

这正是几何光学给出的透镜物象距公式。

**例 3** 轴上一物点  $Q$  与稜镜的距离为  $s$ , 求  $Q$  点发射的傍轴球面波经稜镜后出射波的特征 (见图 2.6).

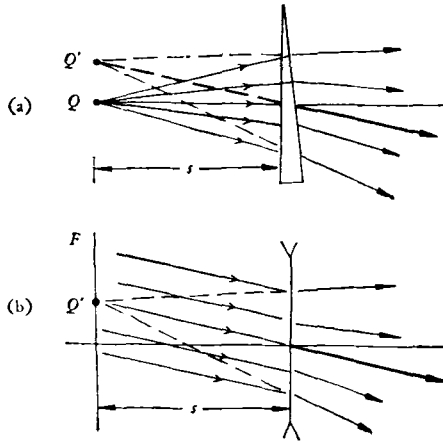


图 2.6

**解** 出射波前函数为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{U}_1(x, y) \cdot \tilde{i}_1(x, y) \\ &= A_1 \exp[ik(x^2 + y^2)/2s] \\ &\quad \cdot \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)] \\ &= A_1 \exp\{ik[(x^2 + y^2)/2s \\ &\quad - (n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)s \cdot 1/s]\}.\end{aligned}$$

对照表 1, 它正是轴外点源发散球面波 (2.4) 形式, 点源位置可由线性相因子系数定出。

$$\begin{cases} x_0 = (n-1)\alpha_1 s, \\ y_0 = (n-1)\alpha_2 s, \\ z_0 = s. \end{cases}$$

有趣的是, 上述球面波经稜镜的偏转, 也可以看成斜入射的平面波经过一个假想透镜的聚散. 这只要将  $\tilde{U}_2$  改写为以下形式就明白了:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{i}_1 \{ A_1 \exp[-ik(n \\ &\quad - 1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)] \} \\ \tilde{i}_1 &= \exp[ik(x^2 + y^2)/2s] \\ &= \exp[-ik(x^2 + y^2)/2F],\end{aligned}$$

亦即把  $\tilde{U}_2$  函数中的二次型相因子看为一个等效透镜的屏函数  $\tilde{i}_1$ , 而将后面的线性因子连同振幅系数  $A_1$  看作一系列平面波. 等效薄透镜的焦距  $F = -s$ , 是一个发散透镜. 几何光学知识告诉人们, 平行光经发散透镜以后变为发散的同心光束, 光束中心位于后焦面上一点  $Q'$ . 后面括号中平面波的传播方向为

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= -(n-1)\alpha_1 \text{ 和} \\ \sin \theta_2 &= -(n-1)\alpha_2,\end{aligned}$$

所以它在后焦面上的交点位置坐标就与前面的结果一致。

相因子判断法的优越性, 将在下面几讲中得以充分的体现。

## 约瑟夫森效应与 $e/h$ 的测量

蓝 忠 毅

(湖南大学电子学教研室)

本文简要地阐述了约瑟夫森效应及其在测定基本常数  $e/h$  方面的应用。

### 一、约瑟夫森效应

1962 年约瑟夫森 (Josephson)<sup>[1]</sup> 预言, 当两块超导体中间被一极薄的绝缘介质层 (实验证明, 其厚度约为  $10 \text{ \AA}$  左右) 隔开而形成弱耦合

的超导结时, 会出现超导“电子对”的隧道效应, 即约瑟夫森效应. 这个预言很快便为实验所证实。

1965 年费曼 (Feynman) 在 “Lectures on Physics” 一书中给出了约瑟夫森效应一种简明的推导方法<sup>[2]</sup>. 设图 1 为超导结的示意图. 若绝缘介质层很厚, 则超导体 I 中的“电子对”状态和超导体 II 中的“电子对”状态是彼此独立的。

