

非晶态物理讲座

第五讲 非晶态磁性的研究

赵见高

(中国科学院物理研究所)

一、前言

非晶态材料的磁性研究，在二十多年前还是个不引人注目的课题。但自1959年，美国加州理工学院的Duwez教授第一次以每秒一百万度的冷却速率对金属熔滴淬火，得到非晶态金属样品以来^[1]，就大大丰富了非晶态材料的研究范围。特别是1970年，由于陈鹤寿等发明了用高速转动的双辊来获得高冷却速率的方法，因而可以连续制备出非晶态条带，后来又用真空蒸发及溅射的方法制备出非晶态材料，特别是高速溅射的方法可以制得块状非晶态材料。所有这些都大大增强非晶态材料，特别是非晶态金属的实用前景，从此这方面的研究就日新月异，蓬勃发展起来，成为凝聚态物理中众所瞩目的领域。我国自1978年以来，已召开过三次非晶态物理学术讨论会，一次应用性学术交流会。无论是基础研究还是应用研究都取得了不少成绩，有些已在推广应用，在我国国民经济发展中开始发挥出它的作用。

除了非晶态氧化物和半导体外，在有关非晶态金属的浩瀚论文中，约有一半以上是研究磁性的。苏联的A. I. Gubanov在1960年首先论证了非晶态材料中同样可以存在铁磁性^[2]。近十余年中，大量的人力、物力用于研究非晶态的磁性，这不仅是在于科学的兴趣，更在于其应用前景最广阔，最具有魅力。

在国内外许多期刊上，都有过非晶态材料物理

或非晶态磁性材料的综述^[3,4]，其中大多是偏重于从应用的角度来讨论。美国有人估计，若用非晶高饱和磁感低损耗合金来取代目前的分配变压器硅钢片铁芯，则每年仅降低的铁芯损耗，就可为美国节省二亿美元以上。目前非晶态高导磁材料的主要性能也达到甚至超过了超坡莫合金。如果再综合非晶态金属材料抗辐射、抗腐蚀、某些优良机械性能、制备方便、成本较低等其它优点，则非晶态磁性材料在许多领域内得到广泛应用是完全可能的。本文并不想再从这些方面多介绍，而只侧重于介绍一些非晶态材料，特别是非晶态金属中磁矩的产生、磁结构特点、自旋波激发、相变情况等若干基本磁学问题的研究近况。

二、结构无序对磁性的影响

对晶态的磁性研究，已有悠久的历史。虽然仍有若干基本问题并未真正搞清，但总体讲还是研究得较深透了。

但对非晶态的磁性研究，则还是个非常年轻的领域。关键在于“非晶态”，即结构的无序性上。当然单指结构的无序则可以是拓扑无序，也可以是化学无序，这里主要是指拓扑无序。如果仅指化学无序性，则不在“非晶态”的研究范围内。

关于非晶态材料的结构，在本讲座的第一讲已由李德修同志作了介绍。因为从原子结构的角度看，非晶态材料具有和液态材料相类似

的特征，许多非晶态金属的制备过程也正是将液态金属高速淬火，从而获得过冷液态的亚稳态金属——非晶态金属。因此大家用以描述非晶态结构的方法就是沿用液态的径向分布函数的概念。Bernal 用著名的硬球杂乱密堆积模型来与衍射实验结果对比，发现两者的径向分布函数符合得很好。这样，我们就可以设想，实际的非晶态结构是由许多大小不等的“硬球”完全混乱地密堆起来的。仔细分析这种密堆原子的最近邻配置，仍然可以发现若干短程有序的“单胞”，见图 1。由于这些“单胞”中常常具有五度对称，从而破坏了平移不变性，而且原子间的键长和键角都不是某固定值，而是具有一定的涨落分布，这就使许多原来意义上很明确的概念、特征、性能都变得不明确、不固定、不唯一起来。诸如原子间交换作用强度、晶场分布、内场等，都具有一定涨落分布而没有唯一的固定值。这就必然影响到非晶态材料的表观磁性。譬如交换作用、内场的涨落引起磁矩值的涨落；晶场的

