepsilon &= \frac{z-z'}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

此式告诉我们, 如果垂直于  $z$  轴的任一平面上的光场分布为已知, 则可计算自由空间中其它任何一点的光波振幅。它是由基尔霍夫利用格林 (Green) 定理于 1882 年首先导出的<sup>[3]</sup>, 1909 年, 德拜又给出了同一问题的另一形式的解<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{1}{\lambda^2} \iint U(x', y', z') dx' dy' \\ &\times \iint e^{ik[\alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma(z-z')]} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $\alpha, \beta, \gamma$  是满足下式的三个参数,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (18)$$

它被称为瑞利 (Rayleigh)-索末菲 (Sommerfeld)-德拜公式 (简称 R. S. D)。这两个公式的等价性可以通过计算积分

$$I = \frac{1}{\lambda^2} \iint e^{ik[\alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma(z-z')]} d\alpha d\beta \quad (19)$$

来得到验证。为此, 令

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \alpha(x-x') + \beta(y-y') \\ &\quad + \gamma(z-z'), \end{aligned}$$

由

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (x-x') + (z-z') \frac{\alpha}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = (y-y') + (z-z') \frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

得稳相点

$$\alpha_0 = \frac{x-x'}{r}; \quad \beta_0 = \frac{y-y'}{r}. \quad (20)$$

在推导上式过程中, 已用到

$$\gamma = \cos \varepsilon$$

以及(16)式和(18)式。将(20)式代入  $f(\alpha, \beta)$ , 得

$$f(\alpha_0, \beta_0) = r.$$

再将(20)式代入下式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -(z-z') \frac{1-\alpha^2}{\gamma^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = -(z-z') \frac{1-\beta^2}{\gamma^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = -(z-z') \frac{\alpha\beta}{\gamma^3},$$

求得(13)式中的  $A, B, C$ , 从而得

$$|AB - C^2| = \frac{r^2}{\cos^2 \varepsilon}, \quad (21)$$

以及考虑到  $\sigma = 1$ , 便可最后求得

$$I = \frac{\cos \varepsilon}{i\lambda r} e^{ikr}. \quad (22)$$

它正是 H. F. K. 中的积分核。

现在让我们来看看这一证明过程所揭示的物理内容。我们知道一个传播方向的方向余弦为  $\alpha, \beta, \gamma$  的单位平面波通过点  $(x, y, z)$  的波前相对于通过点  $(x', y', z')$  的波前相位差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= k[\alpha(x-x') + \beta(y-y') \\ &\quad + \gamma(z-z')], \end{aligned}$$

所以(19)式积分号内实际上是以  $d\alpha d\beta$  为振幅, 以  $\alpha, \beta, r$  为方向余弦, 以  $(x', y', z')$  为参考点的元平面波在  $(x, y, z)$  所形成的复振幅。(19)式的积分就是把所有可能方向的这种元平面波叠加起来。(21)式表明, 这样叠加的结果等于从  $(x', y', z')$  发出的一个球面波对于  $(x, y, z)$  点的贡献 (乘以因子  $\frac{\cos \epsilon}{i\lambda}$ )。而稳相法的证明过程本身就暗示着所有元平面波中贡献最大的是沿着(20)式所确定的那个方向以及与它邻近方向上的那些元平面波。(20)式所确定的方向也就是连接  $(x', y', z')$  点和  $(x, y, z)$  点的直线的方向。显然这条直线也就是几何光学所说的“光线”。将(21)式代入(10)式得

$$\delta(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\lambda \cos \epsilon}{r}. \quad (23)$$

此式表明, 两点之间的距离愈大时, 必须考虑的元平面波方向的范围愈小, 即几何光学的观点愈接近于正确。

如果对光的传播过程施加某种简单的约束, 就构成所谓简单光学系统。下面用两个实例来说明在这些情况下似几何光学的应用。

第一个例子是平面镜的反射。假定在  $S$  点有一点光源, 在  $P$  点观察由反射镜  $M$  所反射的光波 (图 3)。为了数学运算的简化, 按如下方法选取坐标系: 令  $S$  对  $M$  所在平面的垂足为坐标原点, 垂直于此平面的轴定为  $z$  轴; 再将  $P$  点在此平面上的垂足  $Q$  点与坐标原点的连线定为  $x$  轴。在此坐标系中  $S$  的坐标是  $(0, 0, d)$ ;  $P$  的坐标是  $(x, 0, z)$ 。对于  $xoy$  平面上任意一点