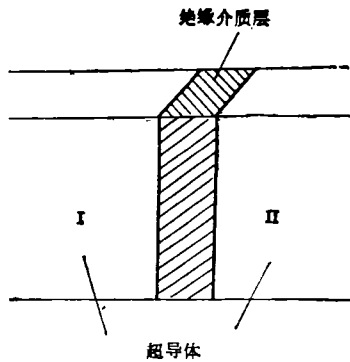


图1 超导结

我们以波函数  $\psi_1$  描述超导体 I 中“电子对”的状态,以波函数  $\psi_2$  描述超导体 II 中“电子对”的状态. 因为超导体在超导状态下所有“电子对”都处于同一低能级量子态,所以可用一个“电子对”的波函数来描述所有“电子对”(或整块超导体)的状态. 若  $\mu_1$  为超导体 I 中单个“电子对”的能量,  $\mu_2$  为超导体 II 中单个“电子对”的能量,则可建立如下的薛定谔方程式:

$$i\hbar d\psi_1/dt = \mu_1\psi_1, \quad (1)$$

$$i\hbar d\psi_2/dt = \mu_2\psi_2. \quad (2)$$

我们将“电子对”波函数写成复函数  $\psi = |\psi|e^{i\phi}$  的形式,则  $|\psi|^2$  是“电子对”的密度,  $\phi$  是超导体中所有“电子对”的共同量子相位. 由于这里  $|\psi_1|^2$  与  $|\psi_2|^2$  相互无关,因此没有超导电流流过绝缘介质层. 但是,当绝缘介质层变得足够薄时,则在超导体 I 和超导体 II 之间形成了某种很弱的耦合作用,结两边的“电子对”之间有相互转移的微小几率. 此时,方程式(1)和(2)应改写为

$$i\hbar d\psi_1/dt = \mu_1\psi_1 + K\psi_2 \quad (3)$$

和

$$i\hbar d\psi_2/dt = \mu_2\psi_2 + K\psi_1, \quad (4)$$

式中  $K$  是弱耦合下表征耦合程度的系数,它反映了超导结的一种特性.  $K=0$ , 相当于超导体 I 中“电子对”的量子态与超导体 II 中“电子对”的量子态彼此独立. 将  $\psi_1 = |\psi_1|e^{i\phi_1}$  和  $\psi_2 = |\psi_2|e^{i\phi_2}$  代入(3)式和(4)式,得

$$i\hbar \frac{d}{dt} (|\psi_1|e^{i\phi_1}) = \mu_1|\psi_1|e^{i\phi_1} + K|\psi_2|e^{i\phi_2} \quad (5)$$

和

$$i\hbar \frac{d}{dt} (|\psi_2|e^{i\phi_2}) = \mu_2|\psi_2|e^{i\phi_2} + K|\psi_1|e^{i\phi_1}. \quad (6)$$

利用等式左边的实部和虚部应分别与右边的实部和虚部相等,经过简单的计算,即可求得

$$d|\psi_1|^2/dt = (ZK/\hbar)|\psi_1||\psi_2|\sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (7)$$

$$d|\psi_2|^2/dt = -(ZK/\hbar)|\psi_1||\psi_2|\sin(\phi_1 - \phi_2). \quad (8)$$

$$d\phi_1/dt = -(K/\hbar)(|\psi_2|/|\psi_1|)\cos(\phi_2 - \phi_1) - (\mu_1/\hbar), \quad (9)$$

$$d\phi_2/dt = -(K/\hbar)(|\psi_1|/|\psi_2|)\cos(\phi_2 - \phi_1) - (\mu_2/\hbar). \quad (10)$$

由(7)式和(8)式可知,在超导体 I 中“电子对”密度的增加,就等于超导体 II 中“电子对”密度的减少,或者相反. 因此必有电流流过超导结,其大小为

$$j = j_c \sin\theta, \quad (11)$$

其中  $\theta = \phi_2 - \phi_1$  是结两边“电子对”的相位差.  $j_c = (ZK/\hbar)|\psi_1||\psi_2|$  是一个与相位差无关的常数.

若超导体 I 和 II 是相同的材料,则  $|\psi_1| = |\psi_2| = |\psi_0|$ , 于是由(9)式和(10)式求得

$$d\theta/dt = d\phi_2/dt - d\phi_1/dt = (\mu_1 - \mu_2)/\hbar. \quad (12)$$

(11)式和(12)式便是描述约瑟夫森效应的两个基本方程,它与约瑟夫森用更为复杂的理论工具导出的结果是一致的.

