讲座

近代物理讲座

第三讲 运动稳定性问题

张承福
(北京大学物理系)

一、问题的提出

在力学和日常生活中，大家对运动稳定性问题已有一些初步概念。通常所了解的是最简单的稳定性问题——力学的平衡稳定性问题。

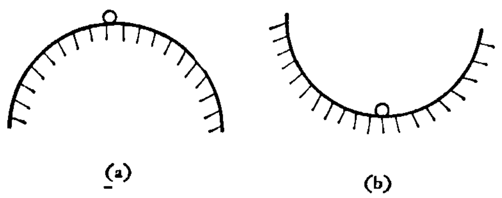

图 1

如图 1(a) 所示，小球处于凸面的顶点是力学上平衡的，但这是一种不稳定的平衡状态。因为任何微小扰动都可使小球越来越远地离开平衡位置而永不回来。对于图 1(b) 所示情形，小球处于凹面的底部，这也是平衡的，而且是稳定的平衡状态。因为任何微小扰动虽可使小球偏离平衡位置，但它始终只在平衡位置附近作振动。如果存在阻尼，则小球最终仍将停止在原来的平衡位置上。

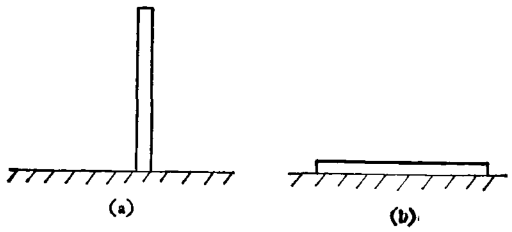

图 2

图 2(a) 表示，竖直放置的细杆虽然是平衡的，但却是不稳定的。因为任何小的扰动可以使之倾倒而不再回到原来的竖直状态。反之，平放在地上的细杆 [图 2 (b)] 则是处于稳定的平衡状态。

以上两例是最简单的力学平衡的稳定性问题。实际上，运动稳定性具有更广泛的涵义。下面再举几个例子加以说明。

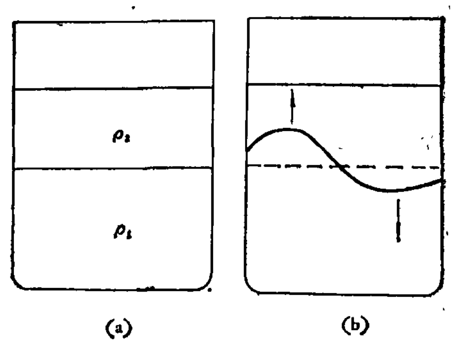

图 3

图 3(a) 表示容器中盛有两种液体，密度分别为 ρ_1 和 ρ_2。如果 $\rho_2 > \rho_1$，即重液体在上，轻液体在下，这种状态虽然是力学上平衡的，但却是不稳定的。因为分界面的任何扰动（偏离平面状态）的后果是扰动将不断增长 [图 3 (b)]，最终导致液体状态的完全改变。反之，如果 $\rho_2 < \rho_1$，则平衡状态是稳定的。根据力的平衡的分析是容易说明上述结论的。此例说明，连续介质中同样存在稳定性问题。

不仅平衡状态有稳定性问题，运动状态也存在稳定性问题．例如，欲从A处发射一火箭到B处（图4）．火箭运行轨道可事先根据火箭的飞行规律和受力情况算出．设计时也应考虑到一系列可能的干扰因素（如风的影响等等）．但是，这必竟是根据理想情况设计的，而各种干扰因素则具有很大的偶然性和不确定性，是无法在设计时完全考虑进去的．诸如燃料的燃烧问题、大气和重力的变化等等，都将影响火箭的轨道和着弹点．因而，人们常对火箭的着弹点规定一个范围．这里存在着一个火箭轨道的稳定性问题．如果所设计的轨道是稳定的，即任何小干扰引起的轨道的改变也是小的，那么只要根据经验估计出可能的最大干扰值，就可以确定出着弹点的范围来．但是，如果所设计的轨道是不稳定的，如图4 C处受到的干扰使火箭偏离原轨道，而且随着时间的增长，偏离越来越大，最后就不可能达到预定的目标．这样的轨道显然是不可取的．在人造卫星轨道的设计和粒子回旋加速器中粒子轨道的设计等等许多问题中，都存在类似的问题，这就是轨道的稳定性问题．