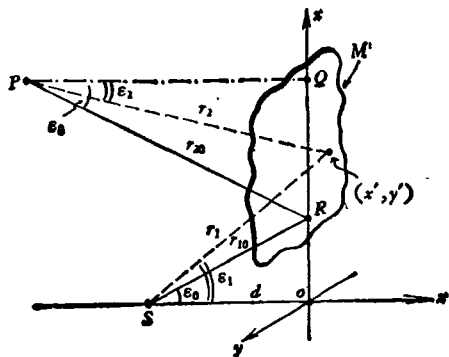


图 3

$(x', y')$ , 应用(15)式并注意到目前是点光源的情况, 得

$$U(x', y', 0) = \frac{\cos \epsilon_1}{i\lambda r_1} e^{ikr_1}, \quad (24)$$

式中

$$r_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d^2}; \quad \cos \epsilon_1 = \frac{d}{r_1}.$$

现在对  $P$  点再次应用(15)式并假定反射系数为 1, 得

$$U(x, 0, z) = -\frac{1}{\lambda^2} \iint_M \frac{\cos \epsilon_1 \cos \epsilon_2}{r_1 r_2} e^{ik(r_1+r_2)} dx' dy', \quad (25)$$

式中

$$r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + z^2}; \quad \cos \epsilon_2 = \frac{z}{r_2},$$

(25)式就是本问题积分形式的解。

为了应用稳相法对此积分作近似计算, 令

$$f(x', y') = r_1 + r_2,$$

由

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{r_1} - \frac{x-x'}{r_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{r_1} + \frac{y'}{r_2} = 0,$$

求得稳相点的坐标为

$$y'_0 = 0, \quad \frac{x'_0}{r_{10}} = \frac{x-x'_0}{r_{20}},$$

式中  $r_{10}$  和  $r_{20}$  分别是  $r_1$  和  $r_2$  在稳相点的值。此式的前半部分说明稳相点处于  $xoz$  平面即光源和观察点向反射镜平面所作的两条垂线所决定的平面内; 上式的后半部分说明

$$\sin \epsilon_1 = \sin \epsilon_2.$$

可见(25)式包含着几何光学反射定律的全部内容, 稳相点就是几何光学所认为的反射点。

为了完成近似计算, 还需求出  $f(x', y')$  的二阶导数, 并将稳相点坐标代入, 得到

$$A = \left( \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{20}} \right) \cos^2 \epsilon_0; \\ B = \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{20}}; \quad C = 0.$$

这样就可得到在第一种情况 (即稳相点的邻域全部落在反射镜之内) 时的近似解:

$$U(x, 0, z) \approx \frac{\cos \epsilon_0}{i(r_{10} + r_{20})\lambda} e^{ik(r_{10}+r_{20})}. \quad (26)$$

此式表明, 在  $P$  点所观察到的光波与从  $(r_{10} +$

$r_{20}$  处的点光源所发出的光波完全相同。这就是说,在第一种情况下,我们在  $P$  点可看到  $S$  的虚象。

当稳相点的邻域全部落在反射镜之外时,

$$U(x, 0, z) \approx 0,$$

这也与几何光学的结论相一致。对于第三种情况,虽然没有简单的近似表达式,但这时我们可以肯定  $P$  点存在一定的反射光,但不能形成清晰的象。

稳相点邻域的大小可由(10)式和(26)式确定,

$$\delta(x'_0, y'_0) = \frac{\lambda r_{10} r_{20}}{(r_{10} + r_{20}) \cos \epsilon_0}. \quad (27)$$

这一面积也就是几何光学反射定律得以成立所必需的最小反射镜面积。

以平面波通过屏缝作为第二个讨论的例子。坐标系的选取如图 4 所示。为了简化数学

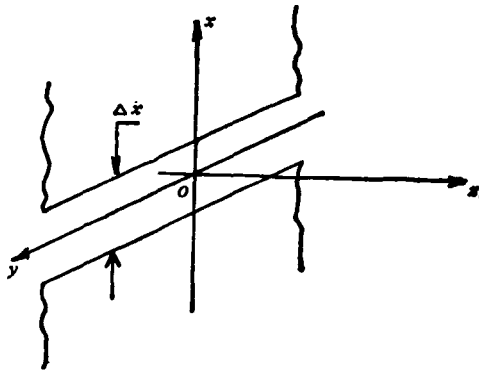


图 4

推导,假定入射波的方向余弦为  $\alpha_0, 0, \gamma_0$ , 这样问题可简化为一维运算。采用基尔霍夫边界条件可写出  $z = 0^+$  平面上的光场分布表达式为

