

强耦合超导理论的物理基础 (II)

龚 昌 德

(南京大学物理系)

四、强耦合理论基本方程

在强耦合的情形下并且考虑声子作用的推迟效应,单粒子激发谱方程(15)中的 $Z(\omega)$ 和 $\Delta(\omega)$ 应当仔细地分析电声子作用求获. 因电声子作用使 $\omega \rightarrow Z(\omega)\omega$, 故其差

$$\omega - Z(\omega)\omega = [1 - Z(\omega)]\omega$$

乃是由于电声子作用引起的修正, 这种修正应当和 $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ 成正比. 其次, 在没有电声子耦合时 $\Delta = 0$, 电声子相互作用和屏蔽库仑作用一起产生了 $Z(\omega)\Delta(\omega)$ 项, 这项应当包括两种互作用的贡献; 电声子互作用的贡献也应当和 $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ 成正比, 屏蔽库仑作用的贡献应当和 $N(0)V_c$ 成正比, V_c 是屏蔽库仑势的平均值. 理论分析表明, 修正项 $[1 - Z(\omega)]\omega$ 和 $Z(\omega)\Delta(\omega)$ 满足下面联立方程^[4]:

$$[1 - Z(\omega)]\omega = \int_{\Delta_0}^{\infty} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right] \times \int_0^{\infty} d\omega_0 \alpha^2(\omega_0) F(\omega_0) \left[\frac{1}{\omega' + \omega + \omega_0 - i\delta} - \frac{1}{\omega' - \omega + \omega_0 - i\delta} \right], \quad (16)$$

$$Z(\omega)\Delta(\omega) = \int_{\Delta_0}^{\infty} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right] \times \int_0^{\infty} d\omega_0 \alpha^2(\omega_0) F(\omega_0) \times \left[\frac{1}{\omega' + \omega + \omega_0 - i\delta} + \frac{1}{\omega' + \omega_0 - \omega - i\delta} \right] - N(0)U_c \int_{\Delta_0}^{\omega_c} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right], \quad (17)$$

这里 $N(0)$ 是费密面准粒子态密度; Δ_0 为能物理

隙的实测值, 在求解上面方程时要求 $\Delta(\Delta_0) = \Delta_0$. ω_c 为截止能量, 在计算时取 $\omega_c = 10\omega_D$; U_c 是大于 ω_c 以外的贡献导致的修正后的屏蔽库仑势, 它和屏蔽库仑势 V_c 的关系为

$$U_c = \frac{V_c}{1 + N(0)V_c \ln E_F/\omega_c}, \quad (18)$$

其中 E_F 是费密能. 由于 $E_F \gg \omega_c$, 所以修正后的屏蔽库仑势比屏蔽库仑势弱, 因子

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right]$$

和

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\Delta(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right]$$

来源于能谱结构的变化(2)式, 而因子 $1/(\omega' + \omega + \omega_0 - i\delta)$ 及 $1/(\omega' - \omega + \omega_0 - i\delta)$ 来源于电声子相互作用的传播因子.

求解(16),(17)两式得到 $Z(\omega)$ 和 $\Delta(\omega)$, 把它们代入(15)式求解 ω 就得到激发谱. 上面联立方程中出现的参量 $\alpha^2(\omega)$ 应当预先给出, 要从理论上求这个参量是困难的, 而实验上尚无直接的办法. 但由于此参量是和声子态密度函数 $F(\omega)$ 一起以乘积形式出现, 因而可以通过下面方法求出^[5]. 逐步试探 $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ 的形式, 使从方程组解出的 $\Delta(\omega)$ 能够对于准粒子的超导态密度和正常态态密度的比值

$$\frac{N_s(\omega)}{N_n(\omega)} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2(\omega)}} \right\}$$

给出与实验符合的结果. 这个比值可以通过隧道效应来测定. 如果再从中子散射实验测出 $F(\omega)$, 就可以求出 $\alpha^2(\omega)$ 参量. 还有一个参量 $\mu^* = N(0)U_c$, 可以通过要求(16)和(17)式

的解 $\Delta(\omega)$ 在 $\omega = \Delta_0$ 处的值 $\Delta(\Delta_0)$ 等于 Δ_0 , 即 $\Delta(\Delta_0) = \Delta_0$ 来定出, 这样计算的工作量很大, 一般只能用计算机给出数值解.