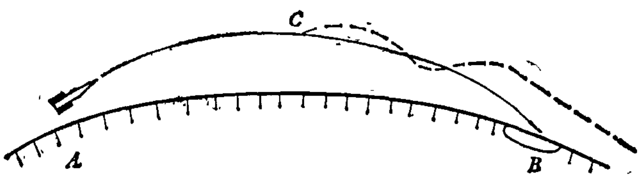

图 4

为了说明小干扰可能使轨道发生大改变，我们再举一个简单而又极端的例子．

图 5

如图5所示，平地上有一小土包．可设计一条轨道，使小球以速度v_0运动，并刚好能越过土包顶点而向前运动．但是，如果小球在途中受到一些小的干扰阻力，速度变小了一点，则它就不能越过土包，而是将向反方向运动．这样，两种轨道就完全不同了．这就是轨道不稳定性的一个特例．

以上各例都属于力学上的稳定性问题．实际上，在物理学的其它领域以及化学、生物、工程等等各个领域内都存在稳定性问题．

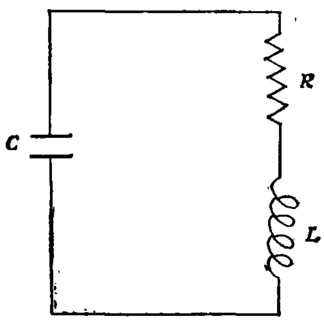

图 6

如电学中的 RLC 回路（图6），电压为0的状态是一种平衡状态． 这种状态是否稳定呢？也即如果由于某种干扰，电容器两端产生了小的电压，回路开始振荡，这种振荡的振幅将趋于衰减呢还是越来越强？当然，对这个具体例子，容易看出振荡是衰减的，即平衡状态是稳定的．但某些振荡回路却可能是不稳定的．扩音器有时发生的尖叫声就是一种由不稳定性导致的自激振荡现象．

又如一化学反应罐内进行着化学反应．设这是一种放热反应，反应过程中产生的热量将使反应罐温度升高，随之也影响反应速率．同时，罐壁向周围的热传导使罐内温度下降．当产热率与热传导相平衡时，反应就按恒定的速率进行． 这里也存在一个稳定性问题． 如果由于一些偶然因素使反应罐内的温度增高了一些，反应加快了，反应产热也增加了．而如果热传导的增加不够快的话，就可能使罐内的温度不断上升，导致爆炸性的不良后果．所以，反应的稳定性问题是必须考虑的重要问题．上述问题可用一个简单的数学关系描述：

$$\frac{dT}{dt}=S(T)-Q(T), \qquad (1)$$

其中T是反应罐内的温度，$S(T)$是反应产热

率，即热源项，$Q(T)$ 是热传导项. S, Q 都是温度的函数. 当 $S(T_0)=Q(T_0)$ 时，就达到平衡温度 T_0. 研究稳定性就是要考察小的温度扰动对 T 的影响. 若 $T\simeq T_0$，则反应是稳定的. 若 T 不断下降，则反应将趋于停止；若 T 不断增加，则将有爆炸性后果. 后两种情形都是不稳定状态，都不是所需要的反应状态.

方程 (1) 这种简单形式的数学模型还可以近似描述很多别的类型的问题，如它可以描述细菌群落的增殖问题等. 若将 (1) 中的 T 理解为细菌的个数，$S(T)$ 表示增殖项，$Q(T)$ 表示死亡项，平衡时菌数保持不变. 这种状态是否稳定呢? 不稳定的后果或者是细菌全部死亡，或者是不断增殖，都不是人们所需要的状态. (当然，也可能趋于另一个平衡状态，对此这里不准备讨论了). 此外，如自然界的生态平衡、人口控制等等都有相应的稳定性问题. 当然，相应的数学模型要比 (1) 式复杂些.

以上几个例子说明:

1. 稳定性问题是广泛存在的，而且有着重要的理论与实际意义.

2. 对“运动稳定性”中的“运动”两字不能仅作力学上的狭义理解，而应作广义的理解. 可能将它称为“状态的稳定性”或“系统的稳定性”更为妥切些.

3. 具体内容很不相同的实际问题，其稳定性的基本涵义、数学模型的形式以及稳定性的分析方法却很相似，即具有“共性”，可以统一考虑. 所谓“稳定性理论”，就是从事于建立一些准则和方法以判断所研究的状态是否稳定.

