

量子力学中的引力和惯性

——介绍 COW 实验

胡 华 琛 (中国科学院原子能研究所)

一、引 言

大家知道量子力学是研究微观世界物理现象的最基本的理论,而爱因斯坦的广义相对论实质上就是相对性的万有引力理论,它是一个很完美而且内在逻辑性很强的理论,这两个理论是完全独立发展起来的.尽管爱因斯坦等人做了很多努力,但迄至最近以前,万有引力现象与微观世界的物理现象从未发生过任何实验联系.

对于一个物理体系,如果具有作用量纲的“自然”动力学变量如[时间] \times [能量]=[长度] \times [动量]=[角动量]具有可以与普朗克常数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ 相比的数值时,则该体系的行为必须要用量子力学来描述.普朗克常数是个“小”量,这意味着宏观世界中的作用量当用 h 为单位量度时,就会出现非常大的数值.举例来说当我们考虑一个小的但却是宏观的谐振子,其质量为 1g ,最大速度为 1cm/s ,而最大振幅为 $x = 1\text{cm}$,因此最大的动量是 $p = 1\text{g}\cdot\text{cm/s}$,量 $x \cdot p = 1\text{erg}\cdot\text{s}$,而如果用量子的尺度来衡量时,它就是一个大于 $10^{26} h$ 的作用变量,因此只有在讨论原子、分子和原子核的物理行为时必须要用量子力学.人们知道自然界中尚存在着一种引起宇宙中一切物体之间相互吸引的引力场,按照牛顿所提出的万有引力定律,两质点之间引力与它们的质量的乘积成正比,而与它们之间的距离平方成反比.确定两点状带电物体之间的静电相互作用的库仑定律与万有引力定律形式相似,计算表明两个质子之间的万

有引力与静电力的比值(与两个质子之间的距离无关)为 8.1×10^{-37} .这两个力的强度比值是如此之小,因此在有电磁相互作用时,我们完全忽略万有引力的影响,只有当其他已知力都不起作用时,譬如两个很大的电中性物体隔开的距离远大于一般原子距离时,它们之间的万有引力才起作用.因此万有引力现象与微观范围内影响物质结构的其他作用力在作用量的量级上相差很远,这使得从表面看来研究微观世界的量子力学与万有引力之间似乎毫无关系,果真是这样的吗?本文将介绍由 R. Colella, A. W. Overhauser 和 S. A. Werner 等三位科学家用中子干涉仪所作的实验(即著名的 COW 实验).它们通过测量在地球引力场作用下中子波的相移,把量子力学与万有引力很巧妙地联系起来.

从量子力学的观点来看,中子是一种物质波,它的德布罗意波长 $\lambda = h/p$, p 为中子的动量.例如从反应堆引出的热中子其动能约为 0.025eV ,相当的中子速度 v 为 2200cm/s ,它的波长为 1.8 \AA .一般晶体的晶格间距大约为几个 \AA ,因此在晶体中中子波可以产生布拉格衍射.如果将一束中子入射到中子干涉仪的一块晶片上,它将分解为两个相干的中子束,它们分别在离开地面的两个不同高度上传播,例如两束高度相差 1cm ,则其重力的位能差约为其动能的 10^{-7} 倍,而如果中子波在整个干涉仪中的 10cm 行程中都保持相干,则它在这段距离内应作大约 10^9 次振动;此时由于两个束的重力势不同,它的影响将使其中离地面较高的一束振动次数减少了 10^7 分之一,也就是说,这两束不

同高度的中子波的振动次数将相差约 100 次，这个相位差可以由计数管记录的中子波强度 $|\psi|^2$ 的周期性变化精确地定出来。

这就是实验的巧妙之点；它把尺度相差非常大的两个范畴内的物理现象结合起来了，这就是 R. Colella, A. W. Overhauser 及 S. A. Werner 等人所作的 COW 实验，下面我们更详细地介绍这一实验内容。

