

# 傅里叶变换光学基本原理讲座

## 第二讲 相因子判断法

钟 锡 华

(北京大学物理系)

表1 平面波和球面波在波前上的相因子

### 一、相因子判断法

原则上说,依据菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式,可以由一个已知波前导出另一个波前,譬如由衍射屏的输出场  $\tilde{U}_1(x, y)$  导出接收屏幕上的衍射场  $\tilde{U}(x', y')$ 。但实际上,这种积分运算通常是很复杂的,总需在一定条件下作近似处理,即使如此,能定量给出结果的情况目前也还为数不多。不过,我们注意到波场的主要特征体现在波函数的位相因子之中。如果将复杂波场的复振幅相因子与平面波或球面波的相因子作一对比,那么复杂波场就可看成是一系列平面波成分(或球面波成分)的迭加,因而也就变成人们在概念上容易掌握的一种波场了。尤其重要的是,复杂波场中各成分(不同方向的平面波和不同聚散程度的球面波)还可用透镜和稜镜等元件进行实际上的分离,这就便于人们对波前作进一步的处理。所谓相因子判断法,简单说来,就是根据波函数的相因子来判断波场的性质和分析衍射场的主要特征。这种方法要比衍射积分运算简便得多。在很多场合下只需要掌握衍射场的主要特征就够用了,在全息术中尤其如此。为此,我们必须熟悉(1)平面波函数的相因子,以及几种典型情况下球面波函数的相因子;(2)透镜和稜镜的位相变换函数。

### 二、傍轴与远场条件下 球面波的波前相因子

表1中(2),(3),(4)和(5)列出傍轴条件

波的类型 <sup>1)</sup>	特 征	相 因 子
(1) 平面波	传播方向 $(\theta_1, \theta_2)$ ; 当 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时	$\exp[ik(\sin\theta_1 x + \sin\theta_2 y)]$ ; (2.1)
(2) 发散球面波	中心在轴上, 坐标 $(0, 0, -z)$	$\exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$ (2.2)
(3) 会聚球面波	中心在轴上, 坐标 $(0, 0, z)$	$\exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$ (2.3)
(4) 发散球面波	中心在轴外, 坐标 $(x_0, y_0, -z)$	$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$ $\times \exp\left[ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z}\right]$ (2.4)
(5) 会聚球面波	中心在轴外, 坐标 $(x_0, y_0, z)$	$\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$ $\times \exp\left[-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z}\right]$ (2.5)

1) 五类波型分别见图 2.1 (a)-(e)。

下四种球面波的波前相因子,并将平面波的波前相因子列为首位(1)。所谓傍轴条件指的是点源位置  $(x_0, y_0)$  和场点位置  $(x, y)$  皆远远小于纵向距离  $z$ , 即

$$\rho_{(x_0, y_0)} \ll z, \rho_{(x, y)} \ll z.$$

现以轴外发散球面波为例谈一谈表中列出的波前函数是如何导出的。

如图 2.2 所示,通过  $O$  点的  $x_0 y_0$  平面为物平面,通过  $O'$  点的  $xy$  平面为波前,二者间距为  $z$ 。令物平面上任意光点  $Q(x_0, y_0)$  到场点  $P(x, y)$  的矢径为  $r$ ,物平面中心  $O$  到  $P$  的矢径为  $r_0$ ,  $Q$  到波前中心  $O'$  的矢径为  $r'_0$ , 它们的长度分别为

