

一种引力波天线的调谐方法

郑庆璋 崔世治

(中山大学物理系)

1981年7月3日收到

目前理论上预期的天体引力波源在低频段的引力辐射比较丰富^[1-4]。另一方面,目前使用的引力波天线绝大多数是机械共振天线,这类天线的 Q 值大都很高(10^4 以上),频带甚窄(当 $\nu \sim 10\text{Hz}$ 时, $\Delta\nu \leq 0.01\text{Hz}$),在对某一特定的窄带引力辐射进行探测时很容易失调^[5]。因此,为了更好地探测引力波,并做到容易对准和跟踪它,自然希望天线具有比较低的共振频率和能够在一定的频率范围内方便地调谐。

作者曾在扭摆天线^[6]的基础上研究了一种可调谐的引力波天线^[7],指出这种天线容易在 $1-10\text{Hz}$ 频率范围内调谐,这正是预期的天体物理过程所辐射的引力波的频谱峰值范围。

但是,上述天线系统是不能对纵模振动调谐的。因此,本文提出另一种可能的天线系统,从更普遍的角度研究它的运动情况,目的是希望不但能对扭摆式天线调谐,而且也可以对天线的纵模振动调谐。

一、一种可能的天线系统

为了便于理论分析,我们考虑一种理想化的天线系统(图1)。虽然实际天线可能比这复杂得多,但作为一种估计方法,所得结果对实际天线的设计仍然会有一定的指导意义。

如图1所示, M_1, M_2 为质量等于 m 的相同小球。两球间以质量可以忽略的弹簧联结,弹簧的原长为 $2L$, 倔强系数为 K 。此外,每一小球各用两条原长为 l_0 的弹性线在铅垂方向拉紧,弹性线的另一端分别固联于 A, B, C, D 各点上。假定弹性线拉紧后的张力为 T , 长

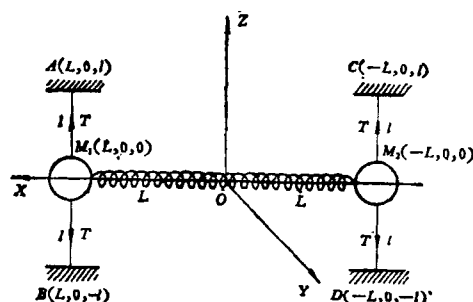


图1 一种可能的引力波天线系统

度为 l 。由于重力是一恒力,可以用适当的支承方式(如超导悬浮)抵消(图中没有画出),可以暂不考虑。

该系统是一个两体问题^[1],有六个自由度。为描述它的运动,选用如图1所示的坐标系 $OXYZ$ 为基本参考系: 原点 O 在系统平衡时的质心位置上, Z 轴铅直向上, X 轴沿 M_1, M_2

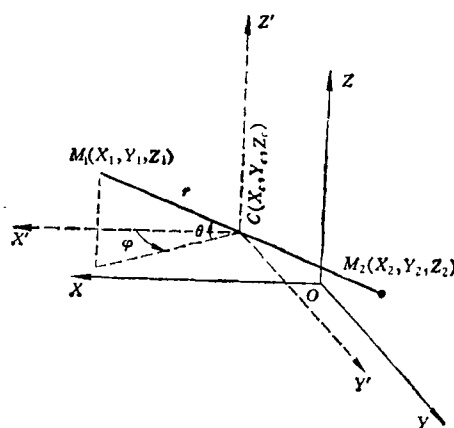


图2 基本坐标系与质心坐标系

1) 严格说来,在引力波作用下, A, B, C, D 四点不可能是固定不动的,因此这似乎是一个多体问题。但是,由于我们现在讨论的是共振型天线,与小球的运动相比, A, B, C, D 的运动可以忽略。

的连线, Y 轴的方向由右手法则决定. 当系统运动时, 质心由 O 运动到 C . 选质心坐标系 $CX'Y'Z'$ 为辅助参考系(如图 2 所示), 则两小球球心的坐标为

$$\begin{cases} X_1 = X_C + r \cos \theta \cos \varphi, \\ Y_1 = Y_C + r \cos \theta \sin \varphi, \\ Z_1 = Z_C + r \sin \theta; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} X_2 = X_C - r \cos \theta \cos \varphi, \\ Y_2 = Y_C - r \cos \theta \sin \varphi, \\ Z_2 = Z_C - r \sin \theta. \end{cases} \quad (2)$$