考虑到稳定性问题的广泛性和重要性，我国在基础教学中对此问题的介绍是相对地较薄弱的. 本讲的目的就是对稳定性问题的基本概念和简单问题的一般处理方法作一初步的介绍. 有了上面的定性了解，第二节将讨论稳定性问题的数学表述及求解的一般方法. 最后，在第三节讨论几个例子以说明一般方法的具体应用.

二、稳定性的定义及一般解法

1. 稳定性的定义

讨论稳定性问题，首先要将所讨论的问题用数学模型表达出来. 通常可以用以下形式的微分方程组表达之:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=Y_{1(y_1,y_2,\cdots y_n,t)}, \\ \dfrac{dy_2}{dt}=Y_{2(y_1,y_2,\cdots y_n,t)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dy_n}{dt}=Y_{n(y_1,y_2,\cdots y_n,t)}. \end{cases} \tag{2}$$

这是 n 个一阶微分方程组. 它有 n 个待求变量 $y_1, y_2, \cdots y_n$，都是时间 t 的函数；$Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ 则是 n 个已知函数. 需指出，有的问题本身是高阶微分方程，但总可化成一阶微分方程组来表示. 如力学问题满足二阶微分方程，对一维质点运动有 $\ddot{x}=f(x,t)$，总可表达为 $\dot{x}=p$, $\dot{p}=f(x,t)$ 的形式. 此外，连续介质的稳定性问题本质上是无穷多自由度的问题，这里不准备讨论了. 以下认为 n 是有限数.

为表述简便起见，将 $\{y_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 看成 n 维的矢量，即令

$$\boldsymbol{y}\equiv(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$
$$\boldsymbol{Y}\equiv(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n),$$

则方程组 (2) 可表达为

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y},t). \tag{3}$$

设此方程组满足存在唯一性条件，则对于任一给定的初值 $t=t_0$ 时，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0$，就确定了一个特解:

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{f}(t_0)=\boldsymbol{y}_0.$$

这就是“未受干扰的运动”，或称“平衡解”.

如果 $t=t_0$ 时受到一扰动，即“初条件”稍有变动，由 $\boldsymbol{y}_0$ 变为 $\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{\eta}$($|\boldsymbol{\eta}|$ 是小量)，则相应的解 (记为 $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\eta})$) 不再等于 $\boldsymbol{f}(t)$. 稳定性问题要研究的就是: 对于小的干扰 $\boldsymbol{\eta}$，解 $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\eta})$ 与 $\boldsymbol{f}(t)$ 的差别是否保持很小? 若是，

则称平衡解 $f(t)$ 是稳定的；反之则为不稳定的.

稳定性的定义的数学表述是：若对于任意给定的数 $\varepsilon>0$，总存在数 $\delta>0$，使得当 $|\eta_i|\leqslant\delta$ 时 $(i=1,2,\cdots,n)$，恒有

$$|y_i(t,\eta)-f_i(t)|\leqslant\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

此式对一切 $t\geqslant t_0$ 均成立，则称 $f(t)$ 是稳定的平衡解；反之，则称 $f(t)$ 是不稳定的解.

此定义的几何意义可由图 7 ($n=2$ 情形) 说明.

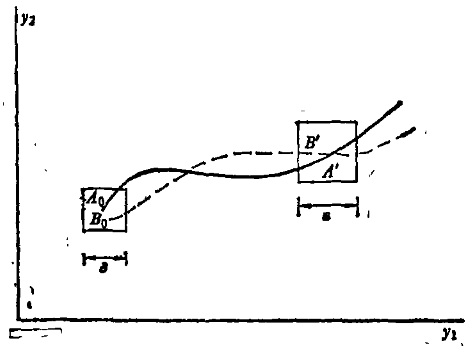

图 7

若任意给定 $\varepsilon>0$，总可找到 $\delta>0$，使得 t_0 时刻从 C_0 区域（以 A_0 为中心，δ 为边长的方形区）出发的任何轨道与原轨道的差别始终不超过以 ε 为边长的方形区，则轨道是稳定的. 反之，如果不论 C_0 区缩得多么小，两条轨道的差别总要越出 ε 为边长的方形区，则就是不稳定的.

