

光学信息处理讲座

第五讲 光学普遍变换

顾本源 杨国楨

(中国科学院物理研究所)

一、引言

光学信息处理是一门交叉学科，它是光学和信息论相结合的产物。光学信息处理的基本依据之一是基于透镜的傅里叶变换作用：一个理想的薄透镜的前后焦平面上的光场分布互为傅里叶变换^[1]。利用透镜的这个特性，可以进行各种模拟数学运算：例如频谱分析、加、减、乘、除、微分、积分、相关、卷积等

利用透镜进行傅里叶变换的方法虽然有许多优点，但也存在着很大的局限性。例如，有许多二维函数对其傅里叶频谱进行空间滤波，效果不好，与傅里叶变换相联系的卷积和相关定理，仅能适用于线性空间不变的光学系统，而大量的光学系统的点扩展函数是空间可变的，傅里叶变换方法对它们是无能为力的。

傅里叶变换只是希耳伯空间中的一种特殊变换。希耳伯空间中存在着众多的正交归一封闭函数系 $\{\varphi_p(x)\}$ ，都可以选取作为函数空间的基矢。任何一个平方可积的函数 $f(x)$ (即满足条件： $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ 是有限值) 可以按照希耳伯空间的基矢 $\{\varphi_p(x)\}$ 展开。展开系数称做函数 $f(x)$ 相对于函数系 $\{\varphi_p(x)\}$ 的频谱分量。实现相应的频谱分析的操作运算，称作对 $f(x)$ 进行 $\{\varphi_p(x)\}$ 变换。可以期望，处理不同的问题，采用不同种类的变换，才是更恰当的。应用普遍变换，有能力解决实际中出现的许多问题，尤其是涉及具有空间可变的脉冲响应的光学系统问题。

近年来，光学全息术和计算机产生全息图研究得到深入的开展，使得人们能够成功地制作透射函数为任意的二维复函数的全息透镜。全息透镜的出现将对光学系统带来巨大的变革，也将为实现希耳伯空间中的普遍变换提供必备的物质条件。快速的计算机产生全息图和实时记录显示全息图的记录材料的研制成功^[2]，为实现实时的光学普遍变换创造了有利的条件。

本文着重介绍霍裕平和本文作者在近几年来于光学普遍变换领域内所做的探索研究^[3-6]。首先介绍用振幅-相位型的全息透镜实现光学普遍变换的一般理论，然后介绍该理论的实际应用的例子和有关的实验结果，最后将叙述目前还待解决的问题以及未来发展的前景。

二、用光学系统实现光学普遍变换的一般理论^[3-6]

光学系统中光传播的典型过程如图 1 所示。设输入平面 P_1 上的光场分布为 $f(x, y)$ ，通过光学系统 K 之后，输出平面 P_2 上的光场分布变成 $f'(x', y')$ 。两者分布函数之间通常存在着一定的联系，可表示成下面的二维积分形式。

$$f'(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x', y'; x, y) \times f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 $G(x', y'; x, y)$ 是点扩展函数。一般说来，它是空间可变的，它依赖于输入和输出平面上一对点的绝对坐标数值的，只有在某些简化

假定下, G 才可以写成 $G(x-x'; y-y')$ 形式, 于是 (1) 式可简化为

$$f'(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x-x'; y-y') \times f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

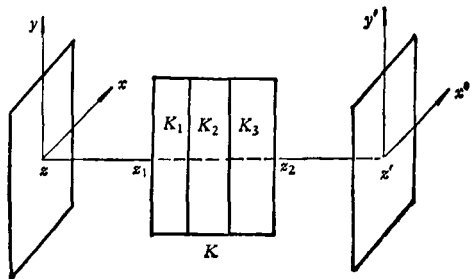


图 1

它就是傅里叶光学中所研究的空间不变系统。方程 (1) 所描述的光传播过程, 称为实现了一个光学变换, 将 f 变换成 f' 。如果光学系统 K 是单个薄透镜, 而且输入、输出平面正好位于该透镜的前后焦平面上, 那末, 此系统所实现的变换就是熟知的傅里叶变换。现在我们要讨论下面问题: 假如 K 是由单片或多片的振幅-相位型的全息透镜按一定方式配置而成的, 是否有可能使用这样的系统来实现一个给定的线性普遍变换呢? 回答是肯定的。

