的近场照片：(a)为入射波，(b)为通过动态介质的畸变入射波，(c)为未畸变的后向受激布里渊散射波，(d)为两次通过动态畸变介质的后向受激布里渊散射波．由图可见，当入射光经过动态畸变介质时，由于胶体溶液内的悬浮颗粒成了散射中心，使原始入射波光强分布发生变化，弥散成一团．然而经过布里渊“镜”反射，再次通过动态介质后，其光强分布仍然呈现中心区较强，与入射波类似．所不同的是由于畸变介质对光强衰减后，高阶模式不能达到阈值，因而中心强区周围没有出现 SBS．而当没有动态介质时，入射光较强，仍可观察到中心强区周围有较高阶模的后向散射[见图 2(c)]．此外，从实验上测得阈值功率密度为 50 兆瓦/厘米^2．

应该指出，动态介质的存在，有可能改变后向散射波的位相．如果动态介质内的粒子变化速度相当快，而且介质长度足够长时，入射光通过动态介质经布里渊“镜”反射，再次通过动态介质这一瞬间内，介质的粒子状态已经发生明显的变化，这时 SBS 过程就不能达到动态畸变介质的位相补偿作用．而在目前的条件下，胶体溶液内的悬浮颗粒主要是布朗运动，在光束两次通过动态介质之间，介质的位相变化可以忽略，复共轭波的出现证明了这一点．

后向受激布里渊散射的位相复共轭特性，在诸如激光核聚变、激光通讯等方面可用来改善光束质量，提高亮度．因此，它在相干光适应技术中占有重要的地位．

本工作得到王润文教授的热情指导，谨致谢意．

参 考 文 献

[1] J. E. Pearson, *Appl. Opt.*, 15 (1976), 662.
[2] R. W. Hellwarth, *J. Opt. Soc. Am.*, 67 (1977), 1.
[3] Victor Wang and Concetto R. Giuliano, *Optics Letters*, 2 (1978), 4.
[4] 徐捷、陈钰明、何国珍、张宝富，激光，8-5 (1981), 41.
[5] B. Y. Zeldovich and V. I. Popovichev, *JETP Lett.*, 15 (1972), 109.

快速傅里叶变换谱分析中的窗口修正

王 东 生 （华东师范大学物理系）

一、引 言

谱分析是物理学的一个重要内容．在光谱学、电子顺磁共振波谱学、核磁共振波谱学、无线电物理、音响与振动等等物理学领域里都要进行谱分析．傅里叶变换一直是谱的理论分析依据．随着数字计算技术的发展，1965 年 Cooley 和 Tukey 提出了快速傅里叶变换 (FFT) 方法[1]，使离散傅里叶变换的复数乘法运算次数由 N^2 次减小到 $(N/2)\log_2 N$ 次，大大降低了运算量，提高了运算速度，可以用数字计算机实现傅里叶谱分析了．FFT 技术应用到上述诸领域，出现了傅里叶光谱学、脉冲傅里叶核磁共振波谱学等新分支；在实验技术上出现了傅里叶光谱仪、脉冲傅里叶核磁共振波谱仪、音响与振动的傅里叶分析系统等现代化实验手段．FFT 是信号谱分析的有力工具（关于快速傅里叶变换，可参阅本刊 1980 年第 2 期 112—118 页）．

时域信号 $x(t)$ 的谱可表示为傅里叶变换式

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \qquad (1)$$

它的离散傅里叶变换为

$$X(n)=\sum_{K=0}^{N-1} x(K)e^{-\frac{j2\pi nK}{N}}, \qquad (2)$$

FFT 就是计算上式的快速算法．

使用 FFT 算法，必然取有限 N 点离散信号 $x(K)$ 来计算(2)式的谱，这就引进了误差．这个误差不受计算精度取舍方式的影响．有的情况下，相对误差可达 20% 以上，成为必须修

正的严重问题．在谱分析中，采用了时域加窗口函数修正的方法，相应的在频域上是让窗口函数的谱为 $\sin\theta/\theta$ 的高次幂形式，或者对信号作平滑修正等等．下面将介绍 FFT 作谱分析是怎样引入误差的、窗口修正原理、几种典型窗口函数，最后对谱分析中常用的窗函数作些比较．

