

误差理论与实验的数学处理讲座

第二讲 实验的数学处理中的统计分布

高 崇 寿

(北京大学物理系)

一、统计分布的物理意义及来源

在实验的数学处理中经常用到的概率分布有多种。一般说来，各种统计分布都是用来反映随机变量的某种概率分布规律的。从概率论的角度处理这些分布时并不直接牵涉到这些分布的物理来源。但是要能正确和熟练地掌握和运用这些分布，不仅需要对运算规则和公式熟悉，而且还应该对每种分布是和哪种类型的物理机制相联系，以及该分布的物理意义和来源尽可能有感性的了解。

对实验作数学处理时，需要用到的统计分布就其来源来说有两类。一类是实验所涉及的物理问题本身的统计性质带来的；另一类是对测量结果作数据处理时所必要引进的。前一类统计分布比较多样化，并且和所处理的物理问题有直接的关系；后一类则比较标准化，处理方法也比较明确。例如，近几年来理论上提出质子也有可能是不稳定的，但是其衰变平均寿命很长。过去在实验中一直没有观察到质子的衰变，这表明质子可能是稳定的。也有可能质子虽然不稳定，但由于其衰变平均寿命很长，在现有实验设备条件下还很难在有限的时间内观察到质子衰变的事例。正因为理论上提出了质子有可能是不稳定的，许多实验物理学家用各种方法做了这方面的实验。一个由印度和日本的物理学家组成的小组在最近两年进行了一个重要的实验，其基本的实验设计思想如下：取一定数量的钢铁，放在很深的废金矿井中，以完全

隔断宇宙射线的影响；在钢铁旁安放有探测器，探测器的配置是使钢铁中如果有核子衰变就可以被记录下来。在这个实验中实际用了约 140 吨的钢铁，从 1980 年 11 月起开始进行实验，到 1982 年 7 月他们报告说，已经观察到了六个可以认为是核子衰变的事例。根据其中三个可靠性较高的事例推算，核子衰变的平均寿命为

$$\tau \sim 7.5 \times 10^{30} \text{ 年.}$$

这个实验的数学描述如下：在时间 t 内一个核子衰变掉的概率是 $1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ ，其中 τ 为核子的平均寿命。如果在所设计的实验装置下衰变的核子被探测到的概率为 p ，则一个核子衰变掉并被探测到的概率为 $p(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 。如果这些钢铁中共有 N 个核子，则在 t 时间内衰变并被探测到的核子数应为 $Np(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 。考虑到实际上 $t \ll \tau$ ，上式在足够好的近似下可写作 $Np \frac{t}{\tau}$ 。这个实验组观察到的三个事例来自 60

吨钢铁，每吨约含有 6×10^{29} 个核子，如果观测时间 t 以 1.5 年计，则核子平均寿命的估值为 $\tau \approx 18p \times 10^{30}$ 年。考虑到 p 是一个小于 1 的数，上面给出的结果是可以理解的。当然这里所作的估算是很粗的，实际上对实验的分析要远比这个细致。

在上面分析中所引入的时间 t 内有核子衰变掉的概率，这是由处理的物理问题本身包含有的统计性质带来的。至于数据处理时必要引进的统计分布，我们在上面的分析中还未涉及到，但是在实际的实验工作中总是不可缺少的。

下面我们分别介绍常用的几种统计分布。在介绍时,尽可能既介绍这些分布的含义、数学表述和性质,同时还介绍这些分布的物理来源和物理意义。

二、二项式分布与泊松分布

最常见的离散型随机变量统计分布是二项式分布与泊松分布。

若某随机事件 A 发生的概率为 p , 则 A 不发生的概率为 $q = 1 - p$ 。现在考虑 N 次独立试验, 其中事件 A 发生 k 次的概率为

$$\frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}. \quad (2.1)$$

这个概率表达式可以由二项式展开式

$$(p+q)^N = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k} \quad (2.2)$$

中含 $p^k q^{N-k}$ 的项里的 $q = 1 - p$ 给出, 这也就是取名为二项式分布的原因。

二项式分布的物理背景在于要求这 N 次试验是完全独立的。二项式分布的期待值和方差为

$$\langle k \rangle = Np, \quad (2.3)$$

$$\sigma^2(k) = Np(1-p). \quad (2.4)$$

二项式分布的应用很广, 在实际分析实验时经常遇到。值得注意的是, 二项式分布中有两个独立参数 N 和 P , 它们对应于期待值和方差是独立的。二项式分布中总有 $\sigma^2(k) - \langle k \rangle < 0$, 或者说总有 $\sigma^2(k)/\langle k \rangle < 1$, 这是二项式分布的特点之一。二项式分布的这个性质, 可以作为判断一个离散型随机变量的分布是否是二项式分布的必要性检验。

