

# 光学信息处理讲座

## 第六讲 光学 Mellin 变换

郑 师 海

(中国科学院物理研究所)

以傅里叶光学为基础的相干光处理器,能够进行微分、积分、卷积和相关等多种模拟运算.这种运算的实现,是利用一个理想的薄的正透镜的前后焦平面互为傅里叶变换关系进行的.函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换  $F(u, v)$  定义为

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy. \quad (1)$$

用傅里叶透镜组成的相干光处理系统,主要通过正逆傅里叶变换和空间滤波来完成多种运算的.同电子计算机比较,它具有信息容量大,计算速度快两大优点.但是,这种光学处理系统只能解决那些空间平移不变的物理问题,也就是只能解决在数学上用

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0) \cdot dx_0 dy_0. \quad (2)$$

这种卷积积分描述的问题.这是因为设  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$  和  $H(u, v)$  分别是  $g(x, y)$ ,  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  的傅里叶变换,则

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) \quad (3)$$

为简单的相乘关系.反之,如果两个相乘函数进行傅里叶变换,它又变成了(2)式的卷积关系.然而,对于不能写成这种卷积积分的物理问题,傅里叶变换是无能为力的.例如,特征识别是光学信息处理中具有一定应用前景的课题,由于傅里叶光学系统只能识别那些方向一致,尺寸大小几乎相等的相同图象和文字,因而大大地降低了它的实际应用的可能性.有人做了这样的实验,当物体大小变化 3% 或方向变

化约  $3^\circ$  时,这种系统识别的信噪比下降 30 dB<sup>[1]</sup>.也就是说系统不认识这样小的变化的物体图象或文字.这样的条件显然太苛刻了.用机械调整和变焦系统虽然可以部分的解决物体方向和大小的变化,但牺牲了光学处理的实时、快速等优点.为了解决这类问题,必须研究新的光学变换.

将(1)式作  $x = \ln(\xi)$ ,  $y = \ln(\eta)$  的变量代换,得

$$F(u, v) = \iint_0^{\infty} f[\ln(\xi), \ln(\eta)] \xi^{-j2\pi u-1} \cdot \eta^{-j2\pi v-1} d\xi d\eta. \quad (4)$$

(4)式是一新的变换,我们叫它 Mellin 变换.函数  $f(x, y)$  的两维 Mellin 变换  $M(ju, jv)$  定义为<sup>[2]</sup>

$$M(ju, jv) = \iint_0^{\infty} f(x, y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy. \quad (5)$$

假设  $M_1(u, v)$  是  $f(x, y)$  的 Mellin 变换,  $M_2(u, v)$  是  $f_2(x, y) = f(ax, ay)$  的 Mellin 变换,从(5)式看出

$$M_2(u, v) = a^{-ju-iv} M_1(u, v). \quad (6)$$

由此得出:标度不同的同一函数的 Mellin 变换,除了增加一个与标度有关的相位因子外,它的大小是不变的.所以 Mellin 变换具有两个特点,一是两个标度不同的函数能进行不损失信噪比的相关;二是输出相关峰的位置比例于两个函数之间的标度变化.从(4)式看出, Mellin 变换可以先将坐标进行对数变换,然后进行傅里叶变换而得到. Mellin 变换功率谱虽然没有傅里叶频谱那样明确的物理解释,但由于它的

标度不变性, 被广泛的用来进行时间变电信号的检测、标度变信号的相关和图象处理, 受到国内外学者的极大重视。D. Casasent, J. W. Goodman, R. J. Marksll 等著名学者以及国内一些科学工作者, 都用不同的方法进行过光学 Mellin 变换的研究。本文第二部分将他们进行光学 Mellin 变换的主要方法和相应的光学系统进行介绍。第三部分介绍一种新的光学 Mellin 变换方法。文章的最后一部分, 对这些方法进行一些比较。

### 一、实现光学 Mellin 变换的几种方法

实现光学傅里叶变换, 要有傅里叶变换透镜和相应的光学处理系统。实现光学 Mellin 变换同样也必须有 Mellin 变换光学元件及相应的光学系统。遗憾的是至今还没有一个类似傅里叶变换透镜那样的物理光学元件来进行 Mellin 变换。虽然有不少学者对这种光学元件和相应的光学系统进行了研究, 但是距实际应用都还存在着一定距离。实现光学 Mellin 变换的主要方法可以归纳为以下几种:

#### 1. 二维相干处理系统实现一维线性空间变积分方法<sup>[3]</sup>

(5)式仅考虑一维情况, 可以改写为

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y, x) f(x) dx \quad (7)$$

的通用线性空间平移变的一维表示形式。\$h(y, x)\$ 表示系统在输出平面 \$y\$ 位置对一输入函数作用在输入平面 \$x\$ 点的响应。对于 Mellin 变换,

$$h(y, x) = x^{iy-1} \mu(x), \quad (8)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

为了实现(5)式的运算, 我们考虑图 1 所示的光学系统<sup>[4]</sup>。输入函数用一柱面透镜 \$L\_1\$ 聚焦照明, 用球透镜 \$L\_2\$ 进行二维傅里叶变换。窄的输入狭缝的作用是, 使 \$L\_2\$ 在垂直方向的傅里叶变换, 仅是简单地将水平方向的傅里叶变换扩展到垂直方向。在平面 \$P\_2\$, 放置一个具有复振幅透过率为 \$H(-\nu\_x, -\nu\_y)\$ 的掩模——(8)式的傅里叶变换, 球透镜 \$L\_3\$ 再一次实现二维傅里叶变换。在输出平面放置一平行 \$y\$ 轴的狭缝, 使在水平方向的傅里叶变换成为一简单的积分, 在 \$y\$ 方向获得傅里叶变换。这样, 我们就在输出平面, 得到(7)式的积分。