二、FFT 谱分析方法引入的误差

FFT 谱分析方法误差是由计算中取有限长度离散信号造成，对于有限长度连续信号的傅里叶变换也会引起同样的误差．用傅里叶变换分析信号 $y(t)$ 的频谱，总是截取一段 $x(t)$ 进行处理，如图 1 所示，这就相当于用 $W_0(t)$ 去乘 $y(t)$ 而得到的结果．$W_0(t)$ 可表示为

$$W_0(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant T,\\ 0 & |t|>T,\end{cases} \qquad (3)$$

$W_0(t)$ 称为矩形窗口 (Rectangulor Window) 函

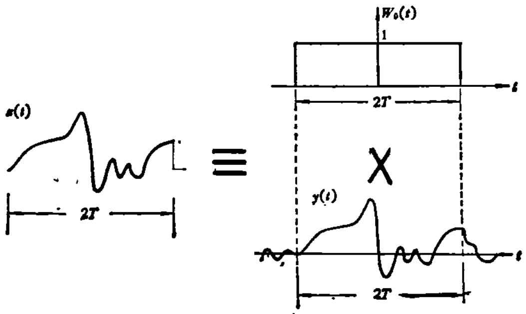

图 1　截断信号的谱分析相当于引入矩形窗口函数

数，而函数 $y(t)$ 经过矩形窗口 $W_0(t)$ 截断后就成为 $x(t)$，$x(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}X(f)&=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-j2\pi ft}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\cdot W_0(t)e^{-j2\pi ft}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}Y(f_1)W_0(f-f_1)df_1,\end{aligned} \qquad (4)$$

上式是卷积形式，其中 $Y(f)$ 和 $W_0(f)$ 分别为 $y(t)$ 和 $W_0(t)$ 的频谱．它表明，当频率固定为 f 时，$X(f)$ 是 $Y(f_1)$ 通窗口 $W_0(f-f_1)$ 的所有频谱成分的迭加．改变 f 时，就改变了窗口的中心频率．$W_0(f-f_1)$ 相当于一个滤波器，对它的性质进一步分析，便可了解它引入的误差大小．

对 $W_0(t)$ 作傅里叶变换得到 $W_0(f)$ 为

$$\begin{aligned}W_0(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}W_0(t)e^{-j2\pi ft}dt\\&=\int_{-T}^{T}e^{-j2\pi ft}dt\\&=\left[\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT}\right]2T,\end{aligned} \qquad (5)$$

$W_0(f)$ 随频率 f 变化曲线示于图 2．它在 $f=0$ 处有最大值为 $W_0(0)=2T$；当 $f=\pm K/(2T)$ 时 $(K=1,2,\cdots)$，$W_0(f)=0$．$W_0(f)$

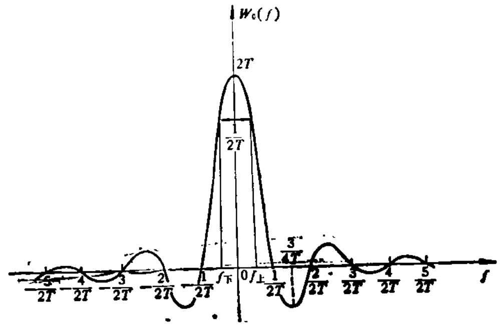

图 2　矩形窗口的频率特性曲线

在 $f=0$ 附近处有主瓣，而在它两侧

$$\left(|f|>\frac{1}{2T}\right)$$

是正负相间的旁瓣，且随 $|f|$ 的增大而衰减，在 $f=\frac{3}{4T}$ 处第一旁瓣的负极值为 $-0.212\times 2T$．这说明第一旁瓣高度 $\left|W_0\left(\frac{3}{4T}\right)\right|$ 是主瓣高度 $2T$ 的 0.212．