需要强调的是，稳定性不仅与所考察体系的运动规律有关，即与方程 (3) 的具体形式有关，而且还与所考虑的特解 $f(t)$ 有关. 笼统地说方程 (3) 稳定与否，是没有意义的. 因为对应于不同的初始条件，方程 (3) 可有无穷多个特解，实际情况往往是对某些特解是稳定的，对另一些特解则是不稳定的. 所以稳定性都是对问题的确定的特解进行讨论的.

2. 问题的简化

由于稳定性主要讨论 $|y(t)-f(t)|$ 的变化范围，故可作变量变换，令

$$x=y-f(t),\tag{4}$$

则由方程 (3) 和定义 (4) 容易得到 x 所满足的方程为

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t)\equiv Y(f+x,t)-Y(f,t).\tag{5}$$

由于 Y 是已知函数，所以 X 也是已知函数. 方程 (4) 称为“干扰方程”或“扰动方程”. 显见，$X(0,t)=0$，所以 $x(t)\equiv0$ 是方程(5)的一个特解. 此特解正对应于所考察的 $y=f(t)$ 特解. 经此变换后，一般的稳定性问题与力学上的平衡稳定性问题就非常相似了！

用 x 表示时，稳定性的定义表述为：若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $|X_i(t_0)|\leqslant\delta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，对一切 $t\geqslant t_0$，恒有 $|X_i(t)|\leqslant\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)$，则 $x=0$ 解是稳定的；反之则是不稳定的.

此定义的几何意义可由图 8 看出 ($n=2$ 情形)，叙述就从略了.

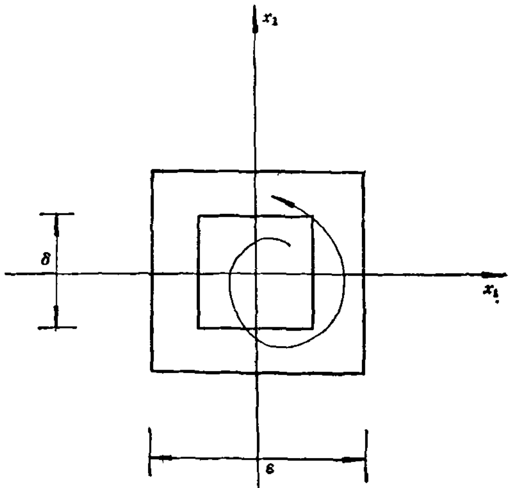

图 8

在有些问题中，只要扰动不超过一定的范围(δ')，扰动的影响不仅保持很小(即问题是稳定的)，而且扰动的影响还将随时间的增长而趋于消失，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)\to0$. 这种状态称谓渐近稳定状态. δ' 构成的区域(见图 9)称谓渐近稳定域或吸引域. 图 1(b) 所示的状态在有阻尼的情形下就是渐近稳定状态. 阻尼单摆的平衡状态也是渐近稳定的. 通常，渐近稳定是与阻

尼(耗散)相联系的.

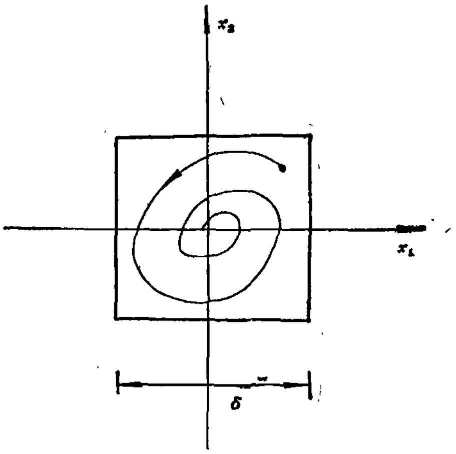

图 9

3. 线性稳定性问题的一般解法(定常问题)

扰动量 $\boldsymbol{x}$ 满足方程 (5)，只要能解出 $\boldsymbol{x}(t)$ 来,就可判断稳定与否了. 但是,方程 (5) 的求解一般是很困难的,而且也不存在普适的解法.