为了说明 $\Delta(\omega)$ 的一般特征, 我们在这里给出一个简单情形的数字解结果. 假定 α^2 是常数, 而 $F(\omega)$ 是一单峰函数, 峰值位于 ω_0 , 宽度为 ω_1 , 其形式

$$F(\omega) \sim 1/[(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2],$$

如图 4(a) 所示. 把这样的谱函数代入 (16), (17), 先暂时略去 (17) 右方的第二项 (即库仑项) 的贡献, 算出

$$\Delta(\omega) = \Delta_1(\omega) + i\Delta_2(\omega),$$

并分别把它的实部 $\Delta_1(\omega)$ 和虚部 $\Delta_2(\omega)$ 画在图 4(b) 中. 由图可见, Δ_0 是 $\Delta_1(\omega)$ 的最低值. 在激发能较低时 $\omega \approx \Delta_0$, 电子激发不可能通过电声子相互作用发生真实的跃迁 (因 $\Delta_0 \ll \omega_0$), 因此 $\Delta_2(\omega) = 0$, 准粒子图象成立, 电声子相互作用只是修正了准粒子的能值. 因此这种修正的度量 $\Delta_1(\omega)$ 几乎是一恒定值 Δ_0 . 对于 $\omega < \omega_0$ 的激发, 大部分声子的频率都比激发的能量高, 按强迫振动理论, 晶格振动时和激发波同位相是主要的, 对应的电子间通过声子的间接相互作用是吸引作用, 因此在 $\omega < \omega_0$ 区间, $\Delta_1(\omega)$ 是正值. 当激发能逐渐升高 $\omega = \Delta_0 + \delta$, 且 δ 的大小已进入声子谱的变化区间以内, 此时, 激发可以通过电声子相互作用衰减成能量为 Δ_0 的电子和能量为 δ 的声子, 代表这种跃迁过程的修正项 $\Delta_2(\omega)$ 开始不等于零. 随着 ω 增加到 $\omega = \Delta_0 + \omega_0$ 附近, 由于声子态密度的峰值, 这种跃迁的可能性增大, 即 $\Delta_2(\omega)$ 增大, 此时能值的修正 $\Delta_1(\omega)$ 也因交换声子的共振性质而增大. 这正如在强迫振动现象中, 强迫力频率和自然频率接近时, 振幅增大的共振现象相似. 在 ω 继续增大以后, $\omega = \Delta_0 + \omega'$ ($\omega' > \omega_0$) 可能发生以下过程: (1) 激发衰减为能量为 Δ_0 的电子和 ω' 的声子, 这种跃迁过程的几率随 ω' 的增大而减弱, 这是因为声子态密度迅速减小的缘故. (2) 激发衰减为能量为 E ($E > \Delta_0$) 的电子和频率为 ω_0 的声子 ($E + \omega_0 = \omega$), 但由于电子激发的态密度在 Δ_0 附近