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2},$$

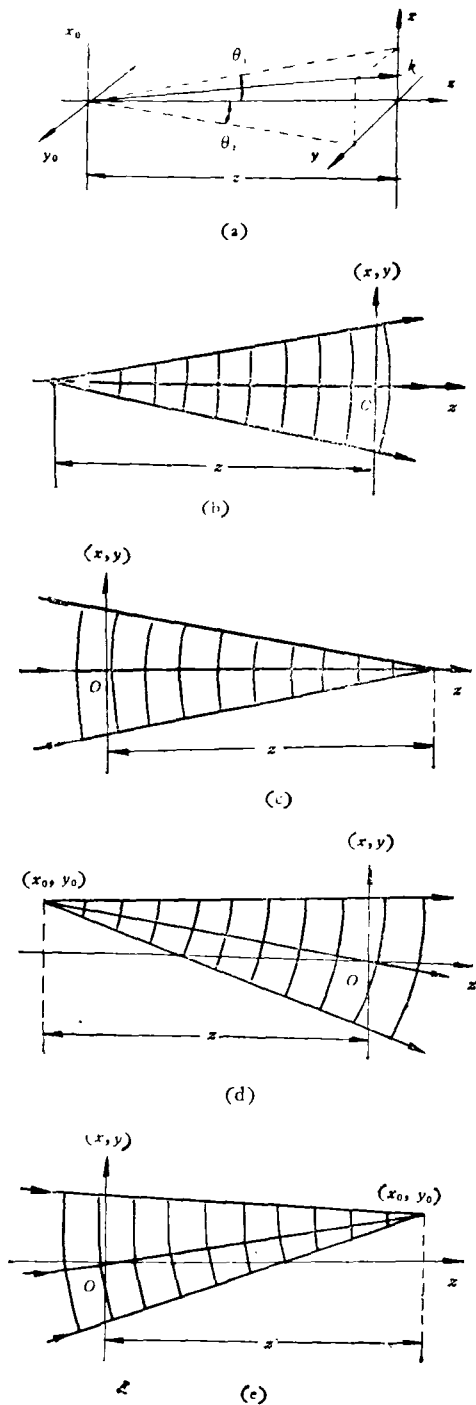


图 2.1

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$r'_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2}.$$

点源  $Q$  在  $xy$  面上激发的球面波前为

物理

$$\tilde{U}(x, y) = \frac{a}{r} e^{ikr}$$

$$= a / (\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2})$$

$$\times \exp i k \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

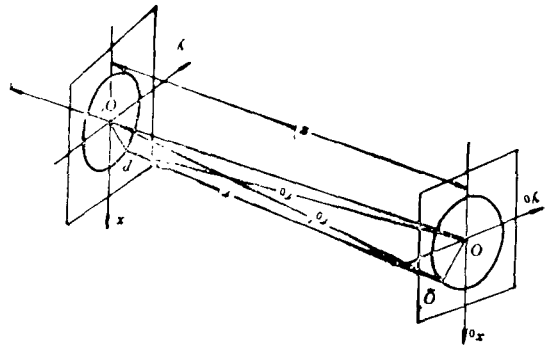


图 2.2 傍轴条件与远场条件(轴外物点)

将  $r_0$ 、 $r'_0$  和  $r$  的表达式作泰勒展开:

$$r_0 = z + (x^2 + y^2)/2z + \dots$$

$$r'_0 = z + (x_0^2 + y_0^2)/2z + \dots$$

$$r = z + (x^2 + y^2)/2z + (x_0^2 + y_0^2)/2z$$

$$- (xx_0 + yy_0)/z + \dots$$

$$= r_0 + (x^2 + y^2)/2z - (xx_0 + yy_0)/z$$

$$+ \dots = r'_0 + (x^2 + y^2)/2z$$

$$- (xx_0 + yy_0)/z + \dots,$$

在物点与场点都满足傍轴的条件下, 可令振幅中  $r \approx z$ , 于是

$$\tilde{U}(x, y) = (a/z) \exp \{ ik [ r_0 + (x^2 + y^2)/2z ] \} \exp [ (-ik/z)(xx_0 + yy_0) ]$$

$$= (a/z) \exp \{ ik [ r'_0 + (x^2 + y^2)/2z ] \} \exp [ (-ik/z)(xx_0 + yy_0) ],$$

此处只有振幅具有平面波的特点, 即它等于常数. 在位相因子中既有  $x$  和  $y$  的平方项, 也有  $x_0$  和  $y_0$  的平方项, 还有  $xx_0 + yy_0$  的线性交叉项. 为了突出相因子, 将常数  $ae^{ikt^*}/z$  简化为 1, 就得到表中所示的函数形式. 为要忽略相因子中的二次项, 必须同时满足远场条件. 若物点同时满足远场条件:

$$x_0^2, y_0^2 \ll z\lambda,$$

则

$$\tilde{U}(x, y) \propto \exp \{ ik [ (x^2 + y^2)/2z - (xx_0 + yy_0)/z ] \}, \quad (2.6)$$

此时仍然保留了场点坐标的二次项. 若场点同时满足远场条件:

$$x^2, y^2 \ll z\lambda,$$

则

$$\tilde{U}(x, y) \propto \exp\{ik[(x_0^2 + y_0^2)/2z - (xx_0 + yy_0)/z]\}. \quad (2.7)$$