在下述特殊情况下，稳定性问题可有简单的一般解法:(i) 定常问题,即函数 $\boldsymbol{X}$ 中不含 t，它仅是 $\boldsymbol{x}$ 的函数. (ii) 线性问题，即 $|\boldsymbol{x}|$ 是小量. 对于稳定的问题，只要初始扰动 $|\boldsymbol{x}(t_0)|$ 是小的，则 $|\boldsymbol{x}(t)|$ 也总是小的，条件总能满足. 这样的状态称谓线性稳定的. 对于不稳定的问题，$|\boldsymbol{x}(t)|$ 是要随时间增长的，但在开始一段时间内，线性近似还是适用的，它可以预示扰动发展的趋势. 所以线性稳定性理论是研究稳定性的第一步，而且是重要的一步. 至于大扰动下的稳定性问题(如图 10 所示，小球的状态 A 对小扰动是稳定的，但对大扰动并不稳定)，或者线性不稳定状态的长时间演变问题(如图 11 所

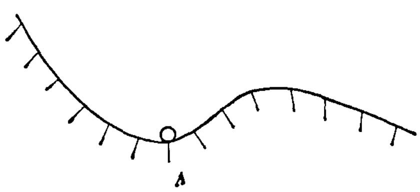

图 10

示，小球在 A 处不稳定，但可能在 B 或 C 处稳定下来)，则涉及数学上很复杂的非线性问题，并无一般解法，这里也不拟讨论了.

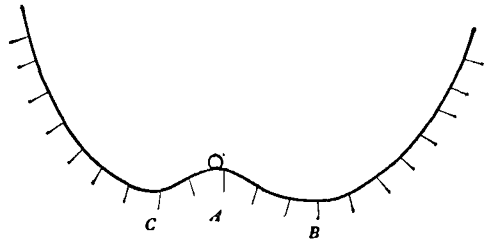

图 11

对于定常的线性稳定性问题，对方程(5)中的 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 作泰勒展开，忽略高级小量，并注意到 $\boldsymbol{X}(0)=0$，可得

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{M}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=0},$$

即 $\mathbf{M}$ 是 $n\times n$ 的二阶张量，其分量

$$M_{ij}=\left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=0},$$

是与 $\boldsymbol{x}$ 无关的常数. 具体地说，如 $n=2$，(6) 式就代表如下常微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=M_{11}x_1+M_{12}x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=M_{21}x_1+M_{22}x_2.\end{cases}$$

其中 M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} 都是已知的常数.

对于方程(6)，求解是容易的，令 $\boldsymbol{x}$ 的解具有如下形式:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0e^{\lambda t}. \tag{7}$$

代入 (6) 即得

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{x}=0,$$

亦即

$$\begin{cases}(M_{11}-\lambda)x_1+M_{12}x_2+\cdots\cdots+M_{1n}x_n=0,\\ M_{21}x_1+(M_{22}-\lambda)x_2+\cdots\cdots+M_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ M_{n1}x_1+M_{n2}x_2+\cdots\cdots+(M_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases} \tag{8}$$

此线性方程组的有解条件是系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} M_{11}-\lambda, M_{12}, \cdots\cdots, M_{1n} \\ M_{21}, M_{22}-\lambda, \cdots\cdots, M_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}, M_{n2}, \cdots\cdots, M_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

若用张量表示，则可表示为

$$|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}| = 0, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 n 维空间的幺张量，$I_{ij}=\delta_{ij}$. 由 (9) 或 (10) 式可得 λ 必须满足的方程为

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0. \quad (11)$$

这就是 (6) 式的特征方程. 可有 n 个根 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 满足此方程. 实际上，只需要从这些根的性质就可以判断状态稳定与否了.

(i) 如果所有的 λ_i 均有负实部,即 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$，则 $x=0$ 解是稳定的,而且是渐近稳定的. 因为通解的形式是

$$x = \sum_i C_i x_{0i} e^{\lambda_i t} = \sum_i C_i x_{0i} e^{\mathrm{Re}\lambda_i t + i\mathrm{Im}\lambda_i t},$$

若 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$，则 $t\to\infty$ 时 $x\to 0$，所以是渐近稳定的.

(ii) 如果在所有 λ_i 中,至少有一个根 $\mathrm{Re}\lambda_j>0$，则 x 的通解中有一项 $e^{\lambda_j t}$ 将随时间不断增长,所以 $x=0$ 解是不稳定的.

(iii) 如果在所有 λ_i 的根中,没有 $\mathrm{Re}\lambda_i>0$ 的根，但有 $\mathrm{Re}\lambda_i=0$ 的根，则 $x=0$ 解是稳定的. 但这是一种临界的稳定状态，若考虑高级修正项(非线性项),则有时可能是稳定的,也有时可能是不稳定的，比较复杂. 但从线性稳定性理论而言,仍属稳定解.