二项式分布可以进一步推广。若 $A_i (i=1, \dots, m)$ 为一个互斥事件的完备集, 某随机事件 A_i 发生的概率为 p_i , 显然按定义有

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (2.5)$$

现在考虑 N 次独立试验, 其中事件 $A_i, i=1, \dots, m$, 发生的次数分别相应为 k_i 的概率为

$$\frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}, \quad (2.6)$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_m 显然满足

$$\sum_{i=1}^m k_i = N. \quad (2.7)$$

这个概率表达式可以由多项式展开式

$$\left(\sum_{i=1}^m p_i \right)^N = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = N} \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \quad (2.8)$$

中含 $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ 项给出。和二项式分布相对应, 这个分布常称作多项式分布。

在二项式分布中考虑试验次数 $N \rightarrow \infty$, 但每次试验中 A 发生的概率 $p \rightarrow 0$, 并使期待值 $\langle k \rangle = Np \rightarrow m$ 为有限值, 这时得到的概率函数为

$$p(k) = e^{-m} \frac{1}{k!} m^k, \quad (2.9)$$

这时称为泊松分布。泊松分布的物理意义是进行无穷多次独立试验的总体后果。与二项式分布相对比, 要求各次试验是互相独立的, 是两种分布相同的, 但泊松分布解除了试验次数有限的要求。由此可见, 一个离散型随机变量满足泊松分布比满足二项式分布所受的物理上的限制要少些。但在数学表述上, 由于只出现一个参数 m , 期待值和方差都通过这个参数来表述, 泊松分布比二项式分布受到的限制实际上是更强了。

$$\langle k \rangle = m, \quad (2.10)$$

$$\sigma^2(k) = m. \quad (2.11)$$

换言之, 对于泊松分布总有 $\sigma^2(k) - \langle k \rangle = 0$, 亦即 $\sigma^2(k)/\langle k \rangle = 1$, 这是泊松分布的特点。

泊松分布的这个特点的物理原因在于各次试验是互相独立的。正因为如此, 这个特点常被利用来作为研究其它离散型统计分布的标准, 主要是用来考察各次试验之间是互相独立的还是有关联的。如果随机变量 k 在期待值周围的分布比泊松分布宽, 特别是当 k 很大时, 概率函数随 k 的增加而减小得比泊松分布要慢时, 这种统计分布往往带有 $\sigma^2(k) - \langle k \rangle > 0$

的特点。在这种情况下，其物理意义常反映为各次试验不是互相独立的，表现为一次试验中如果事件 A 发生，则会增加其它次试验中事件 A 发生的概率。各次事件之间的这种相互影响称为正关联。如果随机变量 k 在期待值周围的分布比泊松分布窄，这种统计分布往往带有 $\sigma^2(k) - \langle k \rangle < 0$ 的特点。在这种情况下，其物理意义常反映为一次试验中如果事件 A 发生，则会减少其它次试验中事件 A 发生的概率。相应地，各次事件之间的这种相互影响称为负关联。

为了对事件之间的关联性质给以定量描述，可以引入统计分布的关联数 f_2 。

$$f_2 = \sigma^2(k) - \langle k \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 - \langle k \rangle. \quad (2.12)$$

当关联数 f_2 大于零或小于零时，分别表明统计分布具有正关联或负关联。关联数 f_2 等于零的统计分布所具有的关联称为零关联。各次试验相互独立的统计分布的关联数 $f_2 = 0$ ，但 $f_2 = 0$ 的统计分布所描写的各次试验之间并不一定相互独立。

三、指数分布

指数分布是一种重要的常见的统计分布。许多物理现象的物理机制决定了其概率分布为指数分布。

放射性衰变现象遵从的是指数分布，它可表述为：粒子在时间 t 内衰变的概率为 $1 - e^{-\lambda t}$ ，其中 λ 为衰变常数，即平均寿命的倒数。因此，其概率密度函数为

$$p(t, \lambda) = \frac{d}{dt} (1 - e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.13)$$