二、中子干涉仪原理

图 1 为中子干涉仪的草图，干涉仪是由 5—10cm 见方的完美的单晶硅块用金刚石刀具雕出的，留下三个垂直突起的耳片，由晶体的底部把它们联结着，然后再将底部沾在防振衬垫上，耳片的切面与中子的强反射面(002)晶面垂直。片的厚度约为零点几厘米，片间距离 d_1 与 d_2 一般为几个厘米，距离的精确度要达到 $1\mu\text{m}$ 。当一束准直的单色中子沿着直线 SA 射入第一个晶片后，它将产生布拉格衍射，这时一束中子将分裂为两束相干的中子束——透射束与衍射束。透射束与衍射束分别射到第二个晶片上的 B 点与 C 点后又各自分裂为两束相干中子束，其中的两束相干中子射入第三个硅片后相叠并在 D 点附近发生相干，然后又分裂成两束中子射出，它们的强度分别由探测器(这儿用的是 He^3 计数管) c_2, c_3 记录。若由于某种作用势的存在，使得经由路径 I 的中子束与路径 II 的中子束的光程长产生差别，这时两束中子间将产生相对的相位移动，这样由探测器 c_2 与 c_3 测出的中子束

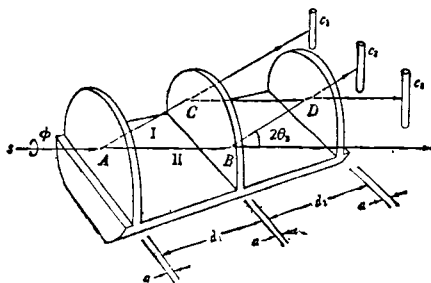


图 1 中子干涉仪草图
A B 取南北方向

强度将发生变化，探测器 c_1 是用来辅助定干涉仪位置的^[1-3]。中子动力学衍射理论表明^[2]，探测器 c_2 与 c_3 记录的中子强度是相移 β 的函数：

$$I_2 = \gamma - \alpha \cos \beta \quad (1)$$

$$I_3 = \alpha(1 + \cos \beta), \quad (2)$$

常数 α 和 γ 与入射中子强度，晶体的结构还有硅的中子——核散射长度有关。

为了保证给定波长(大约几个 Å)的中子能在晶体内产生布拉格衍射，三个晶片要精确平行，其角度偏离不可超过 0.1arc s。因而它们必需从一块理想单晶上雕出来，晶体的尺度大约是 5 至 10cm 见方，一般说来，要找到这样大的一块理想单晶是很困难的；仅是由于近代固态电子学的发展，才能生长出这样高品质的商用大单晶。第二个与精确度有关的因素是要将晶片的表面抛光，其精度要求达波长的几分之一，第三个要求为入射中子束是单色的， $\Delta\lambda/\lambda \approx 0.01$ ，这可以用适当的布拉格衍射把所需的中子从反应堆“白光”中分出。在 COW 实验中入射中子的波长 $\lambda = 1.4 \text{ \AA}$ ，硅片厚度 $a = 2.464 \pm 0.002\text{mm}$ ，片的间距 $d = d_1 = d_2 = 34.518 \pm 0.002\text{mm}$ 。

三、实验的理论出发点

从经典的角度来说，在转动着的地球的引力场作用下中子运动的哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2m_i} - G \frac{M m_g}{r} - \omega \cdot L, \quad (3)$$

在此 p 是中子的动量， $L = r \times p$ 是中子对地球中心 ($r = 0$) 运动的角动量， ω 是地球转动的角速度 $\omega \cdot L$ 是中子在科里奥利力作用下的动能。M 是地球的质量， m_i 与 m_g 分别是中子的惯性质量与引力质量。从认识论的观点来看，人们至少不能马上相信将引力势能直接引入描写量子现象的哈密顿量中来时是否正确，因为它还缺少直接的证明，我们暂且假设它在量子力学范畴内也是正确的，然后再看由此得出的理论预言是否与实验符合。此外等效原理还要求公式(3)中的惯性质量 m_i 与引力质量 m_g 相