若在超导结两边存在一电位差  $V = V_1 - V_2$ , 则由此引起超导结两边“电子对”的能量差  $\mu_1 - \mu_2 = 2eV$ . 于是(12)式变为

$$d\theta/dt = (2e/\hbar)V. \quad (13)$$

对上式积分得

$$\theta = (2e/\hbar)\int V dt + \theta_0, \quad (14)$$

式中  $\theta_0$  为积分常数. 以(14)式代入(11)式可得

$$j = j_c \sin[(2e/\hbar)\int V dt + \theta_0]. \quad (15)$$

若结区两边电位差为  $V = 0$ , (15) 式变为

$$j = j_c \sin \theta_0. \quad (16)$$

(16) 式即代表直流约瑟夫森效应. 它表示存在通过超导结的零压直流电流, 且最大电流密度为  $j_c$ .

若(14)式中  $V$  为定值电压  $V_0$ , 则

$$\theta = (2e/\hbar)V_0 t + \theta_0. \quad (17)$$

将(17)式代入(11)式, 则有

$$j = j_c \sin [(2e/\hbar)V_0 t + \theta_0]. \quad (18)$$

(18) 式即代表交流约瑟夫森效应. 它表示在结两边有电位差  $V_0$  存在时, 将有超导交变电流流过超导结, 其频率  $f = (1/2\pi)(2e/\hbar)V_0 = (2e/h)V_0$ .

图 2 是采用恒流源偏置时实验测量得到的超导结的直流  $I-V$  特性曲线. 图中  $oa$  段相应于直流约瑟夫森效应, 它表示结上电压为零, 而流过超导结的直流电流不为零;  $od$  段相应于交流约瑟夫森效应. 因为约瑟夫森交变电流频率极高, 我们用直流或低频仪表测得的约氏交变电流仅表示其平均值  $\bar{I}(t)$ .  $d$  点的电压值决定于超导体的能隙  $2\Delta$ , 即  $V_d = 2\Delta/e$ , 其值约为几个 mV. 当结上电压超过此值时, 超导结中的“电子对”将被拆散, 超导体将失去超导电性而从超导态转变为正常态. 超导隧道电流转变为正常电子的隧道电流, 即图中曲线的  $dbc$  段. 若偏置电源为恒流源, 则随着电源的增加, 通过结的电流将沿  $oa$  跳变到  $b$  (如图中  $ab$  虚线), 再沿  $bc$  段上升. 如果偏置电源既不是恒流源,

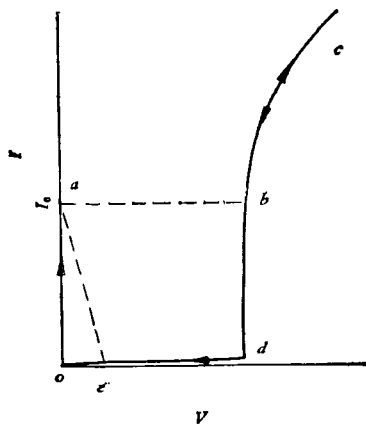


图 2 超导结的伏安特性

也不是恒压源, 则随着电流的增加, 通过结的电流将沿  $oa \rightarrow ap \rightarrow pd \rightarrow dbc$  变化. 虚线  $ap$  的形状由外电路决定.

考虑到超导电现象涉及磁场, 所以要研究在结区存在磁场的情况下, 描述约瑟夫森效应的方程式应改写为怎样的形式? 若以  $\mathbf{A}$  表示磁场的矢势, 即磁场强度  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , 则磁场对“电子对”的作用只表现为“电子对”波函数相位的改变, 我们以  $\delta$  代表磁场引起的相位的改变, 以  $l$  代表对矢势的积分路径, 则

$$\delta = \int_l (2e/\hbar) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (19)$$

于是, 在有磁场作用超导结时, (11) 式变为

$$j = j_c \sin \left[ \theta - (2e/\hbar) \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]. \quad (20)$$

(13) 式变为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \theta - (2e/\hbar) \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] \\ = (2e/\hbar) \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中积分路径取超导体 I 到超导体 II 的最短距离.

若设作用于超导结的磁场  $\mathbf{H}$  指向如图 3 所示, 则  $H_x = H$ ,  $H_y = 0$ ,  $H_z = 0$ . 于是可将磁场  $\mathbf{H}$  写成  $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ . 此时可选取矢势  $\mathbf{A} = (0, 0, Hy)$ . 设结区厚度为  $D$ , 则由 (20) 式得