衰变现象遵从指数分布的物理原因是，单位时间内粒子衰变掉的概率为常数，从而单位时间内衰变掉的粒子数目与该时刻存在的粒子总数成正比。

指数分布的另一个物理来源和泊松分布相联系。如果单位时间发生的事件数服从泊松分布，则相邻两事件之间的时间间隔服从指数分

布。这里单位时间发生事件数的期待值就是指数分布中期待值的倒数。指数分布的这个物理来源表明，如果在所讨论的物理问题中涉及用泊松分布描写的物理现象，常常伴随着有由指数分布所描写的物理现象。

指数分布的概率密度函数为

$$p(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0). \quad (2.14)$$

随机变量 x 的期待值和方差分别为

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2(x) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (2.15)$$

其特征函数为

$$\Phi(t) = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}. \quad (2.16)$$

指数分布有两个值得注意的特点。一个特点是，指数分布的概率密度函数的极大值落于 $x = 0$ 处，它与 x 的期待值没有任何联系。另一个特点是，如果考察期待值附近一个标准误差之内的总概率（即从 $x = 0$ 到 $x = 2/\lambda$ 的总概率），其值为 0.865，这个值在常见的各种分布中是偏大的。

和泊松分布类似，指数分布中也只出现一个参数 λ 。 λ 既是指数分布的期待值的倒数又是指数分布标准误差的倒数。期待值等于标准误差是指数分布的一个重要性质，是一个统计分布为指数分布的必要条件，但并不是充分条件。

四、均匀分布

均匀分布是实验处理中常用的分布之一，它是最简单的连续型分布，同时又是许多复杂的连续型分布的基础。

均匀分布是指随机变量 x 的取值在某一给定区间内时，概率密度为一个大于零的常数，在 x 取该区间外的值时，概率密度为零。典型的均匀分布的概率密度函数可表为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & |x - x_0| < \Delta, \\ 0 & |x - x_0| \geq \Delta, \end{cases} \quad (2.17)$$

即随机变量 x 在区间 $x_0 - \Delta, x_0 + \Delta$ 内时概率密度函数不为零, 在区间外时概率密度函数为零. 显然, x_0 是该区间的中心位置, 2Δ 为该区间的宽度. 上述均匀分布的期待值和方差分别为

$$\langle x \rangle = x_0, \quad \sigma^2(x) = \frac{1}{3} \Delta^2. \quad (2.18)$$

在期待值附近一个标准误差以内的概率为

$$\begin{aligned} P_r \left(|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577. \end{aligned} \quad (2.19)$$

它和其它分布相比是属于偏小的.

服从均匀分布的随机变量取值对期待值的偏离有个严格的界限, 即偏离不能超过 Δ . 但是从另一方面来说, 均匀分布中在期待值附近一个标准误差的区间内的概率比最常见的正态分布要小. 这些是均匀分布特有的应该注意的特点. 在物理实验工作中经常会遇到均匀分布. 例如, 许多无线电元件的精度实际上是按均匀分布来标的, 因此在使用时应该注意均匀分布的上述特点.

另外在一些实验中, 为了消除某些因素对实验结果的影响, 进行实验时特意将某些实验条件在一定范围内随机地变动, 这就通过人为的方法实现某种均匀分布.

尽管许多情况下最原始的概率分布是均匀分布, 但是多个均匀分布的总合效果却完全和均匀分布不同. 为了说明这点, 我们看电阻串联的例子. 设所取的电阻精度是由均匀分布描写的, 这样一个电阻的阻值的概率密度函数如图 1 所示, 即是一个均匀分布. 取这样的两个电阻串联起来时, 其总阻值的概率密度函数就不再是均匀分布, 而是如图 2 所给出的形式. 这样的三个电阻串联起来时, 其总阻值的概率



图 1

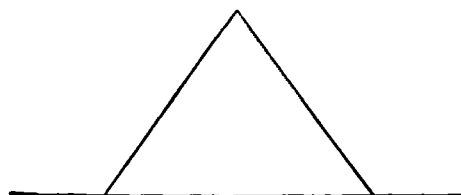


图 2

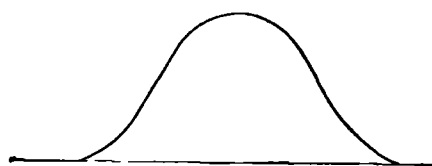


图 3

密度函数如图 3 所示. 从这个趋势可以看出, 多个均匀分布的合效果表现为趋向于正态分布. 在后面将要讲到, 这个结论对任何分布都对, 只不过在均匀分布时, 这个趋于极限的过程表现得特别明显和迅速.

