研究工作简报

热压强对磁化等离子体中静电双流不稳定性的影响

郭 书 印

(中国西南物理研究所)

1981 年 9 月 28 日收到

一、引 言

在等离子体中，当电子与离子之间发生相对运动并且其相对运动速度 V_D 超过某个阈值时，体系就会成为不稳定的．例如，当 $T_e = T_i$ 而 $V_D > V_{the}$ 时就会出现毕尼曼 (Buneman) 不稳定性；而当 $T_e \gg T_i$ 和 $V_D > V_{is}$ 时出现的是离子声 (ion-acoustic) 不稳定性．其中 T_e 和 T_i 分别为电子和离子的温度；$V_{the} = \left(\frac{\kappa T_e}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $V_{is} = \left(\frac{\kappa T_e}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ 分别为电子热速度和离子声速；m 和 M 分别为电子和离子质量．本文在考虑到电子和离子热压强的情况下，给出了磁化等离子体中静电双流不稳定性的普遍色散关系，把以前文献[1-3] 中常用的三种不同形式的色散关系作为特例而包括进来．最后对四种形式的色散关系进行了定量计算，给出了不稳定性增长率 γ 随电子热速度的变化，并且指出由于约束磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的作用，出现了两个不稳定性分支——短波分支和长波分支，前者对电子热速度的变化较敏感，而后者则不然．

二、色 散 关 系

本文中我们所处理的体系，是由电子和离子构成的双成分等离子体．另外假设电子和离子处在约束磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中并且有定向运动速度，为了简单，令体系为均匀的而且 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{E}_0 = 0$，$\boldsymbol{V}_{0e} = V_{0e}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{V}_{0i} = -V_{0i}\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{z}$ 为沿 z 轴的单位矢量，$\boldsymbol{V}_{0e}$ 和 $\boldsymbol{V}_{0i}$ 分别为电子和离子的初始运动速度，于是有 $\boldsymbol{V}_D = \boldsymbol{V}_{0e} + \boldsymbol{V}_{0i}$．这种静电问题遵从泊松方程：

$$\nabla^2\Psi = -4\pi e(n_i' - n_e'). \qquad (1)$$

在导出线性化的方程 (1) 式时，我们利用了最初体系为电中性的条件，其中 n_i' 和 n_e' 分别表示电子和离子的密度的扰动量即 $n_\alpha = n_{0\alpha} + n_\alpha'$，$\alpha$ 可取 i 和 e，而 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Psi$．方程 (1) 式中的密度扰动量 n_α' 可由连续性方程

$$-(\omega - k_z V_{0\alpha})n_\alpha' + n_{0\alpha}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\alpha' = 0 \qquad (2)$$

求出，即

$$n_\alpha' = \frac{n_{0\alpha}}{\omega - k_z V_{0\alpha}}(k_x v_{\alpha x}' + k_y v_{\alpha y}' + k_z v_z'), \qquad (3)$$

而 (3) 式中的速度 $\boldsymbol{v}_\alpha'$ ($\boldsymbol{V}_\alpha = \boldsymbol{V}_{0\alpha} + \boldsymbol{v}_\alpha'$) 满足线性化的方程

$$\begin{cases} -i(\omega - k_z V_{0\alpha})V_{\alpha x}' = \dfrac{iq_\alpha}{m_\alpha}k_x\Psi \\ \qquad + v_{\alpha y}'\omega_{B\alpha} - i\dfrac{n_\alpha'\kappa T_\alpha}{n_{0\alpha}m_\alpha}k_x, \\ -i(\omega - k_z V_{0\alpha})v_{\alpha y}' = \dfrac{iq_\alpha}{m_\alpha}k_y\Psi \\ \qquad - v_{\alpha x}'\omega_{B\alpha} - i\dfrac{n_\alpha'\kappa T_\alpha}{n_{0\alpha}m_\alpha}k_y, \\ -i(\omega - k_z V_{0\alpha})v_{\alpha z}' = \dfrac{iq_\alpha}{m_\alpha}k_z\Psi \\ \qquad - i\dfrac{n_\alpha'\kappa T_\alpha}{n_{0\alpha}m_\alpha}k_z, \end{cases} \qquad (4)$$

其中 α 为 e 和 i 时分别对应于电子和离子的量，q_α 为电荷，$\omega_{B\alpha} = \left|\frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha c}\right|$ 为电子或离子的回旋频率，$P_\alpha = n_\alpha\kappa T_\alpha$．在导出方程式 (4) 时假设磁场较弱 ($\omega_{Be}/\omega_{pe} < 1$)，这样温度的各向异性可以忽略．另外还假设所有扰动量的变化形式为 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$．这样由方程 (3) 和 (4) 式消