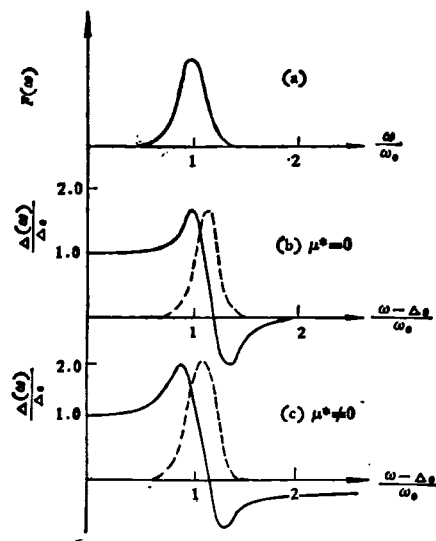


图 4

的凝聚性质, 这种过程的几率也是不大的. (3) 激发衰减为 Δ_0 的电子和频率分别为 ω_0 和 ω'' ($\omega_0 + \omega'' = \omega'$) 的声子, 对于 ω'' 声子由于和 (1) 同样的原因, 这种过程的几率也是小的, 只有当 $\omega' = 2\omega_0$ 时, 这种过程的几率才应当考虑. 如果略去这种多声子过程, 则从以上讨论可见, $\Delta_2(\omega)$ 将随 ω 的增大而趋于零. 再来看 $\Delta_1(\omega)$; 对 $\omega > \Delta_0 + \omega_0$ 的激发而言, 此时大部分声子的能量都比它低, 因而晶格振动和激发波反位相起主导作用, 相应的有效相互作用是排斥的. 作为这种电声子相互作用的度量 $\Delta_1(\omega)$ 变为负值, 以后随 ω 变大, $\Delta_1(\omega)$ 趋于零, 这可以直接从 (17) 式在 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 右边第一项趋于零看出.

(17) 式右方第二项是一实数, 因此库仑项的加入使 $\Delta_1(\omega)$ 趋于一负值如图 4(c) 所示, 它不会改变上面讨论的主要特征.

从以上简单的数字解的讨论可见, 我们决不能把 $\Delta(\omega)$ 简单地当作一实数并理解为能隙, 这只有在激发能较低 ($\omega \approx 0$) 时, 而且也只有当 $T = 0\text{K}$ 时才可能. 因为在 T 不为零时, 由于热声子和正常电子的出现, 电子激发可以通过和热声子的散射, 或和正常电子复合为电子对等机制发生跃迁, 因此即使在 $\omega = \Delta_0$ 处, $\Delta_2(\omega)$ 也不为零. 所以强耦合理论所得到的关

于能谱的方程(16)和(17)式要比简单的BCS理论更仔细、更全面地反映了电声子互作用的各个方面,因而也是更为精确的理论。

为了计算超导体的其他热物理性质,就必须把上面仅适用于绝对零度情形的方程(16),(17)式推广到 T 不等于零的情形。这和BCS理论一样,只要在方程(16),(17)式中对 ω' 的积分号下加入因子 $\tanh\omega'/2T$ 即可(这里仍然略去了热声子的贡献),利用这些方程所计算的 $Z(\omega, T)$ 和 $\Delta(\omega, T)$ 函数(它们都和温度有关)可以算出超导体的临界场 $H_c(T)$ 和导热率 κ 。在图5和图6中给出了强耦合理论所计算的结果^[6],它们要比BCS理论更为符合实验的结果。这里 κ_s/κ_n 的下降较陡是由于当强耦合超导体处于超导态时,准粒子通过和其他准粒子复合为电子对的跃迁机制,因而寿命变得比弱耦合超导体的短所造成。