总之，线性稳定性问题可归结为对本征方程 (11) 的根 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的判断. 若 n 不太高，如 $n\leqslant 4$ 时，由 (11) 求根是比较容易的；但若 $n\geqslant 5$ 时，用解析方法求根就困难了. 有时，可以不必求出 λ_i 来，而借助一些数学定理直接判断解的稳定性. 有关的数学定理有:

(i) 赫维茨 (Hurwitz) 定理

特征方程 $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0$，无妨假设 $a_0>0$，作行列式:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots\cdots\cdots, \quad (12)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n+1} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} \equiv a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i=0$ (若 $i>n$).

定理表明,方程 (11) 所有的根均有负实部的充分和必要的条件是: 所有的 $\Delta_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$. 因而，这也就是 $x=0$ 解是渐近稳定的充分和必要的条件.

例如,若扰动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \end{cases}$$

则可求出特征方程为

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

并相应地有 $\Delta_1=4>0$，$\Delta_2=17>0$ 和 $\Delta_3=a_3\Delta_2>0$，所以 $x=0$ 解是渐近稳定的.

(ii) 稳定性的必要条件

若 $a_0>0$，则稳定的必要条件是 $a_i>0$，对所有 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 成立. 反之，若 a_i 有不同符号,则必有 $\mathrm{Re}\lambda_i>0$ 的根存在,也即 $x=0$ 解必是不稳定的.

例如,扰动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_2 + x_3, \end{cases}$$

则可求出特征方程为

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - \rho = 0.$$

由于 a_i 异号,则不必求根就可判断出 $x=0$ 解必是不稳定的.

总结上面所述可知，求解稳定性问题的基本步骤可归纳为：(i) 由基本运动方程(2)求出扰动方程(5)；(ii) 对方程(5)作线性化近似，求出常微分方程组(6)；(iii) 求出特征方程(11)，由 λ_i 根的性质或直接由数学定理判断解的稳定性.

三、应用举例

例1 $n=1$ 的情形，即由方程(1)所描述的化学反应的平衡问题.

由 $S(T_0)=Q(T_0)$ 条件可定出平衡解 $T=T_0$. 若 T 有小的改变，令 $T=T_0+\Delta T$，对 $S(T)$ 和 $Q(T)$ 作泰勒展开，即可得线性化的扰动方程为

$$\frac{d\Delta T}{dt}=[S'(T_0)-Q'(T_0)]\Delta T.$$

其解为

$$\Delta T=(\Delta T)_0e^{\lambda t},$$

其中

$$\lambda=S'(T_0)-Q'(T_0),$$

亦即如果 $S'(T_0)>Q'(T_0)$，则平衡解 T_0 是不稳定的；反之，则平衡解是稳定的.

例2 RLC 振荡回路问题，这是 $n=2$ 情形.

由电学原理可知，电容器两端电压满足方程：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\gamma\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \tag{13}$$

其中 $\gamma=R/2L$，$\omega_0^2=1/LC$. $u=0$ 显然是方程的一个特解. 下面讨论此特解的稳定性.

对于 $u=0$ 这个特解，方程(13)也就是扰动方程. 令 $u=u_0e^{\lambda t}$，代入(13)式后即可得特征方程：

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0,$$

其根为

$$\lambda=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2},$$

$\mathrm{Re}\lambda<0$，所以 $u=0$ 的解是稳定的平衡解.

例3 设一质量为 m 的粒子在有心力场

$$F(r)=-\frac{ma}{r^2}-\frac{mb}{r^4}\quad(a>0,\ b>0)$$

中运动. 粒子的轨道一般是很复杂的. 有一类最简单的轨道就是圆形轨道. 试问就圆轨道而言，哪些轨道是稳定的？哪些轨道是不稳定的？

有心运动可作平面问题处理. 由牛顿定律可得平面极坐标表示下的力学方程：

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\dfrac{a}{r^2}-\dfrac{b}{r^4},\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0.\end{cases} \tag{14}$$

这是两个二阶微分方程，相应于 $n=4$ 的情形，可按上述一般步骤去做. 但是对具体问题可以、而且应该灵活掌握，例如对于本问题，若利用角动量守恒，就可使问题大为简化.

由角动量守恒可得

$$\dot{\theta}=\frac{g_0}{r^2}\qquad(g_0\text{ 为常数}).$$

代入(14)中第一式即得

$$\ddot{r}=\frac{g_0^3}{r^3}-\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r^4}. \tag{15}$$

这就使问题简化为 $n=2$ 情形了.