五、正态分布

正态分布是误差理论中最重要的统计分布. 如果随机变量 x 服从正态分布, 则其概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.20)$$

其中 σ 和 μ 为常数, 并且 $\sigma > 0$. 这个分布通常用符号 $n(x; \mu, \sigma)$ 表示, 其期待值和方差分别为

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \sigma^2(x) = \sigma^2. \quad (2.21)$$

这也就明显地显示出参数 μ 和 σ 的物理意义. 在期待值附近一个标准误差之内的概率为

$$P_r(|x - \mu| \leq \sigma) = 68.3\%. \quad (2.22)$$

正态分布又称为高斯分布, 从下述两个定理中, 可以看出正态分布在误差理论中的特殊的重要地位.

定理一: 若 x_i (其中 $i = 1, \dots, N$) 是互相独立的随机变量, 随机变量 x 是各 x_i 之和,

$$x = \sum_{i=1}^N x_i,$$

每一个 x_i 对 x 的影响都不大, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, x 渐近地服从正态分布.

定理二: 如果 x_i (其中 $i = 1, \dots, N$) 是随机变量 x 的 N 次独立测量值 (即 x 的容量为 N 的样本), x 的期待值和方差分别为 μ 和 σ^2 , 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, x 的样本平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

渐近地服从正态分布

$$n \left(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma^2}{N} \right).$$

定理一告诉我们, 如果造成某一物理量测量上的不确定性的因素很多, 并且没有一个因素是主要的, 从而其影响远远超过其它因素, 则尽管每一因素的概率分布可以不同并且甚致是未知的, 但最终这个物理量的概率分布近似为正态分布. 根据这一点实际上在实验中测量某物理量时, 把可能的系统误差扣除之后, 该物理量的统计误差往往可以判断是由正态分布描写. 下面我们通过具体例子来说明.

用步枪打靶时, 中弹位置对靶心形成正态分布. 这个熟知的结论实际上可以由上述定理导出. 我们将中弹位置与靶心的距离记作 x , x 是一个随机变量, 它的值是多个因素影响的结果, 例如瞄准时判断上的不准, 持枪不稳, 子弹飞行过程中局部气流的影响等等. 每一方面的影响又往往可以更细致地分解为许多部分之和. 例如上述子弹飞行过程中局部气流的影响就可以分为许多部分, 如果子弹飞行 1000m 距离, 我们可以把每 20m 距离作为一部分, 共分 50 个部分, 则局部气流影响可以分为 50 部分之和. 这样根据上述定理一, 尽管我们并不知道每 20m 的局部气流影响对 x 的贡献 (即某一个 x_i) 服从什么分布, 但可以判断 x 足够准确地由正态分布描写 (因为这样分析时 x_i 的数目 N 相当大).

接着遇到的一个问题是, 如果造成某一物

物理

理量测量上的不确定性的诸因素中, 有一个因素给出比较大的影响, 这时应该怎样处理. 对于这种情况, 首先要分析是否有可能把这个因素的影响更具体地分解为许多部分之和, 而各部分之间可以看作是互相独立的, 正如在上例中对于局部气流影响的处理那样. 如果能够做到这点, 上述定理一仍能适用, 该物理量仍服从正态分布. 如果没有可能做到这点, 一个常用的作法是设法研究这个因素的影响所服从的统计分布, 将这部分影响和其它因素的影响分开来分别处理. 在某些情况下, 甚至可以把这个因素的影响作为系统误差而加以扣除.

定理二告诉我们, 尽管随机变量 x 的概率分布未知, 但 x 的样本平均值 \bar{x} 在测量次数 N 足够大时总是服从正态分布的, 并且其标准误差会大大减小. 这也就是在实验中测量一个物理量时, 尽可能进行多次测量求平均的有利之处.