$$U(x', 0^+) = e^{ik_0 x'} \cdot \text{rect}\left(\frac{x'}{\Delta x}\right),$$

式中  $\Delta x$  表示缝宽,  $\text{rect}(\ )$  表示矩形函数,  $x'$  表示在  $z = 0^+$  平面内  $x$  坐标取值。将上式代入(15)式,注意到目前是一维情况,得

$$U(x, z) = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} e^{ik_0 x'} \cos \epsilon \frac{e^{ikr}}{\sqrt{i\lambda r}} dx', \quad (28)$$

式中

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}; \quad \cos \epsilon = \frac{z}{r}.$$

物理

采用与上例类似的步骤,可求出积分(28)式的稳相点方程式

$$\frac{x - x'_0}{r_0} = \alpha_0 = \sin \epsilon_0. \quad (29)$$

式中  $x'_0$  是稳相点坐标,  $r_0$  是  $r$  在稳相点的值,  $\epsilon_0$  是入射方向与  $z$  轴的夹角。此式表明稳相点恰是由观察点沿着入射方向所作直线与  $xoy$  平面的交点。按照几何光学的观点,这一点就是在观察点所看到的光线的人射点。如果它落在缝内,则可看到透射光;反之,则观察点是阴影。但是似几何光学还可求出存在着一个半阴影区的范围。为此先求出稳相点邻域的表达式

$$\delta(x'_0) = \frac{\sqrt{\lambda r_0}}{\cos \epsilon_0}. \quad (30)$$

然后从缝的边缘按入射平面波的方向作两条直线,如图 5 所示。再对线上每一点(对应于确定的  $r_0$ ) 沿  $x$  方向求出距离为  $\delta(x'_0)$  的两个点,这样当我们把这些点连接起来时,就形成了两个区域,当我们以这两个区域内部的任一点作为观察点时,它所对应的稳相点的邻域,将既不能全部落入缝内,也又不能全部落入缝外。因此这两个区域将是半阴影区。

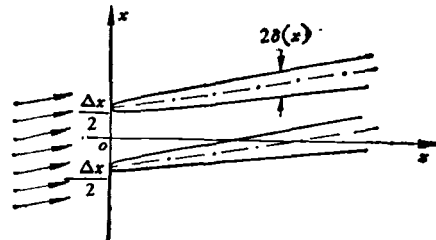


图 5

对于垂直入射的情况,(30)式简化为

$$\delta(x'_0) = \sqrt{\lambda z}. \quad (30')$$

由此可明显看出,随着观察点离屏的距离的增大,半阴区逐渐加宽。当距离  $z$  满足

$$\sqrt{\lambda z} = \Delta x$$

时,两个半阴影区交叠,于是几何光学将完全失效。由此可见,

$$z \ll \frac{(\Delta x)^2}{\lambda} \quad (31)$$

是在这一情况下几何光学能够适用的限制条件。

#### 四、成象系统

当讨论成象系统的一般理论时，往往采用如图6所示的“黑箱”模型。这时把物空间的光场分布作为系统的输入，象空间的光场分布作为输出。为了数学处理上的方便，我们在两个

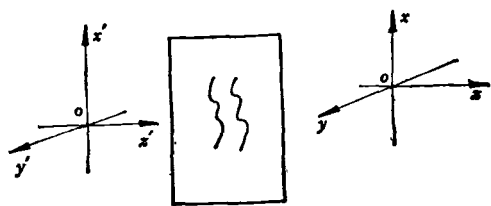


图 6

空间中分别建立对应轴相互平行的直角坐标系。这样我们就可以用  $U_0(x', y', z')$  和  $U_i(x, y, z)$  分别表示输入信号和输出信号。正如应用傅里叶变换可将信号从时域描述变换为频域描述那样，对光场分布的描述也可引入类似的变换：

$$\tilde{U}_z(\alpha, \beta) = \iint U(x, y, z) e^{-in\kappa(\alpha x + \beta y)} dx dy, \quad (32)$$