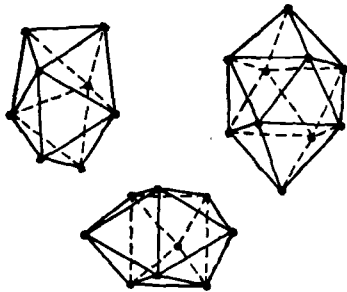


图 1 非晶态结构的几种“单胞”

涨落引起各向异性的涨落等等。这种磁矩受非晶态结构影响的情形对 3d 金属尤为严重，因为 3d 的局域磁矩完全取决于其近邻的状况。而对 4f 金属，这种涨落就小得多，因为 4f 电子被屏蔽得很好，近邻情况不至于影响到它。对离子绝缘体的情形，则介于其间。这种磁矩涨落的情形可从内场分布情况中得到反映，而内场分布又可从穆斯堡尔谱或核磁共振谱中测到。图 2 就反映了上述三种情况的内场分布的区别。在以下各节讨论中，无不反映出这种结构涨落所带来的影响。

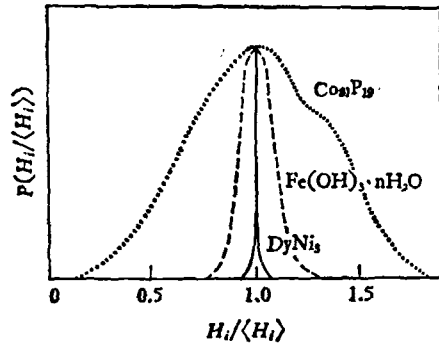


图 2 非晶态材料的三类内场分布

目前尚无关于非晶态磁性的系统理论，若干文章仍然套用一些传统的方法。譬如说，认为自旋是在通常晶格上，但交换积分则是个随机数，这样就可以不考虑拓扑无序性。最简单的一种分析方法是分子场近似来计算非晶态的磁化问题。海森堡模型中的初始哈密顿量

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i \cdot S_j - \mu_B g H \sum_i S_{iz}$$

其中 S_i 和 S_{iz} 分别表示第 i 个自旋及其 z 分量的算符； J_{ij} 是具有涨落的交换积分； g 为朗道因子； μ_B 是玻尔磁子； H 为外场，其方向沿 z 轴。在计算中，假定了 J_{ij} 的涨落只取决于自旋间的距离，而不管周围的拓扑情况，这样得出的归一化磁化强度可写成布里渊函数的表式：

$$\sigma = \frac{1}{2} \{ B_1[(1 + \Delta)\chi] + B_2[(1 - \Delta)\chi] \},$$

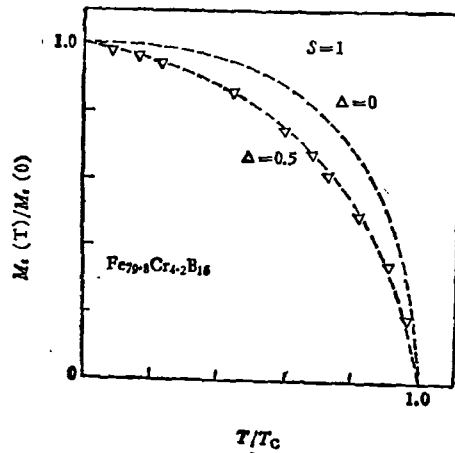


图 3 约化磁化强度和约化温度的关系

其中 $\chi = [3S(S+1)] \frac{T_c \sigma}{T}$, $\sigma = \frac{\langle \bar{S}_z \rangle}{S}$,

$$\Delta^2 = \frac{\langle \Delta J_{ij}^2 \rangle}{\langle J_{ij} \rangle^2},$$

尖括号是指对位形平均。由此式可看出，由于交换作用的涨落使 σ 随温度而变化的速率提高了。图 3 即为 $\text{Fe}_{79.8}\text{Cr}_{4.2}\text{B}_{16}$ 的结果^[5]。相应的涨落为

$\Delta = \sqrt{\langle \Delta J^2 \rangle} / \langle J \rangle \sim 0.5$ ，当涨落 Δ 高到某个临界值时，铁磁性将会消失。