这两个定理说明了在实验的误差分析中经常遇到正态分布的原因.

正态分布是连续型随机变量的一种统计分布. 对于离散型的随机变量, 如果满足的是二项式分布或泊松分布, 其特征数字量远大于 1, 则离散型也就接近连续型了, 这些分布也就渐近地趋于正态分布. 可以证明, 对于泊松分布, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $p(k; m) \rightarrow n(k; m, m)$; 对于二项式分布, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $p(k; N, p) \rightarrow n(k; Np, Np(1-p))$. 这说明对于某些离散型随机变量, 正态分布也是较好的近似描写.

正因为正态分布的重要性, 现在对实验结果的报道都沿用正态分布的含义. 例如质子的质量与电子质量比的测量结果为

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836.15152 \pm 0.00070,$$

其中 m_p 和 m_e 分别为质子和电子的质量. 式中的 0.00070 是标准误差, 这个式子的含义是 m_p/m_e 的真值落在 1836.15082 到 1836.15222 之间的概率为 68.3%. 这个概率值就是按正态分布下随机变量在期待值附近一个标准误差内的概率含量. 如果报道实验误差时, 不是采用标准

误差,或者虽采用了标准误差,但因不是正态分布,其概率含量并不是 68.3%,这两种情形下都应明确标明其置信水平为多少(置信水平即这里的概率含量)。换言之,凡是不标明置信水平的就应该是按正态分布下在期待值附近一个标准误差内的概率含量来理解,即置信水平为 68.3%。

在这里要强调的是必须防止的一些误解。一种误解是认为上述实验结果表明 m_p/m_e 的真值只能在 1836.15028 到 1836.15222 之间,因此如果某一理论的预言值在这个区间之外,就认为这个理论完全与实验矛盾。这种误解是来自于对误差的概念没有从概率统计的角度来准确地了解。另一种误解是认为报道实验结果时所给出的误差是一个鲜明的界限,如果一个理论的预言值在这个区间内就远比在这个区间外要优越得多。在科学文献中,经常会遇到“理论与实验在误差范围内符合(或不符合)”这类比较概括的提法。从上述误解出发就往往对这类提法看得过重,认为实际上对理论是否与实验符合已给出了明确的判断。其实理论预言值与实验报道值之间差 0.9 个标准误差和差 1.1 个标准误差之间的差异并不能简单地用“符合”和“不符合”来区分,应当严格按照概率论本身的含义来理解实验结果的报道。

另外强调的是按概率含义来了解实验结果时,不应当把小概率的可能性简单地略去。为了说明这一点,我们看一个重要的典型例子。

1963 年在粒子物理实验的研究中,发现了一种新的粒子。发现的方法是用高能加速器把粒子加速,用加速到高能粒子去碰撞停着的粒子发生反应。选择反应后产生的粒子中有 π 介子和 K 介子的事例,把 π 介子和 K 介子的能量和动量都测出来。假定一对 π 介子和 K 介子是由一种新的粒子衰变而来的,则根据动量守恒和能量守恒可以推算出这种新粒子的动量 P 和能量 E ,并利用关系式

$$M = \sqrt{\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{P}{c}\right)^2}$$

推算出这种新粒子的质量 M 。这个质量值的

物理意义是,如果 π 介子和 K 介子是由一种新粒子衰变而来的,则该粒子的质量应为 M 。当然,该种粒子也有可能不存在,这样得到的 M 就不代表一种确定的粒子的质量,这样得到的 M 称为 $K\pi$ 系统的不变质量。以这个质量为横轴,以事例数为纵轴作图。如果不存在这种新粒子,根据实验结果作出的图应表现为一条平滑曲线;但如果存在这种新粒子并在实验中有贡献的话,就应在分布图上表现为在某质量处有一个共振峰,该质量就是新粒子的质量。当时对实验结果就是根据这样的考虑进行分析和处理的。由于各事例是互相独立的,事例数的描写应符合泊松分布,考虑到粒子数较多,近似地由正态分布描写。结果在质量 $M = 724\text{MeV}$ 处显现一个明显的峰,峰高已超出背景值三个标准误差以上。这表明它是纯统计涨落的概率小于千分之三,它是新粒子的概率大于千分之九百九十七。正因如此人们相信发现了一个新的粒子,并命名为 κ ,正式列入了基本粒子表。