等。

由于中子在干涉仪内走的距离远远小于地球的半径 R , 我们可以将第 (3) 式改写为

$$H = \frac{p^2}{2m_1} + m_1 g_0 \cdot r - \omega \cdot L + V_0, \quad (4)$$

V_0 是地面上某参考高度 (例如干涉仪中心) 的引力势能, g_0 是重力加速度。

为了计算中子干涉仪实验中的相移^[2], 人们假设具有动量 p 的中子的德布罗意波的波矢量 k 有下列关系:

$$p = \hbar k, \quad (5)$$

在此 \hbar 是普朗克常数除以 2π 。从图 1 可以看出, 中子的路径 I 与 II 将分别包含水平线段与倾斜线段两部分, 当干涉仪以入射中子束 (AB) 为轴旋转一定角度 ϕ 时, 两种路径的倾斜线段 AC 与 BD 的平均重力势是一样的, 但路径 I 的水平部分 CD 与路径 II 的水平部分 AB 相对于地球表面的高度不同, 因此两者的重力势能不同, 所以按路径 ACD 运动与按路径 ABD 运动的中子其相位差 β 为

$$\beta = \frac{1}{\hbar} \int_{ACD} p \cdot dr - \frac{1}{\hbar} \int_{ABD} p \cdot dr - \frac{1}{\hbar} \oint p \cdot dr. \quad (6)$$

由引力引起的相移 β_{grav} (见附录) 为

$$\beta_{\text{grav}} = -2\pi m_1 m_g (g/\hbar^2) \lambda_0 A' \sin \phi \equiv -q_{\text{grav}} \sin \phi. \quad (7)$$

面积 A' 由下式给出:

$$A' = (2d^2 + 2ad) \text{tg} \theta_B. \quad (8)$$

当中子干涉仪的平面 $ABCD$ 为水平时 ϕ 角定义为零。式 (7) 中 λ_0 为实验室坐标系内中子的波长:

$$\lambda_0 = h/m_1 v; \quad (9)$$

θ_B 是布拉格角。

由于地球的旋转对相移的贡献为 β_{sagnac} (推导见附录):

$$\beta_{\text{sagnac}} = \frac{4\pi m_1}{\hbar} \omega \cdot A', \quad (10)$$

式中 A' 是干涉仪内两条路径 I, II 的中子的运动轨迹所包的面积的法向矢量。

此外, 由于干涉仪自身重量使干涉仪有轻微扭曲而造成的相移为 β_{bend} 。

因此在 COW 实验中, 由于干涉仪以入射中子束 AB 为轴旋转而使经由路径 ACD 的中子束与路径 ABD 的中子束的总相位差 $\beta_{\text{总}} = \beta_{\text{grav}} + \beta_{\text{sagnac}} + \beta_{\text{bend}}$ 。将干涉仪的轴 (入射束方向) 对准本地区的正南方向时, 因为 β_{sagnac} 与 β_{grav} 随旋转角 ϕ 的变化关系不一样, β_{sagnac} 可以很容易地被分开。另外, β_{bend} 可以由在干涉仪的第二个与第三个耳片间加塑料片用 X 射线射入干涉仪内测得。

四、实验结果^[2-6]

图 2 和图 3 分别画出在波长 $\lambda_0 = 1.060 \text{ \AA}$ 和 1.419 \AA 时, 由探测器 c_3 所记录的中子强度的计数与干涉仪旋转角 ϕ 的关系。数据是经过反复 5 次测量后得出的, 共花了 75 小时。可以看出实验的稳定性很好。中子计数率随 ϕ 角变化的振荡频率可以由傅里叶变换求出。当 $\phi = 30^\circ$ 时, 对 $\lambda_0 = 1.06 \text{ \AA}$ 的中子来说, $\theta_B \approx 16^\circ$, $A' = 6.9 \text{ cm}^2$, 从图 2 可粗略看出, 中子自