三、磁 矩

磁性原子在非晶态材料中的磁性显现是个逐步的过程^[6]。类似于晶态情况，在非常稀薄的磁性原子浓度时，只有孤岛状的磁性杂质和导电电子间的耦合，这就产生了电阻的负温度系数效应——近藤效应。而当磁性原子浓度达到 0.5% 原子比以下时，则呈现自旋玻璃的特征，原子间只有间接交换作用，磁化强度、比热、剩磁等可测性能都是成分标度参量 T/c 或 H/c 的普适函数。

随着浓度的继续增加，磁性原子间趋于浓缩成团，成为成团玻璃或称混磁性，这将大大增强磁性原子间的近程相关作用，从而开始显现磁性。当浓度达到某个极限值时，直接交换作用就会形成长程铁磁性。

但与晶态明显不同的是，对许多非晶态材料不仅在稀释情况下具有近藤效应，即使在高磁性杂质浓度时，甚至在呈现出很好的铁磁性的同时，仍然会有这种磁性杂质对导电电子的散射，表现为电阻的负温度系数。这是因为结构的涨落导致在磁性原子浓度很高时，仍然有可能存在局部浓度稀薄区，满足稀释杂质的条件，或者材料中存在不同浓度的相分离，分为高浓度相和低浓度相。图 4 即为 TbFe_2 样品中的电阻率曲线及 Fe 的内场几率分布曲线。可见 Fe 含量达 66.6% 原子比时，电阻率负温度系数仍可保持至近室温，而其内场分布也明显表明有两部分，一为强内场的高浓度铁磁区，另一

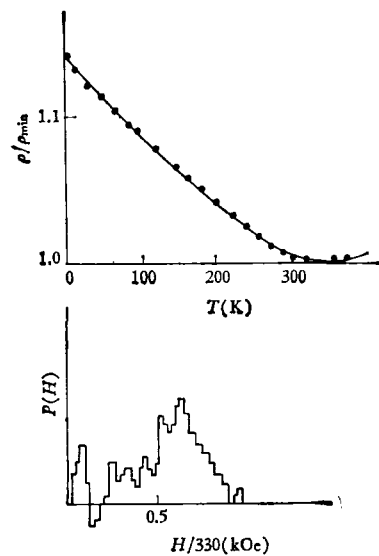


图 4 非晶态 TbFe_2 的电阻率-温度关系及其 Fe 的内场分布曲线

为稀释低内场区^[7]。

对大量的非晶态合金测量了磁矩，综合这些结果可以估计出在非晶态材料中，每个 Fe, Co, Ni 原子所具有的玻尔磁子数基本在 2.0, 1.0 和 $0.0\mu_B$ 左右，而相应的晶态值应为 2.2, 1.7 和 $0.6\mu_B$ 。这种磁矩值下降的原因，不少人认为是电子转移的结果，譬如一些形成玻璃的类金属元素 (B, P, Si 等) 的电子填充了磁性原子的 d 壳层，从而使磁矩值下降。然而这种假设的前提是能带结构不因这样而改变形状，但这并

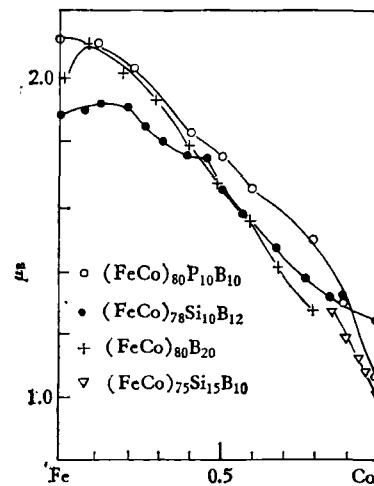


图 5 Fe-Co 系非晶合金的磁矩值

不符合实际,对 Cu-Ni 合金的光电子能谱结果说明, Cu 和 Ni 的能带实际上都有改变,而另一些结果也说明,并不存在电荷转移. 图 5 即为某些 Fe-Co 系非晶态合金的测量结果^[8].

有趣的是,在某些情况下, Fe 的磁矩值会变得很大,譬如材料中含有 Pd 或 H 时, Fe 的磁矩可高达 $4-6\mu_B$, 而在晶态下, Fe-Pd 合金有时可使 Fe 的磁矩高达 $12\mu_B$. 其原因是 Pd 原子被 Fe 的磁矩极化,也产生了磁矩的结果.