但是过了几年之后,基本粒子表中又把它去掉了,去掉的原因是后来进一步的实验判定这个峰的出现确是由于统计涨落。也就是说,实际情况刚好就是落在那小于千分之三的概率中了。当时发现 κ 的实验积累了 1000 多个事例,统计出了一个明显的共振峰。后来人们为了进一步研究 κ 的性质,重复这个实验,积累更多事例再作统计时,原来显现的共振峰反而消失了。

这个实例启示我们,即使是只有不到千分之三的概率,在科学上也不能随意忽略掉,特别是实验工作者,一定要注意这个科学的严格性。

对实验结果的报道方面再做几点说明:

1. 现在一般标准误差常取一位或两位有效数字,个别情形下有取到三位的。过去传统习惯是只取一位有效数字,后来随着物理学实验向更精确的水平发展,日益显现出只取一位有效数字对实验结果的描写不够确切,因此现在重要的物理实验结果,如有可能,一般都取两位有效数字。

2. 有时标准误差最后一位比实验报道值还要后一位, 例如现在对于真空光速 c 测得的最准的值为

$$c = (2.99792458 \pm 0.000000012) \times 10^{10} \text{cms}^{-1}.$$

这里 c 值只到第 8 位小数, 而标准误差却到了第 9 位小数. 这种情形实际上是为了把标准误差的大小刻划得更准确些, 并不是报道上的错误.

3. 有时由于物理量是间接测量的, 其标准误差可能是上、下不对称的. 近年来, 实验测得带电粲介子 D^{\pm} 的平均寿命 τ 为

$$\tau = \left(9.1 \begin{array}{c} + 2.2 \\ - 1.5 \end{array} \right) \times 10^{-13} \text{s}.$$

这个误差就是上、下不对称的. 在遇到这种情形时要注意的是由于分布已不再是严格的正态分布, 不能简单地按正态分布来推测多个标准误差区间的概率含量.

4. 对于有些物理量来说, 实验只定出其上限或下限, 这时一般不是以置信水平 68.3% 来划分, 常常以置信水平 90% 或 95% 为标准. 由于还不完全统一, 应同时讲清置信水平. 例如实验中测得光子的静止质量 m_{γ} 满足

$$m_{\gamma} < 6 \times 10^{-22} \text{MeV}/c^2, \text{ (置信水平 99.7\%)}$$

六、 χ^2 分布

在误差理论中另一个重要的统计分布是 χ^2 分布. 我们先来看统计物理学中的麦克斯韦分布, 其分布函数正比于

$$e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp.$$

如果引入变量 $\chi = \frac{p}{\sqrt{mkT}}$, 把上式通过 χ^2 表出,

$$e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{1}{2}} d(\chi^2).$$

这里第一个因子 $e^{-\frac{\chi^2}{2}}$ 是由统计平衡所给出的, 另一个因子 $(\chi^2)^{\frac{1}{2}}$ 则是由动量相空间所贡献的, 来源于“相空间内各体积元都是等概率”的均匀假定. 如果把动量推广到 ν 维空间, 这个

物理

因子就应改为 $(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}$, 相应地麦克斯韦分布就变为正比于

$$e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} d(\chi^2).$$

将这个分布归一化, 得到概率密度函数:

$$p(\chi^2; \nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad (2.23)$$

称为自由度为 ν 的 χ^2 分布.

从上述分析来看, χ^2 分布从某种意义上来说, 相当于在 ν 维空间内的麦克斯韦分布, χ^2 对应于麦克斯韦分布中动量的平方.

为方便起见, 用 $\chi^2(\nu)$ 表示自由度为 ν 的 χ^2 分布. 一个物理量 ω 服从自由度为 ν 的 χ^2 分布, 记作 $\omega \sim \chi^2(\nu)$. 例如, 统计物理中的麦克斯韦分布表明, $\frac{p^2}{mkT} \sim \chi^2(3)$. 在 $\chi^2(\nu)$ 中期待值和方差分别为

$$\langle \chi^2 \rangle = \nu, \quad \sigma^2(\chi^2) = 2\nu. \quad (2.24)$$

χ^2 分布之所以在实验的数学处理中重要, 原因在于它具有下述性质:

1. 若 $\omega_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $\omega_2 \sim \chi^2(\nu_2)$, 则 $\omega_1 + \omega_2 \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$;

2. 若 $x \sim n(x; \mu, \sigma)$, 则 $\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

从这两个性质可以看出, 正态分布与 χ^2 分布密切相关, 在用正态分布描写的实验结果的处理中, χ^2 分布有广泛的应用.