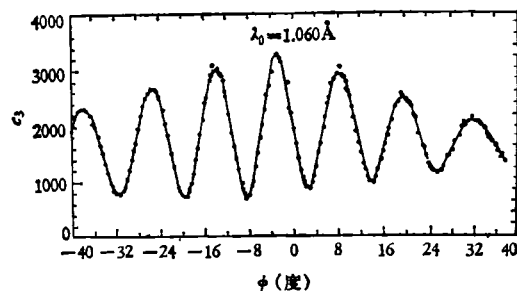


图 2 在中子波长 $\lambda_0 = 1.060 \text{ \AA}$ 时由引力引起的量子干涉实验 (每个实验点的计数时间大约为 5 分钟)

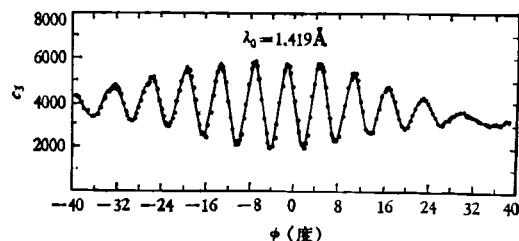


图 3 在中子波长 $\lambda_0 = 1.419 \text{ \AA}$ 时由引力引起的量子干涉实验 (每个实验点的计数时间大约为 7 分钟)

0 到 30° 间强度变化经过 3.2 个振荡周期,也就是 $\beta \approx -5.4\pi \text{ rad}$; 对 $\lambda_0 = 1.419 \text{ \AA}$ 的中子来说, $\theta_B \approx 22^\circ$, $A' \approx 10 \text{ cm}^2$, 从图 3 中可看出 $\beta \approx -9.6\pi \text{ rad}$, 即中子波长愈长, 相差角也越大, 这与理论公式 (7) 的结论一致. 在 ϕ 角大时, 图中曲线的反差 (指极大和极小之间的差别) 变小, 它是由于干涉仪转动时由它自身的重量引起干涉仪极轻微的扭曲造成的. β_{sagnac} 是很小的, 它至多只有引力引起的位移的 2%. β_{bend} 为引力引起相移的 7%, 这两种原因所造成的相移可以用上述的实验方法从总相移中去掉. 最后, 我们可以从公式 (7) 中看出地球引力引起的相移与中子引力质量与惯性质量的乘积 $m_i m_g$ 有关. 当入射中子波长为 λ_0 时, 由于 (7) 式其它参数都是已知的, 因此可以通过测得的 β_{grav} 定出 $(m_i m_g)^{1/2}$. 由实验定出的 $(m_i m_g)^{1/2} = (1.675 \pm 0.003) \times 10^{-24} \text{ g}$, 此值与通过质谱分析测量质子与氘核的质量, 并按下式所求得的中子质量

$m_n = m_D - m_p + E_r/c^2 = 1.6747 \times 10^{-24} \text{ g}$ 符合得很好. (氘核结合能是氢捕获中子后放出的 γ 射线能量 $E_r = 2.23 \text{ MeV}$)

五、结 论

COW 实验证实, 牛顿势 $mg_0 \cdot r$ 必须而且可以包含在薛定谔方程中, 此势对中子波函数的相位影响与其它势引入薛定谔方程的效果完全一样. 而等效原理是这一结果中最有深刻涵义的东西.

等效原理认为在处于均匀的恒定引力场中的惯性参照系内和不存在引力场时以恒定加速度运动的参照系内, 一切物理现象的发生完全相同 (在相同的条件下), 因此引力质量与惯性质量必须恒等. Eatvös 和 Dicke 两人在宏观尺度内以非常高的精确度证明了这一点^[9], 但在 COW 实验以前所有证明等效原理的实验都是在经典范畴内, 实验结果与普朗克常数无关. 在 COW 实验中引力引起的相移 β_{grav} 与 $m_i m_g$ 有关. 而由地球自转引起的相移 β_{sagnac} 与 m_i

有关. 将两者结合起来即证明了引力质量与惯性质量是相等的. 由于相位移动与普朗克常数的数值有关, 因此 COW 实验是量子力学范畴内等效原理成立的一个很好验证.