$$j = j_c \sin [\theta - (2eD/\hbar)Hy]. \quad (22)$$

若超导结的长度为  $L$ , 宽度为  $W$ , 则通过超导结的总电流为

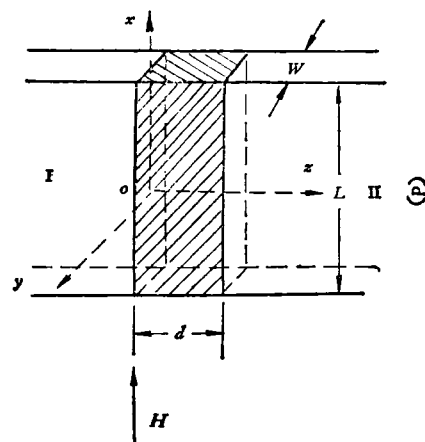


图 3 磁场方向

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-W/2}^{W/2} j dy \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-W/2}^{W/2} j_c \sin[\theta - (2eD/\hbar)Hy] dy \\
&= j_c L W \sin(eDHW/\hbar) \sin\theta / \\
&\quad (eDHW/\hbar). \tag{23}
\end{aligned}$$

当  $\sin\theta = \pm 1$  时, 在磁场  $H$  存在时能通过超导结的最大直流超导电流  $I_{\max}$  由下式决定:

$$I_{\max} = I_0 |\sin\Phi/\Phi|, \tag{24}$$

式中  $I_0 = j_c L W$ ,  $\Phi = eDWH/\hbar$ . 可见,  $I_{\max}$  随  $H$  的变化关系与光学中夫琅和费衍射图样曲线完全一样. 图 4 所示实验结果, 证实了(24)式的正确性. 图中  $I_{\max}$  最小值之间的间隔为  $H_0$ , 它与结面积的乘积正好等于一个磁通量子, 即  $\Phi_0 = DWH_0 = \alpha\hbar/e = h/2e = 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb}$ . 这就表明, 当通过结的外磁通量为磁通量子的整倍数时, 通过结的最大直流约瑟夫森电流为零. 在其它情况下, 也使  $I_{\max}$  大大降低. 因此约瑟夫森临界电流对于磁场变化十分敏感.

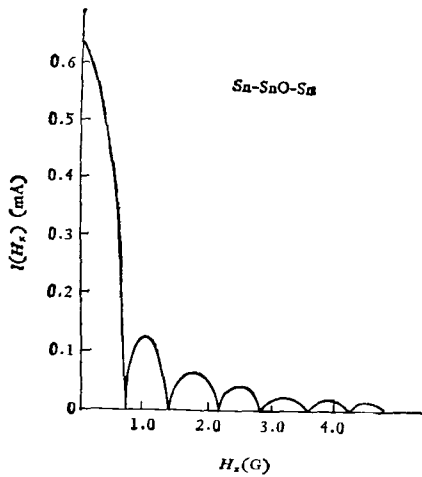


图 4 临界超导电流随外磁场变化的衍射图样

## 二、利用约瑟夫森效应测量基本常数 $e/h$ 的原理

交流约瑟夫森效应关系式  $f = (2e/h)V$  为简单而精确测定基本常数  $e/h$  提供了一条有效的途径. 我们可以采用不同的实验方法来达到

物理

这一目的<sup>[3]</sup>. 这里只介绍微波照射约瑟夫森结测定  $e/h$  的方法. 用微波照射超导结, 相当于在其两端增加了一个交变电压  $V_s \cos \omega_s t$ . 此时作用在结上的电压为

$$V = V_0 + V_s \cos \omega_s t. \tag{25}$$

将(25)式代入(13)式得

$$\theta = \theta_0 + \omega t + (2eV_s/\hbar\omega_s) \sin \omega_s t. \tag{26}$$

将(26)式代入(11)式后得

$$j = j_c \sin[\theta_0 + \omega t + (2eV_s/\hbar\omega_s) \sin \omega_s t]. \tag{27}$$

将(27)式展开, 则有

$$\begin{aligned}
j &= j_c \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n'}[2eV_s/\hbar\omega_s] \sin[(\omega + n'\omega_s)t \\
&\quad + \theta_0], \tag{28}
\end{aligned}$$