去 v'_α，得到 n'_α 的具体表达式并代入(1)式即得普遍色散关系式为

$$\begin{aligned}1 = &\{(\omega + k_z V_{0i})^2\omega_{pi}^2\sin^2\theta + [(\omega + k_z V_{0i})^2 - \omega_{Bi}^2]\omega_{pi}^2\cos^2\theta\}/\{(\omega + k_z V_{0i})^2 \\ &\times [(\omega + k_z V_{0i})^2 - \omega_{Bi}^2] - \{(\omega + k_z V_{0i})^2 \times \sin^2\theta + [(\omega+k_z V_{0i})^2-\omega_{Bi}^2]\cos^2\theta\}k^2V_{thi}^2\} \\ &+ \{(\omega - k_z V_{0e})^2\omega_{Pe}^2\sin^2\theta + [(\omega - k_z V_{0e})^2 - \omega_{Be}^2]\omega_{Pe}^2\cos^2\theta\}/\{(\omega - k_z V_{0e})^2[(\omega - k_z V_{0e})^2 - \omega_{Be}^2] \\ &- \{(\omega - k_z V_{0e})^2\sin^2\theta + [(\omega - k_z V_{0e})^2 - \omega_{Be}^2]\cos^2\theta\}k^2V_{the}^2\},\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\omega_{P\alpha}^2 = \frac{4\pi n_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}$ 为电子或离子的等离子体频率，$k^2 = k_\perp^2+k_z^2$；$k_\perp^2=k_x^2 + k_y^2$，$k_\perp=k\sin\theta$，$k_z = k\cos\theta$. 其坐标系的选择如图1所示，θ 是波传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 之间的夹角.

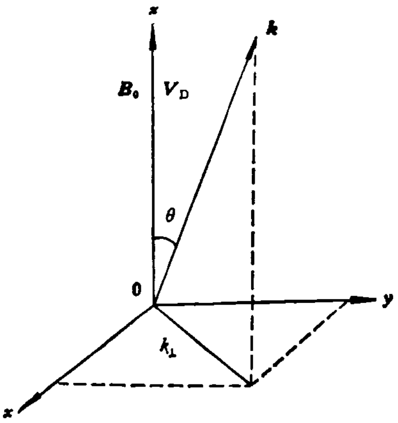

图1 坐标系

三、色散关系的简化结果

从流体方程出发对静电双流不稳定性已进行了广泛地研究，并得到了不同形式的色散关系[1-3]. 可以指出，这些色散关系的形式都不过是色散关系式(5)的特例.

(1) 冷等离子体($V_{th\alpha} = 0$)并且波沿磁场方向传播($\theta = 0$)，这时色散关系式(5)简化为

$$1 = \frac{\omega_{Pi}^2}{(\omega + k_z V_{0i})^2} + \frac{\omega_{Pe}^2}{(\omega - k_z V_{0e})^2}. \tag{6}$$

这就是无外场(或 $\boldsymbol{k}/\!/\boldsymbol{B}_0$)时冷等离子体中静电双流不稳定性的色散关系[1].

(2) $\theta = 0$，由色散关系式(5)可得

$$1 = \frac{\omega_{Pi}^2}{(\omega+k_z V_{0i})^2-k_z^2 V_{thi}^2} + \frac{\omega_{Pe}^2}{(\omega-k_z V_{0e})^2-k_z^2 V_{the}^2}. \tag{7}$$

这是在无外场(或 $\boldsymbol{k}/\!/\boldsymbol{B}_0$)的条件下，考虑到电子和离子的热压强时，静电双流不稳定性的色散关系[2].

(3) $V_{th\alpha} = 0$，这时色散关系式(5)就变为

$$1 = \frac{\omega_{Pi}^2\cos^2\theta}{(\omega + k_z V_{0i})^2} + \frac{\omega_{Pi}^2\sin^2\theta}{(\omega + k_z V_{0i})^2 - \omega_{Bi}^2} + \frac{\omega_{Pe}^2\cos^2\theta}{(\omega - k_z V_{0e})^2} + \frac{\omega_{Pe}^2\sin^2\theta}{(\omega - k_z V_{0e})^2 - \omega_{Be}^2}. \tag{8}$$

这就是处在外磁场中冷等离子体的静电双流不稳定性的色散关系[3].