式中  $n$  是介质折射率。在本节讨论中，我们假定物空间和象空间都是均匀介质空间，但折射率可以不同。考虑到  $\kappa = 2\pi/\lambda$ ，可知(32)式实际上也就是  $U(x, y, z)$  在  $z$  取定值的情况下的二维傅里叶变换，不过变换后的“空间频率”  $f_x$  和  $f_y$  分别用  $n\alpha/\lambda$  和  $n\beta/\lambda$  代入而已。它的物理意义是将此  $z$  平面上的光场复振幅分布按空间方位角展开成元平面波的谱，故称为平面波角谱。根据平面波在均匀介质中传播的规律可知，在  $z = 0$  平面上的角谱与  $z$  平面上的角谱之间应有如下关系：

$$\tilde{U}_z(\alpha, \beta) = \tilde{U}(\alpha, \beta) e^{in\kappa rz}, \quad (33)$$

式中  $\tilde{U}(\alpha, \beta)$  表示在  $xoy$  平面上的角谱， $r$  是满足(18)式的参数。此式表明，当  $xoy$  平面上的角谱为已知时，任何与之平行的平面上的角谱可方便地求出。然后再通过逆变换，便可求出该平面上的光场复振幅分布：

$$U(x, y, z) = \frac{n^2}{\lambda^2} \iint \tilde{U}_z(\alpha, \beta) e^{in\kappa(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \\ = \frac{n^2}{\lambda^2} \iint \tilde{U}(\alpha, \beta) e^{in\kappa(\alpha x + \beta y + rz)} d\alpha d\beta. \quad (34)$$

可见  $\tilde{U}(\alpha, \beta)$  亦是光场分布的一种有效的描述。还可指出， $\tilde{U}(\alpha, \beta)$  也就是对应的元平面波在坐标原点的相对复振幅。

根据波动方程的线性性质，我们可以用如下四种叠加积分把输出信号与输入信号联系起来，即

$$U_i(x, y, z) = \iint U_0(x', y', z') h(x', y', z'; x, y, z) \\ \times dx' dy', \quad (35)$$

$$\tilde{U}_i(\alpha, \beta) = \iint \tilde{U}_0(\alpha', \beta') g(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) d\alpha' d\beta', \quad (36)$$

$$U_i(x, y, z) = \iint \tilde{U}_0(\alpha', \beta') s(\alpha', \beta'; x, y, z) \\ \times d\alpha' d\beta', \quad (37)$$

$$\tilde{U}_i(\alpha, \beta) = \iint U_0(x', y', z') t(x', y', z'; \alpha, \beta) \\ \times dx' dy', \quad (38)$$

其中  $h, g, s$  和  $t$  可分别称为系统的点扩散函数，角扩散函数和两种混合扩散函数。下面分别讨论它们的物理意义以及它们之间的相互关系。

首先讨论点扩散函数  $h$ 。由(35)式可明显看出，它表示物空间的  $(x', y', z')$  处的点光源在象空间的  $(x, y, z)$  处所产生的复振幅。作为一个复函数，可将它表达为

$$h = |h| e^{i\kappa V}. \quad (39)$$

于是  $\kappa V$  表征着上述情况下观察点的复振幅相对于光源的相位差。按照几何光学的观点，光是沿着连接该两点之间的某一确定的几何曲线传送的，当这条几何曲线的光学长度为  $L$  时，相应的相位差应为  $\kappa L$ ，可见(39)式中的  $V$  相当于几何光学中的光学长度，即几何光学成象理论中所定义的点特征函数。

其次讨论角扩散函数  $g$ 。由(36)式可以看出，它表示当物空间输入一个方向余弦为  $\alpha'_0, \beta'_0$  的单位平面波，即

$$\tilde{U}(\alpha', \beta') = \delta(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) U$$

时, 在象空间  $xoy$  平面上所产生的光场分布的角谱。一般地它也是一个复函数, 可表达为

$$g = |g| e^{ikT}. \quad (40)$$

根据前面关于角谱物理意义的解释可知, 上式中的  $kT$  表征着输入平面波在物空间坐标原点的复振幅相对于它所引起的在  $\alpha, \beta$  方向上的元平面波在象空间坐标原点的复振幅之间的相位差。