实现一个给定的线性变换的典型光学系统如图 2 所示。 P_1 代表输入平面, P_2 为输出平面。设全息透镜数目为 n , 它们的振幅-相位分布函数记作

$$H_m(x_m) = \rho_m(x_m) e^{i\phi_m(x_m)},$$

其中 $m = 1, 2, 3, \dots, n$; 彼此之间的距离依次地记作 $l_m, m = 0, 1, 2, \dots, n$ 。当使用相干光 (波长为 λ) 照明这个系统时, 输入、输出平面上光场分布有如下关系:

$$f'(x', y') = \iint_{-W/2}^{W/2} \tilde{G}(x', y'; x, y) \times f(x, y) dx dy, \quad (3)$$

其中 W 是孔径大小, 而

$$\tilde{G} = G_0(l_n) \cdot H_n \cdots H_2 \cdot G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0), \quad (4)$$

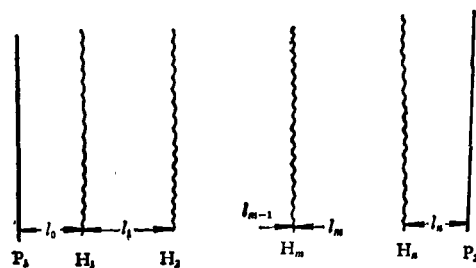


图 2

这里 $G_0(l)$ 表示光波在自由空间传播过程中所实现的变换。它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出^[3]:

$$G_0(x', y'; x, y; l) = \frac{1}{2, \lambda} \frac{1 + \cos \theta}{r} e^{ikr},$$

其中 λ 为波长, k 为相应的波数, $r^2 = l^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2$, θ 是 (x', y') 与 (x, y) 二点的连线与 z 轴夹角。在旁轴近似下, 即

$$|x-x'|^2, |y-y'|^2 \ll l^2,$$

则有

$$G_0(x, x'; l) \simeq \frac{e^{ikr}}{i\lambda l} e^{j(k/2l)[(x-x')^2 + (y-y')^2]}. \quad (5)$$

因此, 图 2 系统实现光学普遍变换 \tilde{G} 。

如果要求 \tilde{G} 最佳地逼近一个给定的一般线性变换 G , 如何设计全息透镜 H_m 呢?

通常假定所涉及的变换函数是带限的。根据取样定理, 可以用有限数目取样点上的数值来描述原始函数。设取样点的数目为 N , 那末上述所有算子 G, \tilde{G}, G_0 和 H 均可以表示成 $N \times N$ 的矩阵。

我们引进“距离 D ”这个量来描述两个变换 \tilde{G} 与 G 的逼近程度, 其定义是

$$D^2 = \|G - \tilde{G}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |G_{ij} - \tilde{G}_{ij}|^2. \quad (6)$$

如果 $D = 0$, 它表示 G 与 \tilde{G} 相应的矩阵元全相等。当 $D = d_0 \neq 0$ 时, 表示其相应的矩阵元之间有平均偏差 $\sim d_0/\sqrt{N}$ 。

采用光学系统中逐步增加全息透镜个数的办法, 来达到使 \tilde{G} 逼近给定的线性变换 G 。首先,

设系统只是单个全息透镜, $H_1(x_1) = \rho_1(x_1) \cdot e^{i\phi_1(x_1)}$. 此时 $\tilde{G} = G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0)$. 最佳的逼近条件要求

$$D^2 = \|G - G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0)\|^2 \quad (7)$$

取极小. 由此可求出 $H_1^{(1)}(x_1)$. 如果用单个全息透镜去实现 G 所得到的 D 还相当大, 则继续引进第二个全息透镜 H_2 , 使得

$$D^2 = \|G - G_0 \cdot H_2 \cdot G_0 \cdot H_1^{(1)} \cdot G_0\|^2 \quad (8)$$

取极小值, 从而求得 $H_2^{(1)}$. 如果还达不到要求, 则尚需再引进第三个全息透镜. 这样逐次地逼近下去, 求得最佳的结果. 为了尽可能地不增加全息透镜的个数, 采用反馈式的迭代法更为可取. 总而言之, 利用上述步骤, 便可得到所有的全息透镜的振幅-相位分布函数, 利用它们组成的光学系统便能够实现任意给定的一般线性变换. 在文献[3]中, 指出这样的迭代过程是收敛的, 解是存在的.