$W_0(f)$ 相当于滤波器，其主瓣半功率点的通频带为 $\frac{1}{2T}$．

用 $x(t)$ 代替 $y(t)$，经过 FFT 得到 $X(f)$，在 $X(f)$ 谱中，不仅频率 $-\frac{1}{2T}$ 到 $\frac{1}{2T}$ 的 $Y(f)$ 谱成分能通过 $W_0(f)$，而且 $|f|>\frac{1}{2T}$ 的 $Y(f)$ 谱也都能通过 $W_0(f)$ 的旁瓣．后者就造成漏谱的误差．这个误差的大小还与信号 $Y(f)$ 有关．通常就称原始频谱在旁瓣内产生的值为窗口泄漏．若 $Y(f)$ 是均匀分布，则 $W_0(f)$ 两侧

正负相间的旁瓣起着抵消作用，引入的误差较小；而当 $Y(f)$ 在第一旁瓣的频率上存在较大的谱值，甚至是尖峰时，则计算误差就大，甚至把 $Y(f)$ 在 $-\frac{1}{2T}$ 到 $\frac{1}{2T}$ 频率上的正值算成负值.

常用 $W_0(f)$ 中最大旁瓣与主瓣的高度比来衡量窗口泄漏的多少. 矩形窗口最大旁瓣与主瓣的高度比为 0.212，窗口泄漏的误差也有相同的数量比. 要减小这一误差，可采用加其它窗口函数的修正方法.

三、窗口函数修正原理

我们希望窗口函数 $W(f)$ 有这样的特点[2]:

1. 主瓣尽可能地窄. 这样它可以有陡峭的通频带，保证谱分析有足够的分辨率.

2. 最大旁瓣与主瓣面积比(或高度比)尽量小，且旁瓣随频率的增大要衰减得尽量快. 也就是旁瓣漏谱成分尽量少，通过主瓣的谱成分尽量接近通过 $W(f)$ 的全部成分之和，这就保证了谱测量的精度.

以上两点是寻求好窗口函数的基本原则，前者决定了谱分析的分辨率，后者决定了谱分析的精度. 窗口函数确定的精度与分辨率是相互矛盾的. 在相同信号样本长度情况下，精度的提高常是牺牲分辨率而换取的，二者不能兼得. 在实际谱分析中，还要根据被分析信号的特点、精度要求与计算上的方便等具体情况来选择合适的窗口函数. 下面以海宁 (Hanning) 窗口为例说明误差修正原理[3].

海宁窗在时域表示为

$$W(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi t}{T}\right) & |t|\leqslant T,\\ 0 & |t|>T,\end{cases} \tag{6}$$

用 $W(t)$ 代替 $W_0(t)$ 去乘信号 $y(t)$ 得到 $x(t)$，就是在时域进行了海宁窗口修正. 对 $W(t)$ 进行傅里叶变换，其频谱为

$$\begin{aligned}W(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}W(t)e^{-j2\pi ft}dt\\&=\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{T}t\right)e^{-j2\pi ft}dt\\&=\left[\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT}\right]2T\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}{2\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}\right]2T\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T}{2\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T}\right]2T\\&=\frac{1}{2}W_0(f)+\frac{1}{4}W_0\left(f+\frac{1}{2T}\right)\\&\quad+\frac{1}{4}W_0\left(f-\frac{1}{2T}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