就是说, 我们选用 X_C, Y_C, Z_C 和 r, θ, φ 为广义坐标, (1) 式和 (2) 式为点应变换关系. 注意这里采用的球坐标与通常有些不同, 现在的 θ 是纬角不是极角, 即 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

二、系统的运动方程

首先写出系统的拉格朗日函数. 在一般情况下, 这个函数比较复杂. 但由于预期的引力波都很微弱, 在它的作用下, 系统的运动是很微小的^[1], 因此可以把 $X_C, Y_C, Z_C, (r-L), \theta, \varphi$ 和它们对时间的一次导数 $\dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 等作为一级无穷小量处理, 使问题得到简化. 此外, 由于暂不考虑重力的作用, 系统的势能只由三部分组成, 即: (1) 与小球 M_1 连结的两弹性线的弹性势能; (2) 与小球 M_2 连结的两弹性线的弹性势能; (3) 连结 M_1 和 M_2 的弹簧的弹性势能. 经过运算, 略去二级以上的无穷小项, 并注意弹性线的倔强系数 $k = T/(l-l_0)$, 得到系统的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = & m(\dot{X}_C^2 + \dot{Y}_C^2 + \dot{Z}_C^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ & - (2T/l)[X_C^2 + Y_C^2 + (r-L)^2 + r^2\varphi^2] \\ & - [2T/(l-l_0)][(l-l_0)^2 + Z_C^2 + r^2\theta^2] \\ & - 2K(r-L)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

利用拉格朗日方程, 即得本文所述的天线系统在小运动时的运动方程:

$$\ddot{X}_C + (2T/ml)X_C = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{Y}_C + (2T/ml)Y_C = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{Z}_C + [2T/m(l-l_0)]Z_C = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{r} + (2/m)(K - T/l)(r-L) = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} + (2T/ml)\varphi = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{\theta} + (2k/m)\theta = 0. \quad (9)$$

(各式中 K 与 k 分别是弹簧及弹性线的倔强系数.)

三、讨 论

1. (4)–(9) 各式均为典型的谐振动方程, 可见系统的各个自由度都作简谐振动. (4)–(6) 式反映的是质心运动, 通常认为对引力波的探测没有意义.

2. (9) 式是关于 θ 的方程, 因为 φ 值很小, 故它基本上反映了系统绕 Y 轴的摆动. 其频率为 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{2k/m}$, 与预加的张力 T 无关, 即不能通过改变 T 而对这个自由度的振动调谐.

3. (8) 式反映系统绕 Z 轴的摆动, 频率为 $\nu_z = (1/2\pi)\sqrt{2T/ml}$. 这个频率与外加张力 T 有关, 即可以由改变 T 而调谐. 事实上, 这就是文献[7]中所讨论过的扭摆在 $\mu = 0$ 时的情形.

4. (7) 式反映系统沿两小球联线的纵向振动, 也是简谐振动, 其频率为

$$\nu_n = (1/2\pi)\sqrt{(2/m)(K + T/l)}, \quad (10)$$

显然与外加张力 T 有关, 故系统的纵模振动也是可调谐的.

为了对纵模的可调谐范围作一些估计, 在 (10) 式中取 $l = 10\text{cm}$. 又设 $T = 0$ 时, $\nu_n = 10\text{Hz}$, 则当 $T = 10\text{mg}$ 时, $\nu_n = 12.3\text{Hz}$, 即可调谐的频率范围为 $10\text{--}12.3\text{Hz}$. 若 $T = 0$ 时, $\nu_n = 100\text{Hz}$, 则当 $T = 10\text{mg}$ 时, $\nu_n = 100.3\text{Hz}$, 即可调谐的频率范围仅为 $100\text{--}100.3\text{Hz}$. 由此可见, 这种天线系统仅在低频的情况下, 可调谐的效果才是比较显著的.