从理论上讲, 任意给定的线性变换, 均能用足够多的全息透镜组成的光学系统, 充分精确地实现它. 但是, 由于衍射损耗以及相干光散斑噪声等因素的影响^[7], 使得在实际应用中, 全息透镜的数目超过十个以上时, 很难得到有较高的信噪比的系统. 能否采用为数较少的或单个全息透镜光学系统来实现给定的一般线性变换呢? 文献[8]讨论了这一问题.

通常的一幅图象, 在空间取样意义下, 看成是由一定数目的离散点组成的. 为了实现给定的某个变换, 能不能通过加密全息透镜的取样点的数目, 将多片的全息透镜所携带的信息压缩到一片上呢? 用这样的方案来达到减少全息透镜个数的目的, 回答是肯定的. 文献[8]指出, 在取样的意义下, 任意给定的线性变换均能用单片全息透镜系统充分精确地实现它, 并具体地给出求解全息透镜的振幅-相位分布的算法步骤. 由于公式很复杂, 不在此重复了.

三、光学普遍变换理论的具体应用例子

1. 用相干光实现沃尔什变换^[9,10]

物理

文献[9]的作者应用光学变换的一般理论, 对沃尔什变换的光学实现问题进行了研究. 他们设计了三种光学系统, 来实现八维的复数沃尔什变换, 给出了所需的全息透镜数目以及各个全息透镜的相位数据. 文献[10]采用相干光对实现沃尔什变换进行了具体的实验研究. 图3示出他们所设计的五平面的相干光变换装置. 采用输出功率为 50 mW, $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ 的氦-氖激光器作光源, 空间滤波针孔直径为 $10 \mu\text{m}$. 中间三个平面上放置的变换片均紧贴在振幅掩膜 G' 上, 记录着信息的输入片 f_1 也贴在 G' 上, G' 装在微调支架上, 输出的功率谱记录在底片上. 分析底片上的沃尔什功率谱分布, 表明实验是成功的, 各谱线出现在预期的位置上.

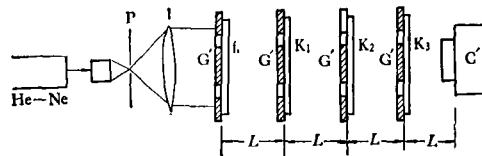


图 3

P 为滤波小孔; I 为准直透镜; G' 为振幅掩膜; K_1, K_2, K_3 为变换片; f_1 为信息输入片; C 为记录照相机

2. 用光学方法实现投影算子和用于多特征图形的识别^[11,12]

在傅里叶光学中, 只能进行单个特征图形的识别. 在光学图形识别中, 多特征图形的识别可能是最有实际意义的, 也是当前努力方向之一. 多特征图形的识别问题是, 从各种可能的姿态中辨认出物体来, 并与其它不同类的物体区别开.

文献[11]指出, 所有的图形将构成图形空间, 它与 L^2 空间(平方可积的函数空间)是同构的. 所谓图形识别, 实质上就是分析一个图形在不同的图形子空间上的投影.

在图形空间中, 定义内积

$$(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f^*(x, y) \cdot g(x, y) dx dy, \quad (9)$$