四、磁结构

磁结构反映了磁性的基态. 对晶态材料,有规则的晶格,有统一的交换积分,有统一各向异性轴,磁结构就较简单. 如磁学教科书中所介绍的铁磁结构、反铁磁结构、亚铁磁结构以及稀土金属中存在的螺磁结构. 非晶态材料则问题要复杂得多,虽然从客观上讲,非晶态材料应该不存在各向异性,但从局域有序性看,则应有局域的各向异性存在. 特别是对含有稀土元素的非晶态材料,局域单轴各向异性常常很强,对许多性能起着重要的作用. 这种系统的哈密顿可写成

$$\mathcal{H} = - \sum_{ij} J(r_{ij}) S_i \cdot S_j - \sum_i D_i S_{iz}^2.$$

磁结构将取决于交换项和各向异性项的权衡. 当交换积分为正值, $J > 0$, 且 $|J| \gg |D|$, 就可获得类似于晶态中的铁磁结构,如图 6(a) 所示,过渡金属-类金属的金属玻璃,多属这类磁结构. 然而严格讲非晶体中并不可能存在自旋完全平行的状况,由于交换积分和各向异性的涨落,使得这种完全平行的排列只能是种亚稳态.

如 $|J| \lesssim |D|$, 局域的各向异性强度与交换作用可比较时,磁矩则分布在半球范围内,称为 asperomagnet^[9],如图 6(b) 所示.

若交换积分为负值, $J < 0$ 时,问题就更复杂一些. 很明显,由于非晶态并没有交替性的晶格结构,因而就不可能出现反铁磁性长程序. 实验表明这时的系统为类似于自旋玻璃的磁结

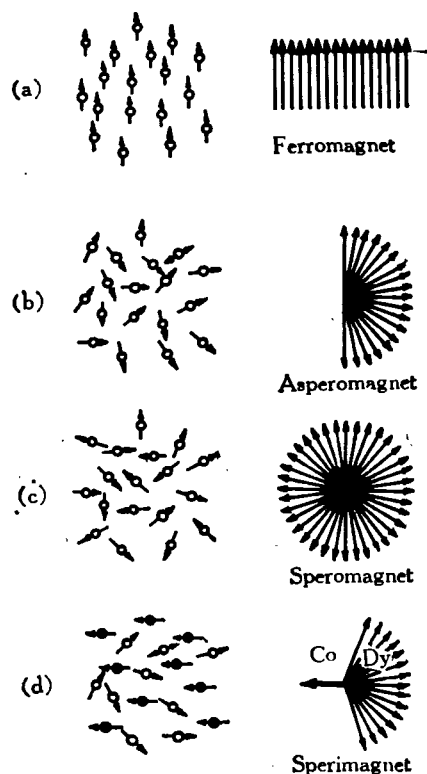


图 6 磁性非晶态材料中的几种磁结构

构状态,称为 speromagnet,如图 6(c) 示.

如果系统中含有几种不同的磁性原子时,按上面推理可以想象会出现类似于亚铁磁序的情况,譬如一类原子按 asperomagnet 方式排列成扇形,而另一类原子则按 $J < 0$ 排列在相反方向. 图 6(d) 所示 Dy-Co 的情况即为实验上证实的这类结构存在的一例^[10]. 这称为 sperimagnet.

最近 Aharony 和 Pytte 从理论上说明^[11],在非晶态材料存在杂乱的局域单轴各向异性时,就可能出现一种新的磁性基态,它在任何温度下也不出现自发磁化,但其磁化率却是无穷大. 这种磁状态可以从 Arrott 图中看得很清楚: 在一般磁状态下,当温度低于磁转变点, Arrott 图的曲线就和纵轴 M^2 相交,截距对应于自发磁化强度;而当温度高于转变点时,曲线将和横轴 H/M 相交,截距即为磁化率的倒数. 但对于 Aharony 所指出的新磁状态,任何温度下也不会和纵轴相交,只会将曲线汇集于坐标原点,即