求平衡解：已知所考虑的是圆轨道，$r=r_0$（常数），所以平衡解 r_0 满足方程

$$\frac{g_0^2}{r_0^3}-\frac{a}{r_0^2}-\frac{b}{r_0^4}=0. \tag{16}$$

求线性化扰动方程：令 $r=r_0+x$，代入(15)式，作泰勒展开，并利用(16)式，可得

$$\ddot{x}=\frac{1}{r_0^3}\left[\frac{b}{r_0^2}-a\right]X.$$

令 $x=x_0e^{\lambda t}$，代入即得

$$\lambda^2=\frac{1}{r_0^3}\left[\frac{b}{r_0^2}-a\right].$$

所以，当 $\dfrac{b}{r_0^2}>a$ 时，亦即 $r_0<\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 时，圆轨道是不稳定的；而当 $r_0>\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 时，则是稳定的. $r_0=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 点是临界状态，实际上是不稳定的，因为任何使 r 减小的扰动就可使之不断趋向中心. 大家可以定性分析一下，当 r_0 由大变小时，圆轨道由稳定变为不稳定的物理原因何

在.

例 4 刚体定点运动的稳定性问题.

已知刚体对定点的三个惯量主轴方向为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$, 相应的转动惯量满足关系 $I_1 > I_2 > I_3$. 求证: 此刚体对于绕 $\boldsymbol{e}_2$ 轴的转动是不稳定的,而对于绕 $\boldsymbol{e}_1$ 轴或 $\boldsymbol{e}_3$ 轴的转动则是稳定的.

取固定于刚体的主轴坐标架, 则角动量守恒可表为

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \frac{\tilde{d}G}{dt} + \omega \times \boldsymbol{G} = 0$$

代入

$$\boldsymbol{G} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix},$$

即得欧勒方程

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{cases} \tag{17}$$

这就是本问题的基本运动方程.

对于绕 $\boldsymbol{e}_1$ 轴的转动,即平衡解为

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{pmatrix} \omega_{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ω_{10} 是常数. 令 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \Delta\boldsymbol{\omega}$, 代入(17)式, 并线性化,即得扰动方程为

$$\begin{cases} \Delta\dot{\omega}_1 = 0, \\ \Delta\dot{\omega}_2 = \dfrac{I_3 - I_1}{I_2}\,\omega_{10}\Delta\omega_3, \\ \Delta\dot{\omega}_3 = \dfrac{I_1 - I_2}{I_3}\,\omega_{10}\Delta\omega_2. \end{cases} \tag{18}$$

由(18)式可知

$$\Delta\ddot{\omega}_{2,3} = \frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\,\omega_{10}^2\Delta\omega_{2,3}.$$

由于 $I_1 > I_2 > I_3$, 等式右端系数是负的, 所以 $\Delta\omega_2$ 和 $\Delta\omega_3$ 只能作简谐振动, 也即绕 $\boldsymbol{e}_1$ 轴的转动是稳定的. 对于绕 $\boldsymbol{e}_2$ 轴和 $\boldsymbol{e}_3$ 轴的转动的稳定性问题,可用类似的方法进行之.

参 考 文 献

[1] 李心灿编,常微分方程组及运动稳定性,国防工业出版社,1982 年.

(冯庆荣 整理,经本人修改)

新实验技术在材料研究中的应用讲座

第十讲 激光喇曼光谱及其应用

汪燮卿 王宗明

(石油化工科学研究院)

一、前 言

1928 年 C. V. Raman 和 K. S. Krishnan[1] 公开发表了苯和甲苯的喇曼光谱. 50 多年来,喇曼光谱已成为研究分子振动的重要手段. 特别在 1961 年 Herzberg 和 Stoicheff 提出使用激光作光源以后, Porto 和 Wood[2] 在 Columbs 会议上报道了使用的效果, 比用汞灯作为激发光源显示出巨大的优越性,使喇曼光谱进入了"文艺复兴"的新阶段. 在此基础上,又发现了新的喇曼效应,应生了非线性喇曼光谱学[3],包括受激喇曼效应、倒喇曼效应、超喇曼效应、相干反斯托克斯喇曼散射以及电子喇曼效应等, 在物理、化学、生物学和材料学等领域开展了广泛的探索研究,不仅是物质结构的研究手段,而且正在逐步成为工业产品质量控制的工具.