七、 t 分布

在实验的数学处理中 t 分布是另一个重要的统计分布, 它的重要性是和正态分布以及 χ^2 分布紧密相连的.

我们先看近代物理学中关于能级宽度的描写. 如果有一个不稳定的能级, 能量为 E_0 , 则它在实验中应表现为有一定的分布宽度 Γ , 实验测得的能量分布正比于

$$\frac{1}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \propto \frac{1}{1 + \left[\frac{2(E - E_0)}{\Gamma}\right]^2},$$

其中 E 为能量, Γ 为宽度. 这个分布在 $E = E_0$ 时达极大值, 在 $E = E_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$ 时降到极大值的一半. Γ 还和能级的平均寿命 τ 相联系, $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$, 其中 \hbar 为普朗克常数. 在这个实例中能级的实测值之所以会围绕 E_0 有一个分布, 是由于能级的不稳定性. 如果我们把自变量换为 $t = \frac{2(E - E_0)}{\Gamma}$, 则上式变为 $\frac{1}{1 + t^2}$.

t 分布实际上相当于这个分布的推广. 如果随机变量 t 的概率密度函数为

$$p(t; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$(-\infty < t < \infty), \quad (2.25)$

则称 t 服从自由度为 ν 的 t 分布. 上面的例子实际上相当于自由度为 1 的 t 分布, 这在物理上也是可以理解的, 因为讨论能级宽度时, 只牵涉到一个自由度的物理量——能量.

t 分布与正态分布和 χ^2 分布由下述性质联系起来: 如果两个互相独立的随机变量 x 和 y 服从的分布分别为

$$y \sim n(0, 1), \quad x \sim \chi^2(\nu),$$

则随机变量 $t = \left(\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{1}{2}} y$ 服从自由度为 ν 的 t 分布.

由此可见 t 分布的自由度与 χ^2 分布的自由度是一致的, 将来我们可以看到, 在误差处理中它往往和独立测量的次数相联系.

t 分布的期待值和方差分别为

$$\langle t \rangle = 0, \quad \sigma^2(t) = \frac{\nu}{\nu-2} \quad (\nu > 2).$$

(2.26)

t 分布的形状很象正态分布. 与标准正态分布 $n(0, 1)$ 相比较, t 分布更为分散. 这在自由度 ν 不大时特别明显, 在 $\nu \leq 2$ 时, t 分布的方

差是发散的. 当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, 可以证明 t 分布趋于标准正态分布.

正由于 t 分布的上述性质, 尽管它在形状上接近正态分布, 在使用时还是应该有所区别. 在标准正态分布下, 标准误差 $\sigma = 1$, 在一个标准误差内的置信水平是 0.683. 在 t 分布下, 标准误差 $\sigma > 1$, 并且在一个标准误差范围内的置信水平也不是 0.683. 何况对于 $\nu \leq 2$ 的情形, 标准误差是发散的. 因此在用到 t 分布时, 常常需要以置信水平 0.683 为标准倒过来确定 t 值的范围, 以此作为修正. 另外也不应按正态分布在 $2\sigma, 3\sigma$ 等范围内的概率含量来估计 t 分布在 $2\sigma, 3\sigma$ 等范围内的概率含量. 这些问题以后还要具体介绍.

八、随机变量函数的统计分布

上面介绍了实验的数学处理中最常用到的几种统计分布, 其中包括离散型随机变量的二项式分布、泊松分布, 连续型随机变量的均匀分布、指数分布、正态分布、 χ^2 分布、 t 分布等, 还讨论了这些分布分别的物理意义和它们之间的联系. 在实际工作中还可能遇到各种不同类型的其它的分布, 我们不可能一一列举. 但是实际工作中遇到的新的统计分布常常以下述形式提出: 随机变量 y 是 N 个独立随机变量 $x_i, i = 1, \dots, N$, 的已知函数 $y = f(x_1, \dots, x_N)$, 已知 x_i 的概率密度函数为 $p_i(x_i)$, 需要求随机变量 y 的概率密度函数 $p(y)$. 这里随机变量 y 和 x_i 都是连续型随机变量.