参 考 文 献

- [1] C. W. Misner et al., *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1978), Chap. 36.
- [2] 秦荣先, *物理*, 8(1979), 332.
- [3] G. Pizzella, *Nuovo Cimento*, 5 (1975), 369.
- [4] G. Papini, *Can. J. Phys.*, 52 (1974), 880.

- [5] H. Hirakawa et al., *Phys. Rev. D*, 17 (1978), 1919.
 [6] 郑庆璋、崔世治, *物理学报*, 29(1980); 1204.
 [7] 郑庆璋、崔世治, *中山大学学报 (自然科学版)*, 2

- (1980), 52.
 [8] C. W. Misner et al., *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973), Chap. 36, 37.

提拉法和导模法生长钛酸镧 ($\text{La}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$) 晶体

姜彦岛 张蕴芝 李津洲¹⁾

(中国科学院物理研究所)

1981年6月16日收到

$\text{La}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ 晶体是一种焦铌酸钙型层状结构的高温铁电体。在铁电体中,该晶体的居里温度最高(约 1500°C)。1972年 Kimura 等人用红外加热的浮区生长装置首先生长出直径为 6 毫米、长度为 50 毫米的 $\text{La}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ 晶体^[1]。该晶体具有优良的压电、电光和非线性光学特性^[2-4]。

我们用高频感应加热的提拉法生长了该晶体,研究了热场条件、籽晶取向和生长气氛等参数对晶体生长的影响,得到了 $\phi 17 \times 50$ 毫米的宏观完整的晶体(图 1)。另外,还用导模法生长了直径 11 毫米的圆柱形晶体(图 2)。并根据晶体的宏观完整性和镶嵌结构,对这两种方法所生长的晶体进行了比较。

一、实 验

采用纯度为 99.95% 的 La_2O_3 和 TiO_2 试剂,按照晶体的化学配比合成了原料。直径 50 毫米的铌坩埚既作为高频感应加热的发热体,又作为盛装原料的容器。炉内抽真空到 5×10^{-4} 托以上,然后充高纯氮气至 1.2 大气压(绝对压力)。原料在 1800°C 熔化以后,分别用提拉法和导模法生长晶体。所用的生长装置及有关生长参数如图 3 所示。这种装置曾成功地用于生长 Nd:YAG 晶体^[5]。炉温由控制系统自行调节,控温精度为 $\pm 0.5^\circ\text{C}$ ^[6]。晶体直径由人工控制。

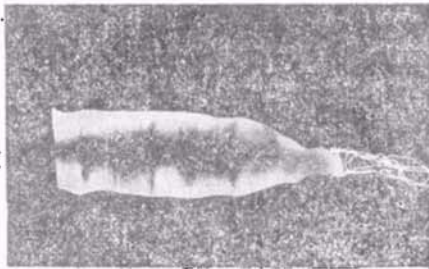


图 1 提拉法生长的 $\langle 100 \rangle$ 取向的晶体

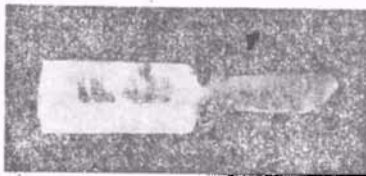


图 2 导模法生长的 $\langle 100 \rangle$ 取向的晶体

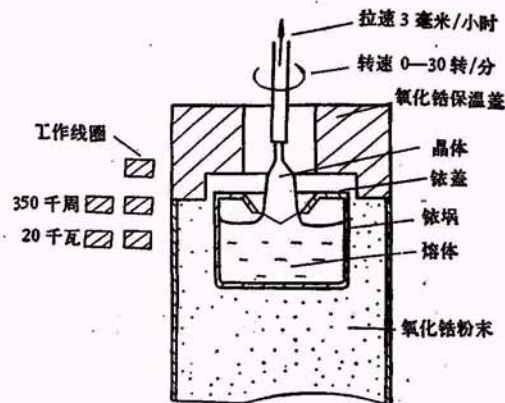


图 3 生长装置及有关实验参数

1) 舒启茂、夏鸿昶、吴星参加过部分工作。