附录: 中子相位移动公式的推导^[2]

第三节中已经指出, 在旋转着的地球引力场作用下中子运动的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m_i} + m_g g_0 \cdot r - \omega \cdot L + V_0 \quad (1')$$

经典的哈密顿运动方程为

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p}; \text{ 和 } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} \quad (2')$$

在此加点是表示对时间的微分. \dot{r} 是旋转的地球坐标系的中子速度. 从 (2') 式的第一个方程给出正则动量

$$p = m_i \dot{r} + m_i \omega \times r \quad (3')$$

从第二个方程给出动量的时间微商

$$\dot{p} = m_g g_0 - \omega \times p \quad (4')$$

将 (3') 式代入 (4') 式可得在旋转坐标系内经典粒子的运动方程:

$$m_i \ddot{r} = m_g g_0 - m_i \omega \times (\omega \times r) - 2m_i \omega \times \dot{r} \quad (5')$$

因此, 哈密顿中的 $-\omega \cdot L$ 项给出离心加速度与科里奥利加速度两项, 由于中子在干涉仪中运动的距离和地球的半径相比非常之小, 我们可以定义一个有效的引力加速度:

$$g = g_0 + (m_i/m_g)\omega \times (\omega \times R) \quad (6')$$

g 与位置 r 无关, 在此假设下我们可以解出在旋转的地球坐标系内中子局域运动方程 (5') (保留到 ω 的一次项), 方程的解是

$$r = r_0 + V_0 t + \frac{1}{2} (g t)^2 + \frac{1}{3} (\omega t^2 \dot{\omega} \times g) \quad (7')$$

$\dot{\omega}$ 是地球旋转角速度单位矢量. 由于在此实验中热中子穿过干涉仪的时间约为 $5 \times 10^{-9} \text{ s}$, 又一个恒星日为 23 时 56 秒, 所以 $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. 因此 (7') 式中包含 ω 的那项比 $\frac{1}{2} g t^2$ 项小 10^{-9} 倍, 因此科里奥利力对这样小距离内的中子运动轨迹的影响可以忽略. 然而我们在下面将看出, 在考虑中子相移的效应时它决不能忽略.

为了计算干涉仪实验中的中子相移, 人们假设具有动量 p 的中子的德布罗意波的波矢量 k 有下列关系:

$$p = \hbar k \quad (8')$$

从图 1 与图 4 可以看出, 当干涉仪绕入射中子束旋转

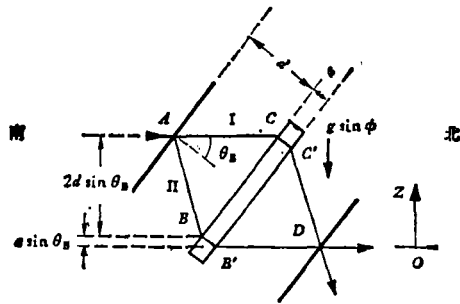


图4 COW 实验草图
(较高的一束 $ACC'D$ 称为 I 束, 较低的一束 $ABB'D$ 称为 II 束)

角度 ϕ 时¹⁾, 产生一个引力场, 它在中子束平面上的分量为 $g \sin \phi$, 按路径 $ACC'D$ 传播的中子波与按路径 $ABB'D$ 传播的中子波的相移

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\hbar} \int_{ACC'D} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{\hbar} \int_{ABB'D} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (9')$$

围绕路径 $ACC'DB'BA$ 线积分内的中子动量 \mathbf{p} 可由 (3') 式给出. 相移包含两项

$$\beta = \frac{m_i}{\hbar} \oint \dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{m_i}{\hbar} \oint (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (10')$$

速度 $\dot{\mathbf{r}} = v$ 可将方程(7')微分后得出. 在高次近似的情况下, 我们认为中子在干涉仪的两耳片间的运动轨迹为直线而不是抛物线. 从图4看出当干涉仪绕入射中子束旋转角度 ϕ 时, 若以 $B'D$ 的高度标志为零, 则路径 AC 的高度为 $(2d + a) \sin \theta_B \times \sin \phi$, 路径 AC 与路径 $B'D$ 的中子速度差