为了求出同一光学系统的点扩散函数与角扩散函数之间的关系, 可利用(34)式和(36)式, 得

$$\begin{aligned} U_i(x, y, z) &= \frac{n^2}{\lambda^2} \iint \tilde{U}_i(\alpha, \beta) e^{in\kappa\Sigma} d\alpha d\beta \\ &= \frac{n^2}{\lambda^2} \iiint \tilde{U}_0(\alpha', \beta') g(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \\ &\quad \times e^{in\kappa\Sigma} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta', \end{aligned}$$

对其中的  $\tilde{U}_0(\alpha', \beta')$ , 可用(32)式代入得

$$\begin{aligned} U_i(x, y, z) &= \frac{n^2}{\lambda^2} \iint U_0(x', y', z') \\ &\quad \times \iiint |g| e^{ik(T+n\Sigma-n'\Sigma')} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' dx' dy'. \end{aligned}$$

将它与(35)式比较, 便得

$$h = \frac{n^2}{\lambda^2} \iiint |g| e^{ik(T+n\Sigma-n'\Sigma')} d\alpha' d\beta' d\alpha d\beta. \quad (41)$$

以上三式中的  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  分别是  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)$  和  $(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z')$  的缩写。

(41)式就是系统的点扩散函数与角扩散函数之间关系的积分表达式。用稳相法可对此关系式作进一步的讨论。为此, 先求出稳相点所满足的方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} - n'x' + n' \frac{\alpha'}{\gamma'} z' &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \beta'} - n'y' + n' \frac{\beta'}{\gamma'} z' &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} + nx - n \frac{\alpha}{\gamma} z &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} + ny - n \frac{\beta}{\gamma} z &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

当两点的坐标  $(x', y', z')$  和  $(x, y, z)$  给定之后, 此方程组给出一组根  $(\alpha'_0, \beta'_0)$  和  $(\alpha_0, \beta_0)$ , 它

们分别代表对输出有主要贡献的元平面波在物空间和象空间的传播方向。所以说(42)式就是几何光学成像理论中的光线方程式。将这一组稳相点代入积分(41)式的指数部分的二阶导数, 求出相应的各量, 便可最后完成这一积分,

$$h = G |g_0| e^{ik(T_0+n\Sigma_0-n'\Sigma'_0)}, \quad (41')$$

式中  $G$  是与  $T$  的二阶导数在稳相点的值有关的量,  $|g_0|$ ,  $T_0$ ,  $\Sigma_0$  和  $\Sigma'_0$  是相应函数在稳相点的值。

将(41')式与(39)式比较可知

$$V = T_0 + n\Sigma_0 - n'\Sigma'_0,$$

或

$$T_0 = V + n'\Sigma'_0 - n\Sigma_0. \quad (43)$$

这一关系式可以从图7得到明确的解释。图中

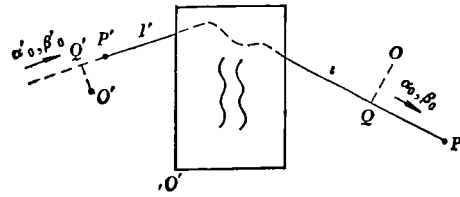


图 7

$P'$  和  $P$  分别表示点源和观察点,  $l'$  和  $l$  分别是通过  $P'$  和  $P$  且方向余弦分别为  $(\alpha'_0, \beta'_0)$  和  $(\alpha_0, \beta_0)$  的两条直线。显然, 它们共同组成几何光学中所谓的光线。沿着这条曲线从  $P'$  到  $P$  的光学长度就是(43)式中的  $V$ 。再从坐标原点  $O'$  和  $O$  分别作  $l'$  和  $l$  的垂线, 得垂足  $Q'$  和  $Q$ , 显然

$$Q'P' = \Sigma'_0, \quad QP = \Sigma_0.$$

因而  $Q'$  到  $Q$  的光学长度为  $V + n'\Sigma'_0 - n\Sigma_0$ , 它所产生的相位差正好是方向为  $(\alpha'_0, \beta'_0)$  的元平面波在  $O'$  的复振幅相对于它所引起的在  $(\alpha_0, \beta_0)$  方向上的元平面波在  $O$  的复振幅之间的相位差, 这也就是(34)式所包含的意义。