上式表明海宁窗口在频域内为三个相邻频率的矩形窗口之和组成的，使原来矩形窗口的滤波

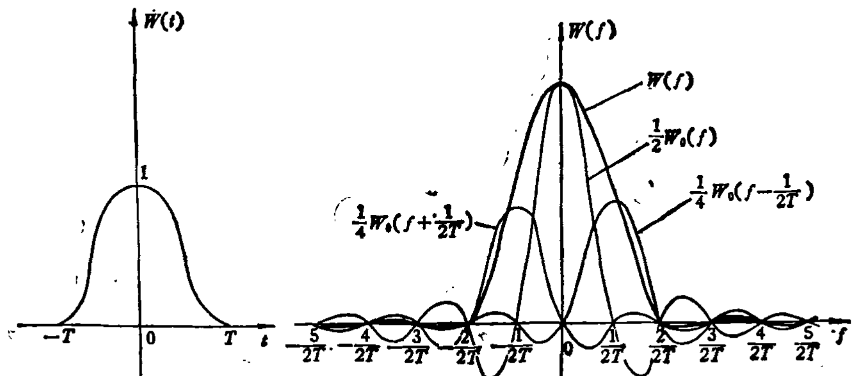

图 3 海宁窗口与矩形窗口的关系

特性曲线形状得到了平滑．图 3 示出了(7)式的曲线，虚线表示三项 W_0 函数曲线，实线画出 $W(f)$ 的曲线，从图中可以看到

$$\frac{1}{4} W_0\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)$$

的主瓣抵消了 $\frac{1}{2} W_0(f)$ 第一旁瓣的负值，也抵消了部分其它旁瓣值，使信号更多的谱成分通过主瓣，而从旁瓣漏进来的高频或低频成分减少了，比矩形窗口的性质有了较好的改善．

从(7)式可知，在 $f=0$ 处海宁窗有最大值，且 $W(0)=T$，主瓣在 $-\frac{1}{T}$ 到 $\frac{1}{T}$ 的频率区间，通频带宽度为 $\frac{1}{T}$．随频率的增加正负相间的旁瓣相应衰减，在 $f=\pm\frac{5}{4T}$ 处第一旁瓣有最大负极值，它与主瓣高度比为 0.0243．

常在频域使用海宁窗口，就是把矩形窗口下算得的谱 $X(f)$ 按(7)式方式相加，即

$$\overline{X(f)} = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{4} X\left(f + \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{4} X\left(f - \frac{1}{2T}\right),$$

$\overline{X(f)}$ 相当于经过海宁窗平滑后的谱．对于 FFT 方法计算的结果 $X(n)$ 作海宁窗口修正时，频域按下式进行

$$\overline{X(n)} = \frac{1}{2} X(n) + \frac{1}{4} X(n+1) + \frac{1}{4} X(n-1), \tag{8}$$

由于离傅里叶变换的周期性[1]，上式计算中要注意到 $X(-1)=X(N-1)$, $X(N)=X(0)$．

在核磁共振实验技术中就常用海宁窗口修正 FFT 谱分析误差[4]．如美国 Varian 公司 FT-80A 核磁共振谱仪就采用了海宁窗口修正．

四、几种平滑窗口

窗口函数在频域上是起平滑旁瓣的作用，又称为平滑窗口．

1.海明窗口（Hamming Window）[5]．海明窗口在时域表示式为

$$W(t)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\frac{\pi}{T}t & |t|\leqslant T,\\ 0 & |t|>T;\end{cases} \tag{9}$$

它的频域表示式为

$$W(f) = 0.54W_0(f) + 0.23W_0\left(f+\frac{1}{2T}\right) + 0.23W_0\left(f-\frac{1}{2T}\right), \tag{10}$$

从上式可知，它与海宁窗的差别仅在 $W_0(f)$, $W_0\left(f+\frac{1}{2T}\right)$, $W_0\left(f-\frac{1}{2T}\right)$ 前的系数不同，这里的系数分别是 0.54，0.23，0.23，使窗口性质进一步得到了改善．

2.布赖柯曼（Blackman）窗口[5]，利用频域五项矩形窗迭加来达到更好的修正效果，它在时域表示为

$$W(t)=\begin{cases}0.42+0.5\cos\frac{\pi}{T}t \\ \quad +0.08\cos\frac{2\pi}{T}t & |t|\leqslant T,\\ 0 & |t|>T;\end{cases} \tag{11}$$

其频域表示式为

$$W(f) = 0.42W_0(f) + 0.25W_0\left(f+\frac{1}{2T}\right) + 0.25W_0\left(f-\frac{1}{2T}\right) + 0.04W_0\left(f+\frac{1}{T}\right) + 0.04W_0\left(f-\frac{1}{T}\right), \tag{12}$$

这种窗口对 FFT 谱分析作了更好的误差修正，但它的运算量较大，只有谱分析精度要求高的场合才使用它．

3.巴雷特（Bartlett）窗口[5]，在时域是个等腰三角形，如图 4(a) 所示，表示式为

$$W(t)=\begin{cases}1-\frac{|t|}{T} & |t|\leqslant T,\\ 0 & |t|>T;\end{cases} \tag{13}$$