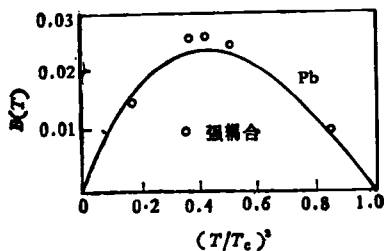


图 5

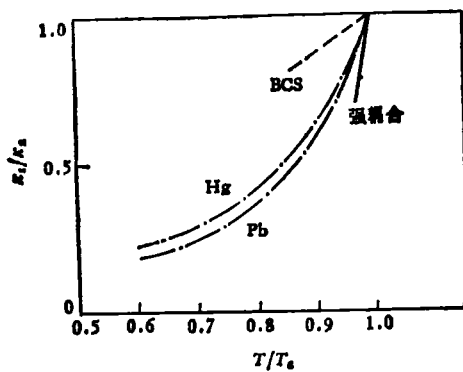


图 6

在图7中给出的是强耦合理论所计算的超导态和正常态的电导率的比值,它能反映在一些特征值上的结构,这也是由于当激发能在

$$\omega = \Delta_0 + n\omega'_1$$

物理

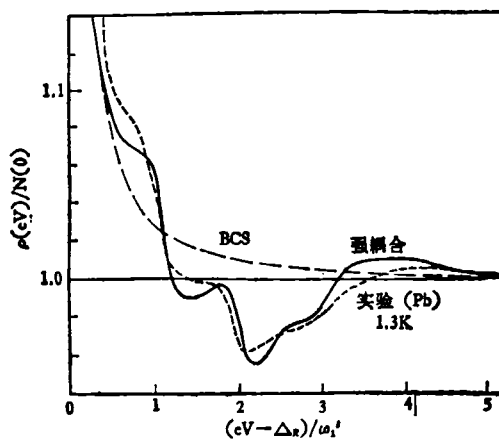


图 7

$$(\omega'_1 = 44 \times 10^{-3} eV)$$

附近,准粒子交换声子的共振特性和激发的衰减所导致的结果,前者使 $\Delta_1(\omega)$ 迅速降为零,而后者使 $\Delta_2(\omega)$ 迅速上升至峰值。

在表1中还给出了利用方程(16)和(17)(并引入 $\tanh\omega'/2T$ 因子以后)所计算的Pb和Hg的 $2\Delta(0)/T_c$ 值,同时列出了所用的各参量的数据,这里考虑了纵向声子和横向声子的 $F(\omega)$ 具有不同的峰值和宽度。计算结果与实验值相比也较符合。

表 1

偏振方式	声子谱峰值	峰的宽度	α'	μ^*	$2\Delta(0)/T$	$2\Delta(0)/T$
	ω_1 (mV)	ω_2 (mV)			计算值	实验值
横向	4.4	0.75	0.807	0.11	4.33	4.3
纵向	8.5	0.50	1.614			
横向	1.80	0.50	0.71	0.14	4.8	4.6
纵向	7.60	0.50	0.71			

五、对 T_c 的预测

利用强耦合超导理论(含温度的)基本方程还可以给出决定转变温度 T_c 的公式。为决定 T_c ,不必研究在 T_c 以下任何温度的一般情形。在 $T = T_c$ 邻近, $\Delta(\omega)$ 是小量,此时可在根式中略去 $\Delta^2(\omega)$ (同时略去热声子贡献,即不考虑声子的统计分布)。于是, $\Delta(\omega)$ 函数所满足的

方程近似地为

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = & \frac{1}{Z(\omega)} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \Delta(\omega') \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c} \\ & \times \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_0 \alpha^2(\omega_0) F(\omega_0) \left[\frac{P}{\omega' + \omega_0 + \omega} \right. \\ & \left. + \frac{P}{\omega' + \omega_0 - \omega} \right] \\ & - \frac{\mu^*}{Z(\omega)} \int_0^{\omega_c} \frac{d\omega'}{\omega'} \Delta(\omega') \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c}, \quad (19) \end{aligned}$$

这里 $\mu^* = N(0)U_c$, ω_{\max} 是声子态密度 $F(\omega_0)$ 的上限, 即 $F(\omega_{\max}) = 0$, 而 P 代表取积分的主值. 重正化函数 $Z(\omega)$ 满足的方程近似地为

$$\begin{aligned} [1 - Z(\omega)]\omega = & \int_0^{\infty} d\omega' \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_0 \alpha^2(\omega_0) F(\omega_0) \\ & \times \left[\frac{P}{\omega' + \omega_0 + \omega} - \frac{P}{\omega' + \omega_0 - \omega} \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

现在可以用 $T = 0\text{K}$ 情形的方程组 (16) 和 (17) 所解得的 $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ 和 μ^* 代到上面两个方程中, 分别求出 $Z(\omega)$ 和 $\Delta(\omega)$. 由于 (19) 是 $\Delta(\omega)$ 的齐次积分方程, 它存在有不为零的解的条件是: 它所对应的齐次代数方程的系数行列式为零. 这个条件给出转变温度 T_c . 为要给出较精确的 T_c , (19) 式所对应的齐次代数方程组必须足够地多, 一般地只能给出数字解. 但也可以从如下特殊情形的讨论中, 试探地找出它的简单表示式.