(43)式说明, 这里所引入的函数  $T_0$  与几何光学成像理论中所定义的角特征函数是一致的, 然而在那里, 它以及下述的混合特征函数都

1)  $\delta(\quad, \quad)$  表示二维单位冲激函数。

是利用勒让德 (Legendre) 变换方法引入的,因而在物理意义上是比较费解的。

对于其余的两种混合扩散函数,

$$s = |s| e^{ik\omega'}, \quad t = |t| e^{ik\omega}, \quad (44)$$

可用类似的讨论求出它们与点扩散函数之间的关系:

$$h = \frac{n'^2}{\lambda^2} \iint |s| e^{ik(\omega' - n'\Sigma)} d\alpha' d\beta', \quad (45)$$

$$h = \iint |t| e^{ik(\omega + n\Sigma)} d\alpha d\beta. \quad (46)$$

并且用稳相法可进一步得到

$$\omega'_0 = V + n'\Sigma'_0, \quad (47)$$

$$\omega_0 = V - n\Sigma_0. \quad (48)$$

它们分别是几何光学成像理论中的两种混合特征函数。

附带说明,在文献[5]中也论证了上述四种扩散函数与相应的哈密顿特征函数之间的关系,不过作者所采用的方法是以 Wigner 分布函数为基础的。

现以单透镜成像系统为例来说明以上结果的具体应用。为了方便,按图 8 那样选取坐标

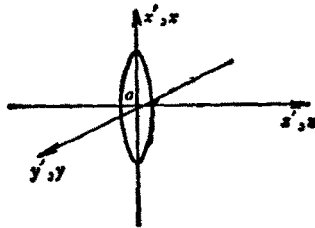


图 8

系,并假定物空间和象空间的介质折射率都等于 1。我们知道,在忽略常数相位因子和有限孔径影响的条件下,透镜函数可写为

$$P(x, y) = e^{-ik \frac{1}{2F}(x^2 + y^2)},$$

式中  $F$  为透镜的焦距。于是透镜出射表面的光场  $U_i(x', y', 0)$  与透镜入射表面的光场  $U_0(x, y, 0)$  之间的关系为

$$U_i(x, y, 0) = U_0(x, y, 0) e^{-ik \frac{1}{2F}(x^2 + y^2)}.$$

应用卷积定理可立即得到

$$\tilde{U}_i(\alpha, \beta) = \iint \tilde{U}_0(\alpha', \beta') \frac{i}{F\lambda} e^{ik \frac{F}{2}[(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]} \times d\alpha' d\beta'.$$

将它与 (36) 式比较,可知此系统的角扩散函数为

$$g(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = \frac{i}{F\lambda} e^{ik \frac{F}{2}[(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}. \quad (49)$$

再将它与 (40) 式比较并忽略无关紧要的常数项,可得本系统的角特征函数

$$T = \frac{F}{2} [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]. \quad (50)$$

将它代入方程组 (42) 式,便得到系统的光线方程

$$\left. \begin{aligned} -F(\alpha_0 - \alpha'_0) - x' + \frac{\alpha'_0}{r'_0} z' &= 0, \\ -F(\beta_0 - \beta'_0) - y' + \frac{\beta'_0}{r'_0} z' &= 0, \\ F(\alpha_0 - \alpha'_0) + x - \frac{\alpha_0}{r_0} z &= 0, \\ F(\beta_0 - \beta'_0) + y - \frac{\beta_0}{r_0} z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

式中对各变量所加的足码表示它们是满足此方程组的根。在近轴近似  $r_0 = r'_0 = 1$  的条件下,经过简单的代数运算消去  $\alpha_0, \beta_0$ , 可得

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ \left( 1 + \frac{z'}{F} \right) \alpha'_0 - \frac{x'}{F} \right] \left( z - \frac{Fz'}{F+z'} \right) \\ &\quad + \frac{Fx'}{F+z'}, \\ y &= \left[ \left( 1 + \frac{z'}{F} \right) \beta'_0 - \frac{y'}{F} \right] \left( z - \frac{Fz'}{F+z'} \right) \\ &\quad + \frac{Fy'}{F+z'}. \end{aligned} \right\} \quad (51')$$

可见,这是在  $x, y, z$  坐标系中的直线方程式。它具有如下的明显特征:对于给定的点  $(x', y', z')$ , 不论  $\alpha'_0, \beta'_0$  取何值,由 (51') 式所决定的直线均通过坐标为

$$x = \frac{F}{F+z'} x', \quad y = \frac{F}{F+z'} y', \quad z = \frac{F}{F+z'} z' \quad (52)$$

