问题讨论

关于理想导体平面附近平行电偶极子的辐射场问题

王　明　达

（吉林大学物理系）

理想导体平面附近平行电偶极子的辐射场问题，在技术上有实际的应用，例如在地面附近放置水平电偶极子天线，将大地近似看为理想导体，就属于这种情况．这个问题在电动力学或电磁场理论的课程中，也常作为典型习题．但对这个问题的解答在国内某些流行的教材中却有错误，且长期没有纠正．如1964年版巴蒂金编《电动力学习题集》[1]、1979年版郭硕鸿编《电动力学》[2]和1980年底中山大学编印在高等学校内部发行的《电动力学习题和例解》[3]，都重复了同一错误．因此有必要对这个问题作进一步讨论．

如图1所示，理想导体平面的影响可用一象偶极子来代替．这就变为两个平行、反向且在同一平面内的电偶极子体系问题．题中假设偶极子距导体平面 $a/2$，且 $a \ll \lambda$（辐射电磁波波长），故它的辐射场应由体系的电四极矩和磁偶极矩辐射场之和来表达．在文献［1—3］中

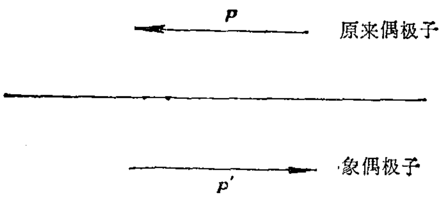

图　1

对此问题解答的主要错误在于只顾及了体系的电四极矩辐射场，未考虑体系磁偶极矩的辐射场．

下面从两方面来计算这问题的解．先用电偶极子场迭加的方法．由电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 产生的辐射场的 $\boldsymbol{B}$ 为

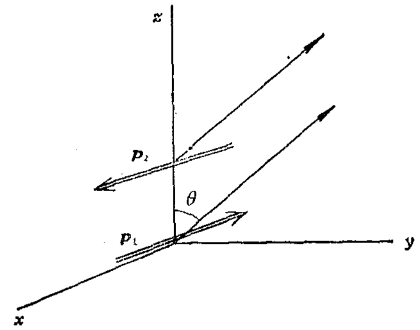

图　2

$$\boldsymbol{B} = \frac{-\omega^2\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_R,$$

由图2可知，

$$\boldsymbol{p}_1 = -p\boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{p}_2 = p\boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t},$$

$$R_2 = R_1 - a\cos\theta, \quad R_1 = R.$$

体系的总辐射场为两个电偶极子辐射场之和，并考虑到 $a \ll \lambda$，则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi c R}(1 - e^{-iak\cos\theta}) \times e^{-i(\omega t - kR_1)}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R \cong \frac{i\mu_0\omega^2 pak}{4\pi c R} \times \cos\theta e^{-i(\omega t - kR)}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R.$$

而

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R = -\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta,$$

代入后得到

$$\boldsymbol{B} = \frac{-i\mu_0\omega^3 pa}{4\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$$

$$= \frac{i\mu_0\omega^3 pa}{4\pi cR}(1 - \cos^2\theta\cos\varphi \boldsymbol{e}_\theta$$

$$+ \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}. \qquad (2)$$

再用电四极矩和磁偶极矩辐射场迭加的方法. 电四极矩 $\mathscr{D}$ 的辐射磁场为

$$\boldsymbol{B}_e = \frac{\mu_0(-i\omega)^3 e^{ikR}}{24\pi c^2 R}\mathscr{D} \times \boldsymbol{n}.$$

设偶极矩的变化是由于组成它的电荷 Q 的变化引起的. 每个偶极子的长度为 l(如图 3),则体

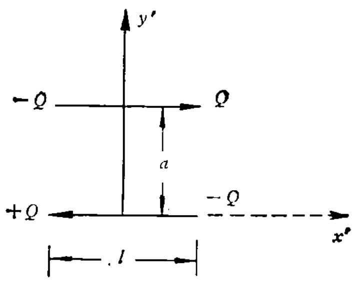

图 3

系的电四极矩为

$$\mathscr{D} = \sum_{i=1}^{4} Q_i(3\boldsymbol{x}'_i\boldsymbol{x}'_i - r'^2_i\mathrm{I})$$

$$= 3pa(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)e^{-i\omega t},$$

式中 $p = Ql$ 是每个电偶极矩的数值. 按定义 $\mathscr{D} = \mathscr{D}\cdot\boldsymbol{n}$, 则

$$\mathscr{D} \times \boldsymbol{e}_R = 3pa(\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{e}_R e^{-i\omega t}$$

$$= 3pa(\cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta)e^{-i\omega t}.$$

代入 $\boldsymbol{B}_e$, 得电四极矩辐射场:

$$\boldsymbol{B}_e = \frac{-ipa\omega^3\mu_0}{8\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}, \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{E}_e = c\boldsymbol{B}_e \times \boldsymbol{e}_R$$

$$= \frac{ipa\omega^3\mu_0}{8\pi cR}(-\cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}. \qquad (4)$$

磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的辐射电场为

$$\boldsymbol{E}_m = -\frac{\mu_0\ddot{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{n}}{4\pi cR}e^{ikR}.$$

图 3 中每个电偶极子内有电流

$$I = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta_0 e^{-i\omega t}) = -i\omega Q.$$

这些电流形成的磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2}\int \boldsymbol{x}' \times d\boldsymbol{l}' = \frac{I}{2}\int z'dx'\boldsymbol{e}_y$$

$$= \frac{-\lambda\omega pa}{2}\boldsymbol{e}_y e^{-i\omega t}.$$

将 $\boldsymbol{m}$ 代入 $\boldsymbol{E}_m$ 中, 则可得到磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的辐射电磁场:

$$\boldsymbol{E}_m = -\frac{i\mu_0}{4\pi cR}\frac{\omega^3 pa}{2}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_R e^{-i(\omega t - kR)}$$

$$= \frac{i\mu_0\omega^3 pa}{8\pi cR}(-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{B}_m = \frac{1}{C}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_m$$

$$= \frac{-i\mu_0\omega^3 pa}{8\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}. \qquad (6)$$

电四极矩场和磁偶极矩场是同数量级的, 故体系的总的辐射场应为两者的迭加:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_m = \frac{ipa\omega^3\mu_0}{4\pi cR}(-\cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}, \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_e + \boldsymbol{B}_m = \frac{-ipa\omega^3\mu_0}{4\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t - kR)}. \qquad (8)$$

(7),(8)两式的结果和(1),(2)两式完全相同, 这说明只有考虑了(5),(6)两式的贡献后,才能得出正确的解答. [1—3] 中只列出了(3),(4)两式的贡献,因而解答是不正确的.

在以上的计算中坐标系原点选在一个偶极子的中心, 且偶极子位于 x-z 平面. 应该指出,对这个问题,坐标原点的选择不影响计算结果.

参 考 文 献

[1] B. B. 巴蒂金等编, 电动力学习题集, 人民教育出版社,(1964),443(第 653 题解).

[2] 郭硕鸿,电动力学,人民教育出版社,(1979),202(第 3 题解).

[3] 黄迺本等,电动力学习题和例解,中山大学版,(1980),251(第 157 题解).