式中  $J_{n'}$  是  $n'$  阶贝塞尔函数. 将(28)式求平均,

$$\bar{j} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t j dt, \tag{29}$$

则当  $\omega = n\omega_s$ , 即  $V_0 = nhf_s/2e$  时, (29)式中  $n' = -n$  那一项是与  $t$  无关的常数项. 相应于  $V_0 = n \frac{hf_s}{2e}$  这一项的平均值不为零, 其他各项平均值为零. 因此, 在恒流源偏置下这一不为零的项能在直流  $I-V$  曲线的背景电流上显示出来. 在偏置电压  $V$  由小到大增加时, 由于  $n$  取  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  的整数, 所以每当它改变一特定值  $\Delta V_n = f_s(h/2e)$  时, 就出现一个新的电流阶梯, 从而形成常电压电流阶梯曲线. 图 5 便是 C. C. Grimes 和 S. Shapiro<sup>[4]</sup> 用频率为 72GHz 的微波照射点接触 Nb-Nb 超导结获得的实验结果. 图中曲线分别和不同的微波照射功率相对应. 由下而上, 微波功率由零逐渐增加.

在常电压电流阶梯曲线上精确测定出某一标号台阶对应的偏置电压和照射的微波频率, 就能精确测定出基本常数  $e/h$ . 由于现代技术测量频率的精度完全能达到  $10^{-8}$ , 而电压的测量也能达到这个标准, 使得  $e/h$  数值也可以达到  $10^{-8}$  的精度.

图 6 是美国宾夕法尼亚大学 D. N. Langenberg 等人在 1966 年用微波照射法测定  $e/h$

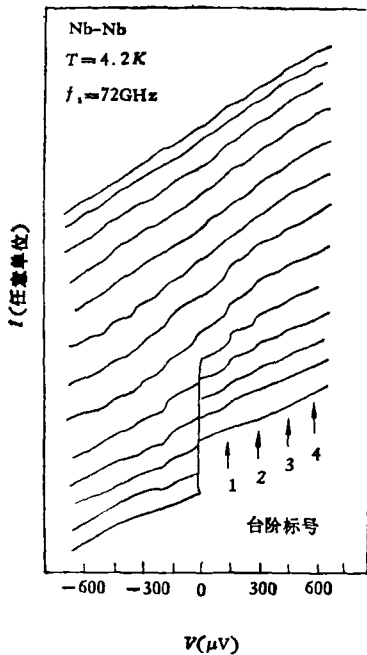


图5 微波照射下常电压电流阶梯曲线

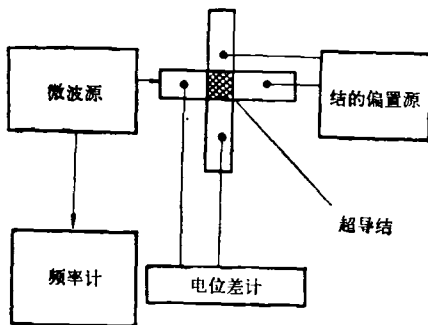


图6 诱导电流阶梯法测定  $e/h$  值实验

值的实验框图。他们获得的结果是  $2e/h = 483.59 \pm 0.03 \text{ MHz}/\mu\text{V}$ 。

1971年宾夕法尼亚大学 T. F. Finnegan<sup>[5]</sup>等人测得的结果是

$$2e/h = 483.593718 \pm 0.000060 \text{ MHz}/\mu\text{V}.$$

这个值比1963年用最小平调整给出的值约小  $38 \pm 10 \text{ ppm}$ 。

### 三、结束语

利用约瑟夫森效应测量的基本常数  $e/h$  是两个独立常数  $e$  与  $h$  的比值，其测量精度的提高具有重要的意义。在精确测量  $e/h$  值之后，

由  $e$  值就能计算出  $h$  的数值。根据1971年宾夕法尼亚大学 T. F. Finnegan 等人测量的  $e/h$  值计算出的  $h$  值比原先的计算值增加了 91ppm。它使  $h$  值的测量达到了一个新的精度，从而丰富了我们对这一重要物理常数的知识。

我们还能利用约瑟夫森效应精确测定出的  $e/h$  值来定义电压基准。依据关系式  $f = (2e/h)V$ ，我们采用  $10^{-8}$  精度的电压基准器以及采用  $10^{-8}$  精度的频率值，这样测出的  $2e/h$  值就能达到  $10^{-8}$  的精度。然后以这一数值作为标准定义电压基准，或随时用它去检查电压基准器的电压，就可获得与保存在法国巴黎国际计量局的电压单位基准器一致的电压基准。这对于一个国家电学测量的统一性和可靠性是十分重要的。