自发磁化强度为零，但磁化率为无穷大的点。目前已有几篇文章从实验上证实了这种磁状态的存在^[12]。图7即为非晶态 $Dy_{0.32}Ni_{0.68}$ 的这类 Arrott 图。

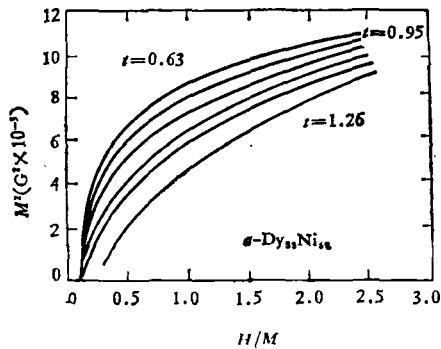


图7 Aharony-Pytte 磁基态所相应的 Arrott 图

五、磁 激 发

非晶态磁性材料中的磁激发，除有从自旋向上态激发到自旋向下态的 Stoner 激发外，还有一种局域的单离子磁激发，其起因仍是由于非晶态结构的涨落特点。这时局域各向异性很强的稀土离子，其总有效场 H_m 与局域各向异性场偏离不大，而磁矩 M 绕 H_m 进动的基态 M_j 与 H_m 的夹角最小，如激发到其它磁量子态，因各向异性场很强，激发态的自旋进动对它周围的自旋进动相位关联影响不大。这种单个离子的自旋激发对周围自旋基态影响不大的磁激发，即为单离子磁激发。这是一种低能磁激发，它常表现为低温比热的温度线性关系。

但研究最多的磁激发仍为自旋波激发。晶体中的自旋波自然可以用平面波描述，但对非晶体，原子没有平移不变性，因而就不宜用平面波来描述自旋波，当然也就没有严格意义上的自旋波谱，而应该是一些波谱线的包络。但当波长足够长，远比原子间距为大时，就可将材料视为连续介质，而忽略原子结构的细微涨落。这时，用平面波来描述非晶态的自旋波仍然是可行的了。

实验上测量自旋波激发的方法有三种：中

子非弹性散射法、磁共振法及由磁化强度的温度关系间接推导法。

中子散射法可以直接测量铁磁体的色散关系

$$\hbar\omega(k) = \Delta + Dk^2 + Ek^4 + \dots,$$

其中 Δ 为偶极子作用部分，而 D 就是自旋波劲度系数。图 8(a) 即为中子散射测得的 $Fe_{75}P_{15}C_{10}$ 自旋波谱^[13]，其 $k < 0.5 \text{ \AA}^{-1}$ 的长波部分符合波矢 k 的二次方律。在 $k \sim 3$ 的短波长区，还有一段谱，其谱的极小值所对应的波矢正好与结构因子的第一极大值 Q 对应，如图 8(b) 所示。这种 $|k - Q|$ 在不大范围内的自旋波谱，有人用局域磁子来解释，得到的

$$\varepsilon_k = \Delta + D_1(k - Q)^2$$

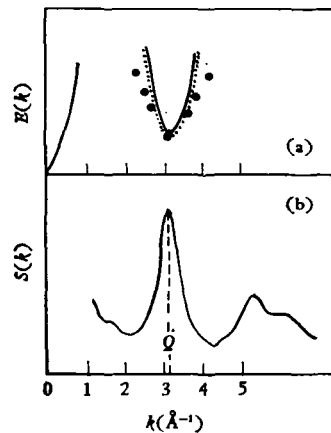


图8 Fe-P-C 非晶态合金的自旋波谱及其结构散射因子与实验也符合得不错^[14]。

通过分析磁化强度 M 与温度的关系而间接推知自旋波的劲度系数，是最简单易行的方法。因为在低温下 M 随温度而变化应满足下面关系：

$$M(T) = M_0(1 - BT^{3/2} - CT^{5/2}),$$

其系数 B 一般认为和自旋波劲度系数 D 之间的关系是

$$B = \frac{2.612\mu_B}{M_0} \left(\frac{k_B}{4\pi D} \right)^{3/2}.$$

然而不少实验发现，由磁测量测出的 $B_{磁测}$ 与中子散射所得 D 推出的 $B_{中子}$ 之间常不一致，而且总满足 $B_{中子} \approx 70\% B_{磁测}$ 。究竟这种差别