这里 f 和 g 代表两幅图形. 如果 $(f, g) = 0$,

则说这两个图形完全不同。如果 $(f, g) \approx 0$, 那末, 图形 f 中包含图形 g 的信息多寡程度由 $(f, g)/(g, g)^{1/2}$ 值决定。如果要判别的参考图形(特征图形)是 $f_1, f_2 \cdots f_n$ 。由它们出发用施密特正交化手续可得到新的另一组彼此正交归一的标准图形 $e_1, e_2, \cdots e_n$, 再补充进与它们全体正交而彼此之间又互相正交的归一的另外 $N - n$ 个基本图形, 使它们全体组成一个正交完备基。那末, 函数空间中的任一矢量 f , 可以展开成:

$$f = \sum_{i=1}^N (e_i, f) e_i. \quad (10)$$

令 \hat{E} 为由原坐标系变换到新基 $e_1, e_2 \cdots e_N$ 的正交变换, 其矩阵元为

$$E(n, x, y) = e_n(x, y), \quad (11)$$

而任一图形 f , 在 \hat{E} 作用后, 变为

$$\hat{E}f = \begin{pmatrix} (e_1, f) \\ (e_2, f) \\ \vdots \\ (e_n, f) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (12)$$

因此, 如果一旦构造一个光学系统, 能够实现 \hat{E} 变换, 那么, 输入平面上放置 f , 输出平面上相应的位置上的光斑亮度正比于 $(e_i, f)^2$, 它们表示在输入图形中包含标准图形 e_i 的强度。文献[11]详细地讨论如何设计实现 \hat{E} 变换的光学系统以及优化计算。

文献[12]提出由输入图形与参考图形的互相关阵, 来确定输入图形在施密特正交基上的投影值。施密特正交化手续中所出现的诸系数可以表示成:

$$\begin{aligned} (e_1, f_m) &= (1/k_1)(f_1, f_m), \\ (e_2, f_m) &= (1/k_2)[(f_2, f_m) \\ &\quad - (1/k_1^2)(f_1, f_2)(f_1, f_m)], \\ &\quad \dots \dots \\ (e_i, f_m) &= (1/k_i)[(f_i, f_m) - (e_1, f_i) \\ &\quad \times (e_1, f_m) - (e_2, f_i)(e_2, f_m) \cdots \\ &\quad - (e_{i-1}, f_i)(e_{i-1}, f_m)], \\ &\quad \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_i^2 &= (f_i, f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} |(e_j, f_i)|^2 \\ (m &= 1, 2, 3, \dots n; \\ i &= 1, 2, 3, \dots n-1). \end{aligned} \quad (13)$$

由上式看到, 由参考图形 $(f_1, f_2 \cdots f_n)$ 的互相关阵 $\{(f_i, f_j)\}$ 出发, 便能够确定正交化中诸系数。同样地, 对于输入图形 f 有:

$$\begin{aligned} (e_i, f) &= (1/k_i)[(f_i, f) - (e_1, f_i)(e_1, f) \\ &\quad - (e_2, f_i)(e_2, f) \\ &\quad - \cdots (e_{i-1}, f_i)(e_{i-1}, f)], \\ (i &= 1, 2, \dots n). \end{aligned} \quad (14)$$

只需再求出 $\{(f_i, f)\}$, $(i = 1, 2, \dots n)$, 就完全确定 (e_i, f) 值, 从而实现将输入图形 f 进行分类的目的。文献[12]选择了不同字母 I, F, E 作为参考图形, 用 \square 作为输入图形, 用相干光系统, 求得互相关阵, 实验结果与理论一致。

四、结 束 语

用光学系统实现普遍变换是很吸引人的研究领域。它将扩充现有的光学信息处理的能力。在很长的一段时间内, 光学系统只能实现傅里叶变换, 使人们只能局限于研究空间不变的光学系统。现在, 从理论上证明了采用单个或少数几个的全息透镜, 原则上能够实现任意给定的线性变换。这样一来, 提供了一个强有力的工具, 去研究更有实际意义的和更大量广泛存在的一大类空间可变的系统。应用光学普遍变换, 还能够实现多特征的图形识别, 在实用上很有价值。

当然, 在真正运用到实际中, 去解决具体的问题时, 还会遇到种种具体困难的。例如, 对于一个给定的线性变换, 如何最省时间地设计出最佳的全息透镜组? 采用哪种优化算法? 如何制造高信息量的全息透镜, 以及如何降低其噪声, 保证达到设计指标? 如何精确地确定它们的位置...等等, 都是有待于进一步探索和解决的课题。

用光学正交变换实现多特征图形识别, 也
(下转第 619 页)