另外，在量子电动力学理论与实验的比较中，与  $e/h$  值有关的耦合常数  $\alpha$  起着十分重要的作用。利用交流约瑟夫森效应测量  $e/h$  而得到的  $\alpha$  值，并不涉及任何量子电动力学的理论方程，这就为检验量子电动力学理论的正确性提供了一种重要的实验手段。

当然，约瑟夫森效应的应用，并不只限于精确测量  $e/h$  常数。自从1962年约瑟夫森预言存在这种效应并获得实验证实之后，它已广泛用于实现对微弱磁场、电压、电流及频率等方面的精密测量。在微波电子技术中，约瑟夫森效应则已用于制作视频宽带探测器、混频器、参量放大器及超导全外差式接收机等，以实现毫米波、亚毫米波和远红外波的探测和研究。在计算技术方面，人们正在利用约瑟夫森效应研制超高速、超高可靠的超导计算机。由于约瑟夫森超导电路研究已进入大规模集成阶段，预计在不久的将来，超导微处理机和超导计算机将成为现实。

总之，当前对约瑟夫森效应在各方面应用的研究十分活跃，并不断取得进展。今后亦必然会获得更为可喜的成果。

### 参考文献

- [1] B. D. Josephson, *Physics Letters*, 1 (1962), 251.

[2] R. P. Feynman, Lecture on physics, Vol. III, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1965), 21-14—21-19.  
 [3] D. N. Langenberg et al., *Phys. Rev.*, **150** (1966), 186.

[4] C. C. Grimes, S. Shapiro, *Phys. Rev.*, **169**(1968), 397.  
 [5] T. F. Finnegan et al., *Phys. Rev. B*, **4** (1971), 1487.

## 光电倍增管的选择和使用 (II)

李 禄 华

(北京综合仪器厂)

### 四、选择光电倍增管要考虑的几个方面

选择光电倍增管的主要依据是使用要求。在能满足使用要求的条件下还要考虑价格。在有些使用要求相互矛盾时要善于抓住主要因素或者采取折衷的办法解决，有时还需借助于测量技术去解决。选择管子一般要考虑如下一些方面：

#### 1. 管子直径的选择

一般说来，管子直径的大小决定了阴极面积的大小。如果使用场合对管子的外形尺寸不加限制，那么最好采用中等尺寸的管子（如直径 51 毫米），这种尺寸的管子有人称为标准型管，它的大小适中，性能优良，有最佳的阴极均匀性和幅度分辨率。如果空间受限制，则需根据空间受限制的情况选用适当小尺寸的管子，小尺寸管的阴极均匀性和幅度分辨率较差。如果是宽束的输入信号，则需选用大尺寸的管子，但大面积阴极管子的暗电流和噪声比较大。

#### 2. 光电阴极的选择

光电阴极的选择是很重要的。几个重要的应用参数如灵敏阈、信噪比和幅度分辨率等都与阴极有很大的关系。如果光电阴极对信号的探测效率不高而它的噪声又大，那么这种光电倍增管就不可能有高的信噪比。选择光电阴极是使给定的输入信号能够给出最大的光电子产

额，这里包括光电阴极的光谱响应特性要与待测光信号的光谱特性相匹配，同时要求有高的量子效率。

#### 3. 放大倍数

放大倍数的选择首先要估计输入信号的强度和确定输出电流的大小。输出电流的大小由记录电路的灵敏度决定，这是容易确定的。但估计输入光信号的强度往往并不容易，一个简单的办法是采用已知放大倍数的管子进行实测。从而估算出所需的放大倍数。不过放大倍数的选择要求并不严格，因为通过调节阳极电压可以在很大范围内改变管子的放大倍数。放大倍数  $G$  与阳极电压的关系可估算如下：

$$G \approx f(g\delta)^n,$$

式中  $f$  为第一倍增极的收集效率，约为 90%， $g$  为级间收集效率，约等于 1， $n$  为倍增极数目， $\delta$  为倍增极的二次发射系数。 $\delta$  与电压关系可由经验公式估算。

对 Sb-Cs 倍增极，经验公式为

$$\delta = 0.2(V_D)^{0.7}.$$

对含铯的 AgMg 合金倍增极，其经验公式为

$$\delta = 0.025V_D,$$

式中  $V_D$  为倍增极级间电压。

应该指出，管子的放大倍数以选得偏高为好。因为如果放大倍数偏低，就要求阳极电压增高，而电压过高，会伴随产生许多不希望有的现象，如场致发射、残余气体电离甚至绝缘击