设在激发能 $\omega > \omega_D$ 时, 能隙函数可以略去 (这一点对 BCS 的激发谱是明显的), 而在 $\omega < \omega_D$ 时, $\Delta(\omega) = \Delta_0$, 即

$$\Delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega > \omega_D, \\ \Delta_0 & \omega < \omega_D. \end{cases} \quad (21)$$

1. 如果不考虑电声子作用的重正化效应, 即 $Z(\omega) = 1$, 并且略去屏蔽排斥势的贡献 $U_c = 0$, 则取 (19) 在 $\omega \rightarrow 0$ 时的情形, 得到

$$\begin{aligned} 1 = & \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega'}{\omega'} \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c} \\ & \times 2 \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_0 \alpha^2(\omega_0) F(\omega_0) \frac{1}{\omega' + \omega_0}. \end{aligned}$$

由于在上面对 ω' 的积分中, 小的 ω' 值贡献是

主要的, 因而 $1/(\omega' + \omega_0)$ 因子中可略去 ω' , 而

$$2 \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_0 \frac{\alpha^2(\omega_0) F(\omega_0)}{\omega_0}$$

就是 (14) 式中的 λ , 因此上面方程变为

$$1 = \lambda \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega'}{\omega'} \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c},$$

此即 (4) 式, 其解为

$$T_c = 1.14\omega_D \exp(-1/\lambda).$$

这正是 BCS 理论所给出的公式, λ 即相当于 $N(0)V$.

2. 如果考虑重正化效应, 并仍然略去屏蔽库仑势的贡献, 则仍取 (19) 式 $\omega \rightarrow 0$ 的情形:

$$1 = \frac{\lambda}{Z(0)} \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega'}{\omega'} \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c}.$$

利用 (20) 式并取 $\omega \rightarrow 0$ 情形, 可以证明 $Z(0) = 1 + \lambda$, 因而上式给出的 T_c 公式变为

$$T_c = 1.14\omega_D \exp\left[-\frac{1 + \lambda}{\lambda}\right].$$

3. 如果把 U_c 也考虑进来, 则方程是

$$1 = \frac{\lambda - \mu^*}{1 + \lambda} \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega'}{\omega'} \operatorname{tgh} \frac{\omega'}{2T_c},$$

结果给出 T_c 的公式是

$$T_c = 1.14\omega_D \exp\left(-\frac{1 + \lambda}{\lambda - \mu^*}\right). \quad (22)$$

实际上, 在强耦合情形下, (21) 式的假定是不合适的, 因为 BCS 激发谱是不精确的. 在 $\omega > \omega_D$ 时, $\Delta(\omega)$ 不会等于零. 另一方面, 从 $\Delta(\omega)$ 存在不为零的解的条件中, 必然会出现各不同 ω 值的诸系数间的交叉情形, 因此声子作用和屏蔽库仑作用相互交缠的代表项会在决定 T_c 的方程中表现出来. 这从物理上来看是明显的: 由于库仑的排斥作用, 一对电子间的声子互作用造成的吸引势必受到影响, 因为其中任何一个电子不能充分地感受另一个所产生的极化场的吸引. 因此, 电子间的吸引作用将因库仑排斥相关性而减弱, 即 $\lambda \rightarrow \lambda(1 - \delta)$, δ 的大小应当和修正后的屏蔽库仑排斥作用的强度成正比, 即 $\delta = C_1 \mu^{*1}$, 这里 C_1 是一待定常

1) 实际上, 这只能作为一种假定, 因为在系数行列式的阶大于 2 的情形下, 必然会出现多种 $\lambda^m \mu^{*l}$ 的项, 结果导致 T_c 的表式复杂得多.