此时仍然保留了源点坐标的二次项。不论这些被保留下来的二次项对今后讨论的问题有多大的影响,我们必须注意到在(2.4)–(2.7)的相因子中始终存在线性项  $ik(xx_0 + yy_0)/z$ , 它的出现预示着平面波成分的存在。

### 三、透镜和稜镜的位相变换函数

在成像光学系统中,透镜起两方面的作用。一方面它是光瞳,限制着波面,仅提取入射光波中央一部分波面  $\Sigma_1$  进入光学系统;另一方面它变换波面,把一种波面变换为另一种。例如,在理想成像的情况下,凸透镜把发散的球面波变换为会聚的球面波  $\Sigma_2$ 。较为实际的情况是,它把人射波面变换为偏离球面的象差波面  $\Sigma_2'$  (参见图 2.3)。以往,我们分别用有限孔径引起的衍射和透镜本身的几何象差来描述上述两种作用。其实,从纯粹波动光学的观点出发,引入一个复振幅透过率函数  $\tilde{i}(x, y)$  即可把透镜的上述两方面的性质全部反映出来。

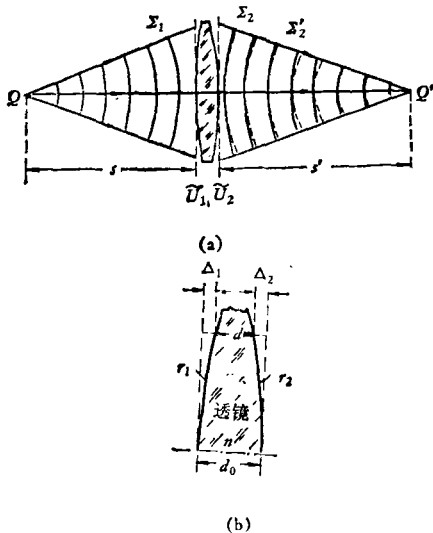


图 2.3 把透镜看作一种位相型透射屏

如图 2.3, 在透镜前后各取一个平面, 设在它们上边的入射波前和透射波前分别为

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(x, y) = A_1(x, y)e^{i\varphi_1(x, y)}, \\ \tilde{U}_2(x, y) = A_2(x, y)e^{i\varphi_2(x, y)}. \end{cases}$$

透镜的透过率函数为

$$\begin{aligned} \tilde{i}(x, y) &= (A_2/A_1)e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \begin{cases} a(x, y)e^{i\varphi(x, y)} & r < D/2; \\ 0 & r > D/2. \end{cases} \quad (2.8) \end{aligned}$$

这里  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $D$  是透镜直径。设透镜材料对入射光波是透明的, 忽略透镜对光的吸收、反射等造成的能量损耗, 则  $A_2 = A_1$ , 而

$$a(x, y) = A_2(x, y)/A_1(x, y) = 1,$$

于是在透镜的孔径内,

$$\tilde{i}(x, y) = e^{i\varphi(x, y)},$$

其中

$$\varphi(x, y) = \varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) \quad (2.9)$$

称为透镜的位相变换函数。

严格求透镜的位相变换函数是困难的, 下面在傍轴条件下计算薄透镜的位相变换函数。由于透镜很薄, 入射点与出射点的坐标相近, 光程可近似地沿平行于光轴方向计算。如图 2.3 (b)。

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (2\pi/\lambda)[\Delta_1 + \Delta_2 + nd(x, y)] \\ &= \varphi_0 - (2\pi/\lambda)(n-1)(\Delta_1 + \Delta_2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中

$$\varphi_0 = (2\pi/\lambda)nd_0,$$

$\varphi_0$  是与  $x, y$  无关的常数, 它不影响波前上位相的相对分布, 常可略去不写。式 (2.10) 中重要的是第二项, 在傍轴条件下  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  可写为

$$\begin{aligned} \Delta_1(x, y) &= r_1 - \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)} \\ &\simeq (x^2 + y^2)/2r_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(x, y) &= (-r_2) - \sqrt{(-r_2)^2 - (x^2 + y^2)} \\ &\simeq -(x^2 + y^2)/2r_2, \end{aligned}$$

式中  $r_1, r_2$  分别是透镜前后两表面的曲率半径 (它们可取正值或负值, 例如对于双凸透镜,  $r_1 > 0, r_2 < 0$ )。代入式 (2.10) 并略去  $\varphi_0$ , 得