$$v_{AC} - v_{B'D} = -\frac{m_g (2d + a) \sin \theta_B g}{m_i v_0} \sin \phi.$$

CC' 与 BB' 的平均高度相差 $2d \sin \theta_B \sin \phi$, AB 的平均高度为 $(d + a) \sin \theta_B \sin \phi$, $C'D$ 的平均高度为 $d \sin \theta_B \sin \phi$, θ_B 为布拉格角, 因此 (10') 式右边第一项为

$$\begin{aligned} \beta_{grav} &= \frac{m_i}{\hbar} \oint \dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{m_i}{\hbar} \left[(v_{AC} - v_{B'D}) \frac{d}{\cos \theta_B} + (v_{CC'} - v_{BB'}) a \right. \\ &\quad \left. + (v_{C'D} - v_{AB}) \frac{d}{\cos \theta_B} \right] \\ &= \frac{m_i}{\hbar} \times \frac{m_g}{m_i} \left[-\frac{(2d + a) \sin \theta_B g}{v_0} \left(\frac{d}{\cos \theta_B} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2d \sin \theta_B g}{v_0 \cos \theta_B} a + \frac{a \sin \theta_B g}{v_0} \left(\frac{d}{\cos \theta_B} \right) \right] \sin \phi \\ &= -\frac{m_g g}{\hbar} \left(\frac{2d^2 + 2ad}{v_0} \right) \text{tg} \theta_B \sin \phi \end{aligned}$$

$$= -2\pi m_i m_g \left(\frac{g}{\hbar^2} \right) \lambda_0 A' \sin \phi \equiv -g_{grav} \sin \phi. \quad (11')$$

面积 A' 由下式给出:

$$A' = (2d^2 + 2ad) \text{tg} \theta_B. \quad (12')$$

实验室坐标系内的中子波长 λ_0 与中子速度 v_0 有关:

$$\lambda_0 = \frac{\hbar}{mv_0}.$$

方程 (10') 中的右边第二项称为 β_{Sagnac} .

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Sagnac}} &= \frac{m_i}{\hbar} \oint (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{m_i}{\hbar} \boldsymbol{\omega} \cdot \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \\ &= \frac{4\pi m_i}{\hbar} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}', \end{aligned} \quad (13')$$

\mathbf{A}' 是干涉仪内两条路径 I, II 的中子运动轨迹所包的面积的法向矢量.

参 考 文 献

- [1] S. A. Werner, *Physics Today*, Dec. (1980), 23.
- [2] J. L. Staudenmann, S. A. Werner, R. Colella and A. W. Overhauser, *Phys. Rev. A*, 21 (1980), 1419.
- [3] D. M. Greenberger, A. W. Overhauser, 科学 (Scientific American 中译本), 9 (1980), 26.
- [4] A. W. Overhauser, R. Colella, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974), 1237.
- [5] R. Colella, A. W. Overhauser, S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.*, 34 (1975), 1472.
- [6] S. A. Werner, J. L. Staudenmann, R. Colella, *Phys. Rev. Lett.*, 42 (1979), 1103.
- [7] R. Eötvös, *Math. Nat. Ber. Ungarn*, 8 (1890), 65.
- [8] R. Eötvös, D. Pekarand. E. Fekete, *Ann. Phys. (N. Y.)*, 68 (1922), 11.
- [9] P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, *Ann. Phys. (N. Y.)*, 26 (1967), 442.

(上接第 426 页)

- [3] S. Kacand, *Fatigue Failure of Metal*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, (1978), 52, 68, 173.
- [4] 冯端、王业宁、丘第荣, 金属物理(下册), 科学出版社, (1975), 769.
- [5] P. J. Woods, *Phil. Mag.*, 28 (1973), 155.
- [6] A. T. Winter, *The Mechanics and Physics of Fracture*, Churchill College, Cambridge, (1975).
- [7] J. Lankford, *Met. Trans.*, 4 (1973), 553.
- [8] C. Laird, G. C. Smith, *Phil. Mag.*, 7 (1962), 847.
- [9] C. J. Beever, *Metal Science*, 11 (1977), 362.

1) 当干涉仪的平面 $abcdje$ 为水平时, 定义 ϕ 为零.