是来源于采用了不同的样品, 还是因为 B_{eff} 中本来就包含有另外一些磁激发的贡献, 譬如说局域单离子磁激发过程, 目前尚不清楚。

六、居里温度和临界现象

图 9 为一典型的非晶态磁性材料的磁相图。从中看出一般情况下应存在三类转变: 顺磁—铁磁转变; 顺磁—自旋玻璃转变; 铁磁—自旋玻璃转变。

顺磁—铁磁的相界线即为居里温度线。对非晶体的居里温度, 是个尚未讨论清楚的问题。按非晶体中所特有的原子间距的涨落及交换作用的涨落, 则可认为非晶体很难有确定的“居里点”, 而应该是分布在某个温度范围。然而如果考虑到大部分情况下磁相关长度远比原子间距为长, 特别是在临界范围更如此, 这样就可忽略近邻间距涨落所造成的影响, 使临界行为主要取决于宏观结构, 就可视其为海森堡铁磁体的临界行为。在居里点附近作详细的测量, 也发现有二类情况。一类确可发现有明确的居里温度, 在很宽的温度范围内临界行为都符合标度律, 临界指数值也与晶态类似。但另一类材料, 特别是含有两种以上磁性原子的材料, 居里点就变得不唯一而分散于一定的温度范围。但分析表明其起因似应为化学非均匀性, 如成团化

或相分离所造成, 而并非是均匀非晶合金的内禀特性。

按海森堡磁性体的特点, 在临界点附近应有以下关系:

$$M_s \sim (T_c - T)^\beta \quad T < T_c,$$

$$\chi_0^{-1} \sim (T - T_c)^\gamma \quad T > T_c,$$

$$M \sim H^{1/\delta} \quad T = T_c.$$

下面列出其临界指数 β , γ , δ 的理论值及某些非晶体的测量值供参考。

表 1 临界指数值

	β	γ	δ
三维海森堡模型	0.33—0.37	4/3	4.2
非晶态理论值	0.50	1	
$\text{Fe}_{32}\text{Ni}_{36}\text{P}_{12}\text{B}_6\text{Si}_{14}$	0.41	1.67	5.07
$\text{Co}_{70}\text{B}_{10}\text{P}_{20}$	0.40	1.34	4.39
$\text{Gd}_{40}\text{Au}_{20}$	0.44	1.29	3.96

在居里温度的测量中, 常常遇到的问题是居里温度比晶化温度还高, 而且居里温度受退火的影响很大, 因而有时要靠外推来获得居里温度, 必然是个误差较大的值。

关于居里点受退火温度的影响, 实际上是结构弛豫的反映。适当的退火温度常常可提高居里点, 而且随退火温度的改变, 居里点也呈可逆的变化^[15]。图 10 即为一例。目前对结构弛豫的种种表现还缺乏统一的、公认的理论解释。

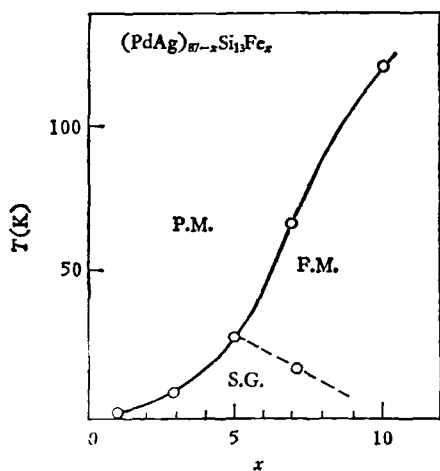


图 9 PdAgSiFe 的磁相图 (P. M. 为顺磁; F. M. 为铁磁; S. G. 为自旋玻璃)