四、色散关系的定量结果

色散关系(5)—(8)式在一般情况下解析求解是很困难的，为了定量地了解在这四种情况下静电双流不稳定性的变化，特别是不稳定

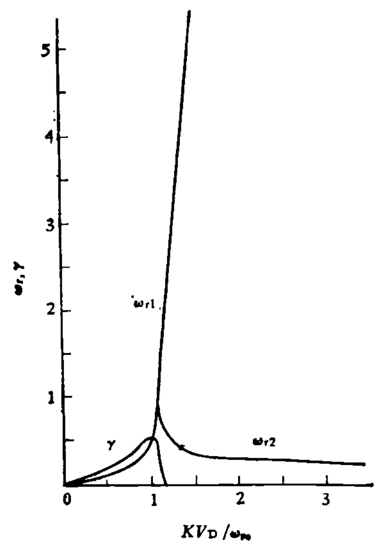

图2 当 $m/M = 1/1800$ 时，不稳定性增长率 γ 的变化

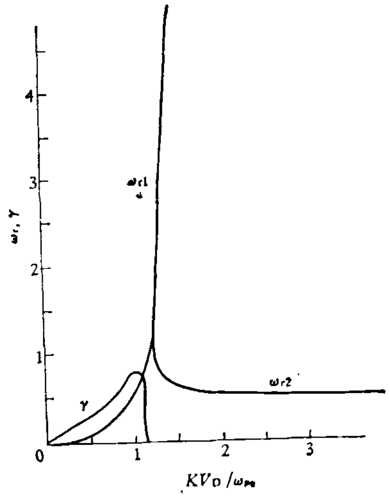

图 3　当 $m/M = 1/500$ 时，不稳定性增长率 γ 的变化

性增长率 γ 的性质，我们对这四个色散方程进行了数值计算．对于色散关系式 (6) 其结果如图 2 和 3 所示．因为我们主要关心的是不稳定性增长率 γ 的变化，所以在下面的各图中，不同分支的频率 $\omega_r(\omega = \omega_r + i\gamma)$ 没有全示出或全部都未示出．这里我们研究了电子与离子的质量比 m/M 的影响，由图 2 和图 3 可以看出，随着质量比 m/M 的增加，不稳定性的增长率 γ 的极大值也上升，但极大值所对应的纵轴的 $\frac{KV_D}{\omega_{pe}}$ 值不变，即 $\frac{KV_D}{\omega_{pe}} \approx 1$．在图 4 和图 5 中所

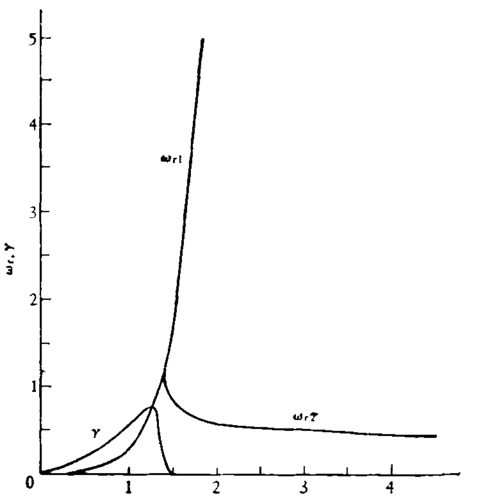

图 4　当 $m/M = 1/500$, $V_{the}/V_D = 0.5$ 时，不稳定性增长率 γ 的变化

表示的是色散关系 (7) 式的数值结果．和色散关系 (6) 式不同，这里出现了电子和离子热速度的影响，我们计算了 $V_{the}/V_D = 0.5$, 1 两个值．结果表明当 $V_{the}/V_D = 0.5$ 时体系是不稳定的，而当 $V_{the}/V_D = 1$ 时不稳定性已消失．但增长率 γ 的极大值仍然随 m/M 的增加而上升，所不同的是由于热速度的作用，当 V_D 为定值时，在 k 空间里不稳定性的范围扩大了，γ 的极大值减小了．