其频域如图 4(b) 所示，表示式为

$$W(f)=\left[\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right]^2 T, \quad (14)$$

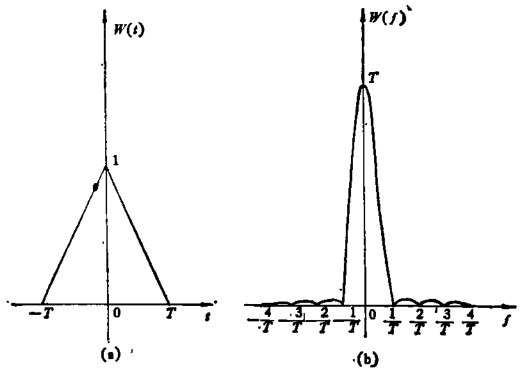

图 4 巴雷特窗口曲线

(a) 为时域；(b) 为频域

由于是 $\sin \pi f T / \pi f T$ 的平方关系，巴雷特窗口的旁瓣只有正向的，且被压低了，在 $f=3/2T$ 处有较大的旁瓣值，它与主瓣的比为 0.0449，较矩形窗口有了很大的改善. 这种窗口常用于傅里叶光谱技术中[6]. 如美国 Digilab 公司的 FTS-14 傅里叶红外光谱仪是用巴雷特窗口来修正误差的.

4. 泊真 (Parzen) 窗口[3]，在时域表示为

$$W(t)=\begin{cases}1-6\left(\frac{|t|}{T}\right)^2+6\left(\frac{|t|}{T}\right)^3 & |t| \leqslant \frac{T}{2}, \\ 2\left(1-\frac{|t|}{T}\right)^2 & \frac{T}{2}<|t| \leqslant T, \\ 0 & |t|>T;\end{cases} \quad (15)$$

其频域表示式为

$$W(f)=0.75 T\left[\frac{\sin \pi f(T/2)}{\pi f T/2}\right]^4, \quad (16)$$

它的第一旁瓣与主瓣之比为 0.00202，漏谱现象也进一步减少，但运算量较大. 此外，还有一些窗口，如凯泽 (Kaiser) 窗口[7]，多费-切比雪夫 (Dolph-Chebyshev) 窗口等等.

五、常用的几种窗口性能比较

下面对谱分析中常用的矩形窗口、海宁窗口、巴雷特窗口、泊真窗口作些比较. 这几种窗口的时域曲线和频域曲线示于图 5(a)，5(b). 从图 5(b) 中可见矩形窗口与海宁窗口的旁瓣是正负相间的，而另外两种窗口是单向的旁瓣.

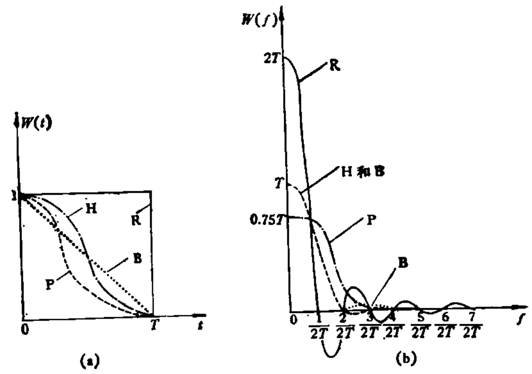

图 5 窗口函数的比较

R 为矩形窗口；*H* 为海宁窗口；

B 为巴雷特窗口；*P* 为泊真窗口

(a) 为时域窗口函数比较；

(b) 为频域窗口函数比较

表 1 几种窗口的性能比较

窗口名称	主瓣高度	第一旁瓣与主瓣高度比 % (db)	主瓣频宽	主瓣半功率带宽
矩形窗口	$2T$	21.2% (−13db)	$\frac{1}{T}$	$\frac{1}{2T}$
海宁窗口	T	2.43% (−31db)	$\frac{2}{T}$	$\frac{1}{T}$
巴雷特窗口	T	4.50% (−25db)	$\frac{2}{T}$	$\frac{1}{T}$
泊真窗口	$0.75T$	0.203% (−54db)	$\frac{4}{T}$	$\frac{1.3}{T}$

(下转 219 页)