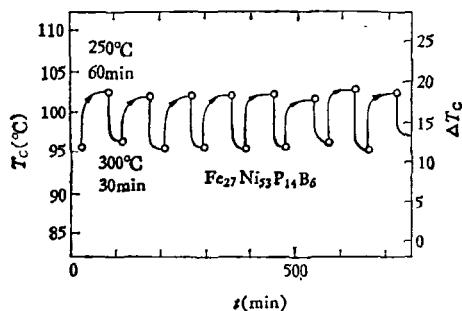


图 10 非晶合金居里温度随退火温度的改变而变化

对磁相图上另外两类转变的临界现象, 也有若干文章作了较好的讨论, 在此不多介绍, 有兴趣的读者可参考文献[16],[17]等。

七、磁各向异性

前面已经提过,从原则上讲非晶态材料不应该存在宏观各向异性。但实际非晶态金属中,多少总存在各向异性,而且它对材料的性能影响很大,因此研究非晶态金属的各向异性仍是个很重要的课题。

首先是用快速淬火制备的样品,在制备过程中产生不均匀的内应力,它与磁弹性作用的结果将引起局域磁各向异性,但这种各向异性将随着适当的退火而消失。

对蒸发或溅射所得的非晶态薄膜,常常会出现垂直膜面的磁各向异性^[18]。从技术应用角度有不少人在研究用它作磁泡存贮元件,磁光读写元件等多种电子器件。但对其各向异性起因究竟是组分取向造成还是形状造成,仍无定论。

与晶态材料相类似,非晶态材料中也可产生感生各向异性。可由磁场感生出,也可由应

力感生出单轴各向异性。当材料中存在两类过渡金属元素,而且含量相当时,这种各向异性达极大值,说明取向原子对的形成可能是这种各向异性的来源。即使非磁性的类过渡金属原子也可参与这种原子对的作用。

另一种重要的各向异性是来源于局域晶场的局域磁各向异性,特别是对含稀土的非晶态金属,这种局域各向异性常常非常强,从而对许多性能产生重大影响。譬如前面已提到的几种非晶态所特有的磁结构,就是这种局域各向异性的结果。另外,这种局域各向异性也可导致巨大的矫顽力。Alben 等的工作表明^[19],当单离子局域各向异性与交换积分相比足够强时,非晶态磁性材料将会从通常很“软”的磁性突变为很“硬”的磁性,按其估计,产生此突变的范围约为 $D/J \sim 5$ 。目前实验上对 $\text{Pr}_{56}\text{Ca}_{14}\text{Fe}_{30}$ 非晶态合金获得最高矫顽力可达 $6 \times 10^4 \text{Oe}$ ^[20]。而一般软磁非晶态合金的矫顽力只有 10^{-3}Oe 数量级。图 11 即为几种非晶态合金的磁滞回线。

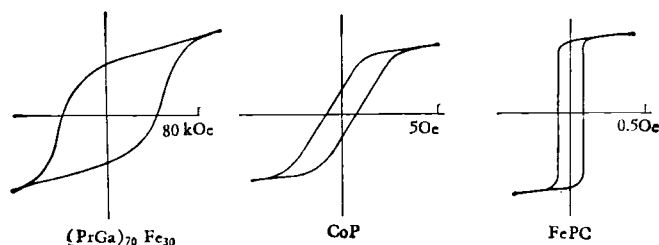


图 11 几种非晶态材料的磁滞回线

八、结 语

非晶态磁性研究在过去十年里得到飞速的发展,研究历史虽然很短,但已经给人类的知识宝库增添了许多重要而有益的内容。我们对非晶态材料的物理性质已了解得比较深入,对自旋排列基态的认识也已大大丰富,我们还初步了解到系统中参量涨落对磁性所带来的重要影响。对非晶态金属研究初期就发现了的许多奇特特性,现在也基本认识了其奥秘所在。

然而必须看到,在这个领域中还存在大量未知的问题。许多方面的测试数据还太少,也缺乏更接近非晶态实际的理论解释。对临界现象、基本磁激发、自旋系统的动力学过程等许多方面的研究都还刚刚开始,甚至尚未开始,因此还需要人们继续在这个领域努力探索,进行大量的研究。

目前对非晶态磁性研究得比较充分,成就比较突出的方面是非晶态磁性材料的技术应用,特别是作为软磁材料的应用。目前国内在大功率变压器铁芯材料、高频变压器铁芯材料、

磁屏蔽材料、高性能磁头材料、高磁弹性材料等方面都获得了可喜的研究成果,许多已制成可应用的器件。可以相信,继续抓紧非晶态磁性的研究,增强基础研究和应用研究的联系和配合,则在不久的将来,非晶态磁性材料将会在我国国民经济中发挥出愈来愈大的作用。