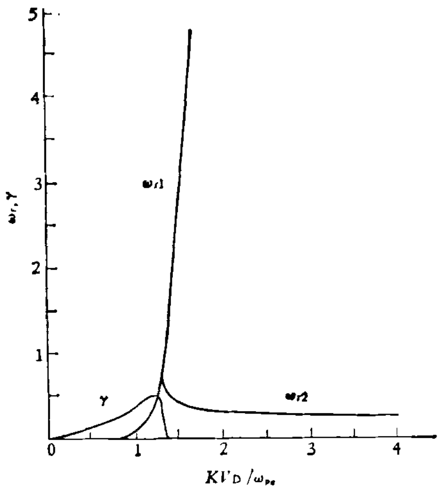

图 5　当 $m/M = 1/1800$, $V_{the}/V_D = 0.5$ 时不稳定性增长率 γ 的变化

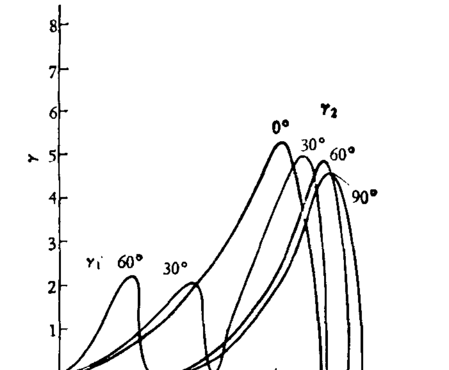

图 6　当 $\omega_{Be}/\omega_{pe} = 0.71$ 时，角度 θ 取不同值的情况下 γ 的变化

在色散关系 (8) 式中，由于考虑了磁场 B^0 的作用情况就稍复杂一点．我们计算了 $\omega_{Be}/\omega_{pe} = 0.71$ 的情况，其结果如图 6 所示．由图

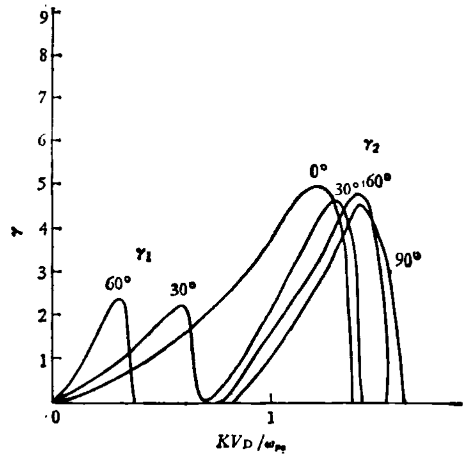

图7 当 $\omega_{Be}/\omega_{pe}=0.71$ 和 $V_{the}/V_D=0.5$，而θ取不同值时，增长率γ的变化

可见除了 $\theta=0°$ 之外，这里出现了两个不稳定性分支 γ_1 和 γ_2——长波分支和短波分支．随着θ的增加，分支 γ_2 的极大值逐渐减小，所对应的 $\frac{KV_D}{\omega_{pe}}$ 值逐渐加大，但分支 γ_1 的变化则相反．

色散关系 (5) 式比起 (8) 式来情况就更复杂了，除了磁场的作用外，还有热速度的影响．我们在 $\omega_{Be}/\omega_{pe}=0.71$ 的条件下，仍然计算了 $V_{the}/V_D=0.5$，1 两种情况，其结果如图 7 和图 8 所示．由图 6 和图 7 比较可以看出，由于热速度的作用，不稳定性分支 γ_2 在 k 空间里的范围扩大了，这种情况与图 4 或图 5 相同．但

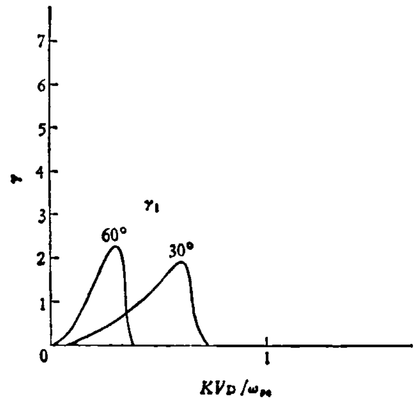

图8 当 $\omega_{Be}/\omega_{pe}=0.71$ 和$V_{the}/V_D=1$，θ取不同值时，增长率γ的变化

分支 γ_1 没有明显变化，这表明此分支对于热速度的影响不敏感．这点由图 8 可以更清楚地看出，此时分支 γ_2 已经完全消失，只剩下不稳定性分支 γ_1．

本工作的计算部分是由朱永康和龙永兴两同志完成的，特表谢意．

参考文献

[1] A. B. Mikhailovskii, Theory of Plasma Instabilities, Consultants Bureau, New York-London, 1(1974), 11.
[2] A. A. Веденов и др., *УФН*, **73** (1961), 701.
[3] A. B. Mikhailovskii, Theory of Plasma Instabilities, Consultants Bureau, New York-London, 1(1974), 131.

经典系统和 Ising 模型的序参数与关联函数

刘家冈1)　　林　磊
（中国科学院物理研究所）
1981 年 7 月 16 日收到

一、引　　言

1965 年，Suzuki[1] 导出适用于 Ising 模型及其他经典系统关联函数的严格公式．近年来，作者之一[2,3] 将 Suzuki 的公式展开后用在液晶中，解释了向列相 (N)—各向同性液相 (I) 相变前行为的一些实验．最近，张昭庆等[4] 又将

1) 现在北京林学院基础部工作．