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -(2\pi/\lambda) \cdot (n-1)/2(1/r_1 \\ &\quad - 1/r_2)(x^2 + y^2) \\ &= -k(x^2 + y^2)/2F, \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中

$$F = 1/[(n-1)(1/r_1 - 1/r_2)], \quad (2.12)$$

而  $k = 2\pi/\lambda$ . 于是透镜的透过率函数为

$$\tilde{t}_l(x, y) = e^{-ik(x^2+y^2)/2F}. \quad (2.13)$$

稜镜元件的基本作用不是成象而是偏转, 它将一个方向的平行光束变换为另一方向的平行光束, 因为平面波具有线性相因子的特点, 所以预料稜镜的位相变换函数的指数是线性的. 仿照前面的推导, 对于楔形薄稜镜(图 2.4)可以

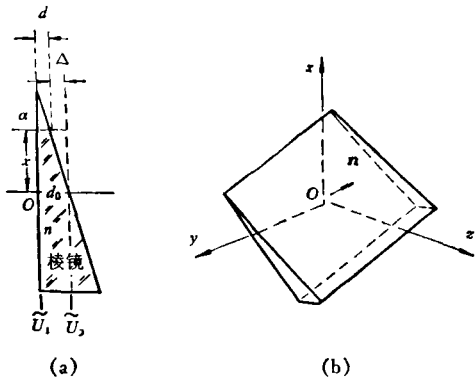


图 2.4 楔形薄稜镜的位相变换函数和透过率函数

近似地认为光线在第二个界面是等高变向出射, 位相差为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) \\ &= (2\pi/\lambda)(\Delta + nd) \\ &= \varphi_0 - (2\pi/\lambda)(n-1)\Delta \\ &= \varphi_0 - (2\pi/\lambda)(n-1)\alpha x, \end{aligned} \quad (2.14)$$

式中  $\varphi_0 = 2\pi/\lambda nd_0$ ,  $d_0$  为稜镜中心厚度,  $\alpha$  为稜镜的顶角. 上述计算是针对稜镜交稜平行  $y$  轴的情形进行的, 如果考虑稜镜方位是任意状态, 则可取其第二界面法线  $\mathbf{n}$  的前两个方向角的余角  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  来标定稜镜的取向, 此时位相变换函数成为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_0 - k(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y) \\ & \quad (k = 2\pi/\lambda). \end{aligned} \quad (2.15)$$

略去常数相因子  $\varphi_0$ , 并忽略光在稜镜表面和内部的损耗, 得楔形薄稜镜的透过率函数:

$$\tilde{t}_p(x, y) = \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]. \quad (2.16)$$

总之, 成象元件的薄透镜具有二次型的位相变换函数  $\tilde{t}_l$ , 偏转元件的薄稜镜具有线性型的位相变换函数  $\tilde{t}_p$ . 这一点要引起我们足够的

重视. 有实际意义的问题往往是倒过来提的, 即如果在某种波前变换的场合中出现了如同  $\tilde{t}_l$  或  $\tilde{t}_p$  的作用函数, 作用在一种波前函数  $\tilde{U}$  身上, 那么, 实际效果就象是  $\tilde{U}$  波经历一个透镜的聚、散或稜镜的偏转, 不管在那种场合下是否真有透镜或稜镜元件存在. 下面举几个例子, 说明如何根据薄透镜和稜镜的位相变换函数, 运用相因子判断法求后场中波的类型和特征.

**例 1** 平行于光轴的单色平行光束入射在透镜上, 试判断后场中波的类型和特征.

**解** 对于正入射的平面波,  $\tilde{U}_1(x, y) = A_1$  (常数), 故

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{t}_l(x, y)\tilde{U}_1(x, y) \\ &= A_1 \exp[-ik(x^2 + y^2)/2F], \end{aligned} \quad (2.17)$$

从相因子看, 这是会聚到透镜后距离为  $F$  处的球面波. 以上正是几何光学理论所预期的. 决定  $F$  值的公式(2.12)正是几何光学中用光线追迹方法得到的磨镜者(焦距)公式.

**例 2** 试导出透镜的物象距公式(见图 2.5).

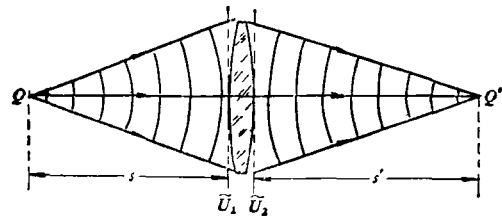


图 2.5 利用透镜屏函数推导物象公式

**解** 设想在透镜前距离为  $s$  处置一发光点  $Q$ , 它发出的球面波在透镜上造成的波前为  $\tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp[ik(x^2 + y^2)/2s]$ .