数。这一点在(22)式中并未考虑,因为该式中吸引作用和排斥作用仅仅以简单的相加形式 $[\lambda + (-\mu^*)]$ 出现,也就是说这两种作用互不影响,各自独立地作出贡献。对于这一点的修正,应当使(22)式中的

$$\lambda - \mu^* \rightarrow \lambda(1 - C_1\mu^*) - \mu^*$$

[注意: $1 + \lambda$ 因子来自重正化因子 $Z(0)$,它完全来自和声子的相互作用,而和屏蔽库仑作用无关,因此这里的 λ 无需修正]。其次, $Z(\omega)$ 的修正不能仅取 $\omega = 0$ 的值,而应当考虑各种频率下的贡献的平均效果。假定这种修正使 $Z(0) \rightarrow C_2 Z(0) = C_2(1 + \lambda)$ 。最后,积分上限在 ω_D 处截断[由于(21)式的假定]是带有任意性的,这里 C_2 和 C_3 , C_1 一样也是特定的常数。综合这些考虑,(22)式应当改成

$$T_c = C_3 \omega_D \exp \left[- \frac{C_2(1 + \lambda)}{\lambda - \mu^*(1 + C_1\lambda)} \right]. \quad (23)$$

这是(19)和(20)式的解的大致简单表式,McMillan正是给出象(23)式那样的 T_c 公式^[7]。更恰当的是应当把 $C_3 \omega_D \rightarrow f$,这里 f 是随 λ , μ^* 缓变的函数。

最后提一下关于同位素效应的问题。按BCS理论 $T_c \propto \omega_D \propto M^{-1/2}$,即同位素效应指数是一恒定常数 $1/2$ 。可是实验上对各种元素的同位素的 T_c 的测量给出的 $T_c \propto M^{-\alpha}$,其 α 值都不是 $1/2$,如

$$\alpha(\text{Zn}) = 0.45, \quad \alpha(\text{Sn}) = 0.47, \quad \alpha(\text{Pb}) = 0.48, \\ \alpha(\text{Mo}) = 0.33, \quad \alpha(\text{Os}) = 0.2.$$

有的元素没有同位素效应,有的甚至是负值,如

铀 $\alpha = -2.2 \pm 0.2$ 。在McMillan的 T_c 公式(23)中,除了 ω_D 和 M 有关($\omega_D \propto M^{-1/2}$)以外,还包含参量 $\mu^* = N(0)U_c$ 。根据(18)式, U_c 和 ω_c ($= 10\omega_D$)有关,因此在 T_c 和 M 的关系 $T_c \sim M^{-\alpha}$ 中,指数 α 不会简单地是一恒定值 $1/2$,利用(23)式容易得到 α 的表示式:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(1 + \lambda)(1 + C_1\lambda)C_2\mu^{*2}}{[\lambda - \mu^*(1 + C_1\lambda)]^2} \right\}.$$

McMillan利用数字求解方程(19),(20),并要求结果在最小平方偏差下和 T_c 公式(23)式所给的符合,这样就决定了常数值:

$$C_1 = 0.62, \quad C_2 = 1.04, \quad C_3 = 0.69.$$

把这些代入 α 的表示式,因此 α 和材料的 λ , μ^* 两个参量有关。鉴于括号中第二项是一正数,因而 $\alpha < 1/2$,这要比BCS理论预测的合理。以后于1975年,Allen和Dynes^[8]对于McMillan的 T_c 公式再次作了修正,其中不仅 ω_D 要代以声子频率的某种平均值,而且系数 C_3 还和 μ^* 有关,因此同位素指数 α 也要作出相应的修正。

参 考 文 献

- [4] Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ*, **39**(1960), 966, 1437; Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **117** (1960), 648.
- [5] W. L. McMillan and J. M. Rowell, *Superconductivity*, ed. R. D. Parks, Marcel Dekker, INC., New York, (1969), 593—595.
- [6] V. Ambegaokar and J. Woo, *Phys. Rev.*, **139** (1965), A1818.
- [7] W. L. McMillan, *Phys. Rev.* **167**(1968), 331.
- [8] P. B. Allen and R. C. Dynes, *J. Phys. C*, **8**(1975), L158; *Phys. Rev., B*, **12**(1975), 905.

光电倍增管的选择和使用 (I)

李 禄 华

(北京综合仪器厂)

引 言

随着科学技术的迅速发展,新的科技领域

物理

不断出现,光电倍增管的应用范围在日益扩大。各应用场合对光电倍增管提出了各种各样的要求,促进了光电倍增管研究与生产的发展。目前国际上制造光电倍增管的厂家,生产的品种有