参 考 文 献

- [1] P. Duwez, R. H. Willems and W. Klement, *J. Appl. Phys.*, **31** (1960), 1136.
 [2] A. I. Gubanov, *Sov. Phys. Solid St.*, **2** (1960), 468.
 [3] F. E. Luborsky and L. A. Johnson, *J. de. Phys.*, **41** (1980), C8—820.
 [4] 王荫君、赵见高, *物理*, **7**(1978), 24.
 [5] W. S. Chan, B. G. Shen, H. Y. Lo and B. L. Yu, in *Proc. 4th Int. Conf. on Rapidly Quenched Metals*, (1981), 1137.
 [6] S. J. Poon and J. Durand, *Phys. Rev. B*, **18** (1978), 6253.
 [7] 郑德娟、王震西、张殿琳、林淑媛, *物理学报*, **31** (1982), 185.
 [8] C. D. Graham and T. Egami, *Ann. Rev. Mater. Sci.*, **8** (1978), 423.
 [9] J. P. Rebouillat, A. Lienard, J. M. D. Coey, R. A. Boggiano and J. Chappert, *Physica*, **B+C** **86—88** (1977), 773.
 [10] J. M. D. Coey, J. Chappert, J. P. Robouillat and T. S. Wang *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 1061.
 [11] A. Aharony and Pytte, *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980), 1583.
 [12] M. J. O'shea and D. J. Sellmyer, *J. Appl. Phys.*, **53** (1982), 7722.
 [13] H. A. Mook, *J. Appl. Phys.*, **49** (1978), 1665.
 [14] Y. Takanashi and M. Shimizu, *Phys. Lett.*, **A** **58** (1976), 419.
 [15] T. Egami, *Mat. Res. Bull.*, **13** (1978), 557.
 [16] K. Moorjani, S. K. Ghatak, K. V. Rao, B. Kramer and H. S. Chem, *J. de Phys.*, **41** (1980), C8—718.
 [17] J. W. Lynn, R. W. Erwin, J. J. Rhyne and H. S. Chen, *J. Appl. Phys.*, **52** (1981), 1738.
 [18] 杨翠英、王荫君、王忠铨、李方华, *金属学报*, **15** (1979), 351.
 [19] R. Alben, J. Becker and M. Chi, *J. Appl. Phys.*, **49** (1978), 1653.
 [20] S. G. Conelison, D. J. Sellmyer, J. G. Zhao and Z. D. Chen, *J. Appl. Phys.*, **53** (1982), 2330.

误差理论与实验的数学处理讲座

第三讲 测量误差与实验结果的处理

高 崇 寿

(北京大学物理系)

一、样本和统计量

如果测量某一物理量 x , 独立测量了 N 次得到了 N 个数值 $x_i, i = 1, \dots, N$. 显然这些 x_i 是随机变量 x 的 N 个随机取值, 这 N 个 x_i 的整体从概率意义上应当反映随机变量 x 的概率分布特征. 当然, 由于 N 是有限数, 此“反映”不可能是完全的. 这些 x_i 的集合称为随机变量 x 的一个随机样本, N 称为样本的容量. 实验中首先要处理的是如何从随机变量的样本中得到有关这个随机变量所代表的物理量的信息.

容量为 N 的样本 $x_i, i = 1, \dots, N$, 是一个随机变量的 N 个随机取值. 同时, 我们又可以把 $x_i (i = 1, \dots, N)$ 看作是 N 个随机变量的一组随机取值. 为了便于区分, 我们把这 N 个随机变量仍记作为 $x_i, i = 1, \dots, N$, 而把这 N 个随机变量的一组具体随机取值用 $x_i^{(0)}, i = 1, \dots, N$, 代表. 这样另一组随机取值可记作 $x_i^{(a)}, i = 1, \dots, N$, 依此类推.

在这种考虑下, 这 N 个随机变量是互相独立的. 并且由于它们实际上都反映用同一仪器和相同方法测量同一物理量 x , 因此它们的概率密度函数形式应完全相同, 即都是 x 的概率密度函数, 只不过把自变量换成相应的 x_i . 这