的点。可见这一点就是点  $(x', y', z')$  的象。上式的前两式表明系统的横向放大率;后一式表明象距与物距的关系即透镜定理。

我们也可以从系统的点扩散函数出发来进行讨论。这时假定在  $(x', y', z')$  处有一点源,根据 (24) 式得透镜入射表面的光场分布,然后乘



以透镜函数,再利用 H. F. K.,便可得到

$$h(x', y', z'; x, y, z) = \frac{-1}{\lambda^2} \iint \frac{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2}{r_1 r_2} e^{ik[r_1 + r_2 - \frac{1}{2F}(x_0^2 + y_0^2)]} dx_0 dy_0, \quad (53)$$

式中  $x_0$  和  $y_0$  表示在透镜平面内取值,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + z'^2}, \\ \cos \varepsilon_1 &= \frac{z'}{r_1}, \\ r_2 &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \\ \cos \varepsilon_2 &= \frac{z}{r_2}. \end{aligned}$$

同样,我们可用相稳法求解(53)式。为此令

$$f(x_0, y_0) = r_1 + r_2 - \frac{1}{2F}(x_0^2 + y_0^2). \quad (54)$$

由它的一阶导数可得稳相点方程组

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - x'}{r_1} - \frac{x - x_0}{r_2} - \frac{x_0}{F} &= 0, \\ \frac{y_0 - y'}{r_1} - \frac{y - y_0}{r_2} - \frac{y_0}{F} &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

根据方向余弦的定义

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \frac{x_0 - x'}{r_1}, \quad \beta'_0 = \frac{y_0 - y'}{r_1}, \\ \alpha_0 &= \frac{x - x_0}{r_2}, \quad \beta_0 = \frac{y - y_0}{r_2}, \end{aligned}$$

故由(55)式得

$$x_0 = F(\alpha'_0 - \alpha_0), \quad y_0 = F(\beta'_0 - \beta_0). \quad (56)$$

另一方面,由于

$$\frac{\alpha_0}{\gamma_0} z = \alpha_0 r_2 = x - x_0, \quad \frac{\beta_0}{\gamma_0} z = \beta_0 r_2 = y - y_0, \quad (57)$$

将(56)式代入(57)式,稍加整理就得到(51)式的后面两个方程式,可见(55)式与(51)式等价,即从两种不同的扩散函数出发,可得到相同的光线方程式。

## 五、结束语

本文就简单光学系统和成象系统讨论了似几何光学的基本理论方法。从以上讨论可以看出,似几何光学是介于严格的波动光学和纯粹的几何光学之间的一种过渡理论。它把几何光学的定律即光线方程式包含在求稳相点坐标的方程式之中,从而使波动光学向几何光学的过渡成为一个渐变的过程,物理背景比较明朗,并且在每一具体条件下可以给出几何光学适用范围的定量判据。

## 参 考 文 献

- [1] M·玻恩等著,杨荫荪等译,光学原理,科学出版社,(1978).
- [2] A. Walther, *American Journal of Physics*, **35** (1967), 808.
- [3] J·W·顾德门著,詹达三等译,傅里叶光学导论,科学出版社,(1976).
- [4] P. Debye, *Ann. Phys.*, **30** (1909), 755.
- [5] M. J. Bastiaans, *Opt. Commun.*, **30-3** (1979), 321.

(上接第 492 页)

## 4. 晶体表面清洁温度的影响

激活时晶体表面清洁温度低于 760℃ 时,不能达到清洁的目的,因而不能形成负电子亲和势表面。当温度超过 800℃ 时,晶体表面已明显蒸发,表面受到破坏,也不能获得好的结果。

参加本工作主要人员还有张济康、龚美霞、张焕文、宋绪科。

物理

## 参 考 文 献

- [1] A. H. Sommer, *RCA Review*, **34**(1973), 95.
- [2] Н. А. Соболева, *Успехи Физических Наук*, **111** (1973), 331.
- [3] Ramon V. Martinelli, *J. Appl. Phys.*, **45**(1974), 3203.
- [4] Л. И. Анмонова и др., *Радиотехника и электроника*, **19** (1974), 2015.
- [5] Н. Л. Яснопольский и др., *Радиотехника и электроника*, **20**(1975), 150.
- [6] J. Van Laar, *Acta Electronica*, **16**(1973), 215.