一般来说, 随机变量 y 作为各 x_i 的函数, 其函数形式可以是任意的; 同时各 x_i 所服从的统计分布也完全可以不同, 即各 $p_i(x_i)$ 的函数形式可以不同. 在这种条件下求 $p(y)$ 可以有各种不同的方法, 我们只介绍一种最直接并且普遍的方法, 即 $p(y)$ 可以由下公式普遍给出:

$$p(y) = \int \cdots \int \delta(y - f(x_1, \dots, x_N)) \times \prod_{i=1}^N [p_i(x_i) dx_i], \quad (2.27)$$

作为一个特殊情形,如果 $N = 1$, 即 $y = f(x)$, 则 y 的概率密度函数为

$$p(y) = \int \delta(y - f(x)) p_1(x) dx. \quad (2.28)$$

如果考虑更普遍的情形, N 个随机变量 x_1, \dots, x_N 并不一定是互相独立的, 它们的联合概率密度函数为 $p(x_1, \dots, x_N)$, 则随机变量 $y = f(x_1, \dots, x_N)$ 的概率密度函数 $p(y)$ 普遍

由下式给出:

$$p(y) = \int \dots \int \delta(y - f(x_1, \dots, x_N)) \times p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (2.29)$$

利用上述普遍公式, 就可以计算随机变量函数的统计分布. 在后面我们可以看到它们的许多具体应用.

(上接第 296 页)

率最高约 10%.

光接收器件^[7]

光接收器件有 InGaAs-GaAs (或 InP), InGaAsP-InP (或 InAs) 异质结光电二极管或雪崩光电二极管, 其接收的光波长范围为 0.89—3.64 μm , 外部量子效率最高可达 80%, 击穿电压约 35V. 在 -10V 的偏置下, 暗电流是 20nA 以下, 倍增因子 $M = 700$.

异质结晶体管^[8]

用 GaAs-Ga_{1-x}Al_xAs 异质结场效应晶体管能制成超高速半导体器件, 77°K 下比 Si 的 MOS 场效应晶体管快 25 倍, 室温下快 10 倍.

集成光路^[9]

现在已能在 GaAs 衬底上单片集成 GaAlAs

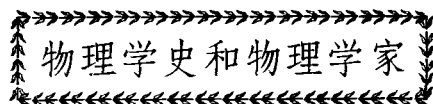
双异质结激光器和异质结双极型晶体管. 激光器典型的脉冲阈值电流为 60mA, 晶体管具有典型的共发射极电流增益 900, 这样的集成光路块, 可获得高速调制的光输出.

量子阱结构^[10]

利用前面所述的异质结各种特性, 把异质结各层做得极薄(量子化), 可制出各种奇异的器件. 例如 GaAs-Ga_{1-x}Al_xAs 多量子阱异质结激光器, 其特征温度 T_0 可高达 437°K, 可以约在 1mA 下或甚至不用外界激励就能发射激光.

对于异质结的特性及应用的研究, 虽然已有一定的历史, 但目前仍处于初步的发展阶段, 还有许多新课题, 特别是异质结的应用与制造方法, 有待人们去探索.

(下转第 286 页)



中国物理学会 1944 年度会务报告资料

一、年 会

1944 年第 12 届年会仍分区举行.

昆明区年会 1944 年 10 月 14—15 日举行 (与其他七个科学团体联合举行), 到会会员 61 人, 宣读论文 31 篇. 论文作者为吴大猷(4 篇,

指本人或本人及合作者共同完成的论文数, 下同)、卞彭(2 篇)、任之恭(2 篇)、周国铨、罗远祉、官知节、叶楷(2 篇)、许孝慰、范绪筠、马仕俊(2 篇)、薛琴访、张守廉、顾功叙、胡岳仁、吴有训、胡玉和、余瑞璜(5 篇)、向仁生、黄胜涛(2 篇)、程家枬、钟盛标(3 篇)、王竹溪、杨振宁、马大猷(4 篇)、顾毅同.