故从透镜输出的波前为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{U}_1(x, y)\tilde{t}_l(x, y) \\ &= A_1 \exp[ik(x^2 + y^2)/2s] \exp[-ik(x^2 + y^2)/2F] \\ &= A_1 \exp\{-ik[(x^2 + y^2)/2](1/F - 1/s)\}, \end{aligned}$$

从相因子看, 这是会聚的球面波, 会聚中心(象点)  $Q'$  在透镜后, 距离为

$$s' = 1/(1/F - 1/s),$$

或

$$1/s + 1/s' = 1/F.$$

这正是几何光学给出的透镜物象距公式。

**例 3** 轴上一物点  $Q$  与稜镜的距离为  $s$ , 求  $Q$  点发射的傍轴球面波经稜镜后出射波的特征 (见图 2.6).

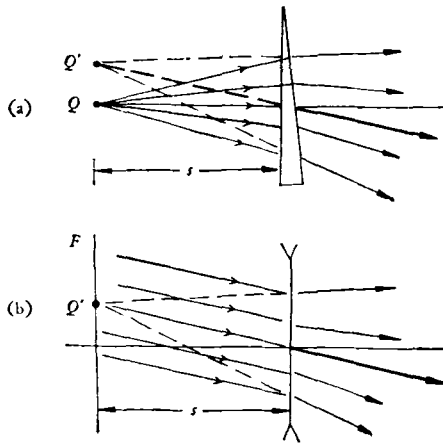


图 2.6

**解** 出射波前函数为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{U}_1(x, y) \cdot \tilde{i}_1(x, y) \\ &= A_1 \exp[ik(x^2 + y^2)/2s] \\ &\quad \cdot \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)] \\ &= A_1 \exp\{ik[(x^2 + y^2)/2s \\ &\quad - (n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)s \cdot 1/s]\}.\end{aligned}$$

对照表 1, 它正是轴外点源发散球面波 (2.4) 形式, 点源位置可由线性相因子系数定出。

$$\begin{cases} x_0 = (n-1)\alpha_1 s, \\ y_0 = (n-1)\alpha_2 s, \\ z_0 = s. \end{cases}$$

有趣的是, 上述球面波经稜镜的偏转, 也可以看成斜入射的平面波经过一个假想透镜的聚散. 这只要将  $\tilde{U}_2$  改写为以下形式就明白了:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{i}_1 \{ A_1 \exp[-ik(n \\ &\quad - 1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)] \} \\ \tilde{i}_1 &= \exp[ik(x^2 + y^2)/2s] \\ &= \exp[-ik(x^2 + y^2)/2F],\end{aligned}$$

亦即把  $\tilde{U}_2$  函数中的二次型相因子看为一个等效透镜的屏函数  $\tilde{i}_1$ , 而将后面的线性因子连同振幅系数  $A_1$  看作一系列平面波. 等效薄透镜的焦距  $F = -s$ , 是一个发散透镜. 几何光学知识告诉人们, 平行光经发散透镜以后变为发散的同心光束, 光束中心位于后焦面上一点  $Q'$ . 后面括号中平面波的传播方向为

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= -(n-1)\alpha_1 \text{ 和} \\ \sin \theta_2 &= -(n-1)\alpha_2,\end{aligned}$$

所以它在后焦面上的交点位置坐标就与前面的结果一致。

相因子判断法的优越性, 将在下面几讲中得以充分的体现。

## 约瑟夫森效应与 $e/h$ 的测量

蓝 忠 毅

(湖南大学电子学教研室)

本文简要地阐述了约瑟夫森效应及其在测定基本常数  $e/h$  方面的应用。

### 一、约瑟夫森效应

1962 年约瑟夫森 (Josephson)<sup>[1]</sup> 预言, 当两块超导体中间被一极薄的绝缘介质层 (实验证明, 其厚度约为  $10 \text{ \AA}$  左右) 隔开而形成弱耦合

的超导结时, 会出现超导“电子对”的隧道效应, 即约瑟夫森效应. 这个预言很快便为实验所证实。

1965 年费曼 (Feynman) 在 “Lectures on Physics” 一书中给出了约瑟夫森效应一种简明的推导方法<sup>[2]</sup>. 设图 1 为超导结的示意图. 若绝缘介质层很厚, 则超导体 I 中的“电子对”状态和超导体 II 中的“电子对”状态是彼此独立的。