J. W. Goodman 利用图 2 所示的光路, 实现了掩模 \$H(\nu\_x, \nu\_y)\$ 的全息图制作<sup>[5]</sup>, 利用图 1, 实现了一维 Mellin 变换。

图 2(a) 所示的狭缝是制作傅里叶变换全息图的输入目标, 它的透过率近似表示为

$$t(x, y) = \delta \left[ x - \frac{x_0}{2} - \exp(y) \right] + \delta \left[ x + \frac{x_0}{2} + \exp(y) \right]. \quad (10)$$

所得全息图的振幅透过率为

$$H(\nu_x, \nu_y) = B_1 + B_2 \cos \left[ 2\pi \nu_x \left( \exp x + \frac{x_0}{2} \right) \right], \quad (11)$$

式中 \$B\_1, B\_2\$ 为常数。由全息学原理知道, (11) 式描述的光分三个传播方向。\$x\_0\$ 的选择是使三

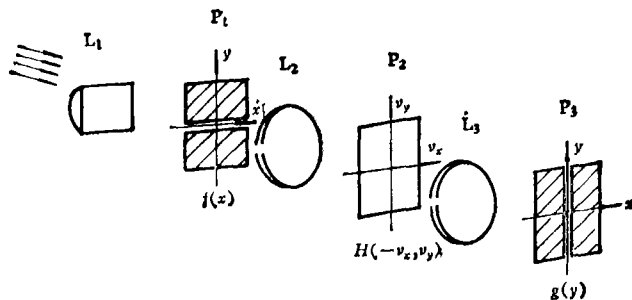


图 1

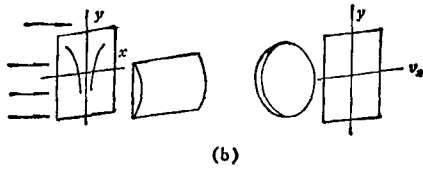
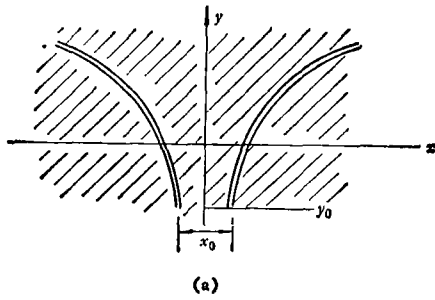


图 2

束光分开,并确保  $f(x)$  同零级无重叠为原则。将全息图放置到图 1 中的  $P_2$  平面,将  $f(x)$  放入图 1 中的  $P_1$  平面,则我们从  $P_3$  平面得到

$$g(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} F(v_x) \cdot \left\{ B_1 + B_2 \cos \left[ 2\pi v_x \left( \exp(v_y) + \frac{x_0}{2} \right) \right] \right\} \cdot \exp[-j2\pi(v_x x' + v_y y')] dv_x dv_y. \quad (12)$$

在  $P_2$  平面,由于输入函数和掩模在  $y$  方向实际上未做傅里叶变换,所以  $f(x) = F(v_x)$ ,  $v_y = y = \ln x$ 。代入(12)式,在一级衍射处,放置一平行于  $y$  轴的狭缝,得到

$$g\left(\frac{x_0}{2}, -y'\right) = K \int_0^{\infty} f(x) x^{j2\pi y'} dx, \quad (13)$$

式中  $K$  为常数。将(13)式同(7)式比较,  $g\left(\frac{x_0}{2}, -y'\right)$  是  $xf(x)$  的 Mellin 变换。为了得到

$f(x)$  的 Mellin 变换,在输入平面放置一  $x^{-1}$  的窗口来截取  $f(x)$ , 得到  $f(x)$  的 Mellin 变换。

R. J. Marksll 等人也根据文献[3],研究了 Mellin 变换的实现<sup>[6]</sup>。在图 3 所示的光学系统中,掩模  $T(f_x, \xi)$  的振幅透过率为

$$T(f_x, \xi) = \exp \left[ \frac{-j\pi}{\lambda f} (\xi^2 + (\lambda f f_x)^2) \right] \cdot \delta(f_x + \ln \xi) \xi^{-1} \mu(\xi), \quad (14)$$

式中  $\delta(f_x + \ln \xi)$  表示  $\delta$  函数;  $f$  是输入输出平

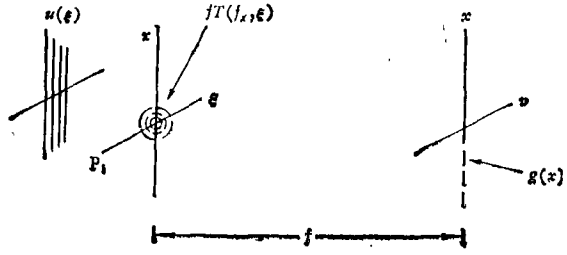


图 3

面之间的距离;  $\lambda$  是照明光波的波长;  $\mu(\xi)$  的定义同(9)式。将  $T(f_x, \xi)$  和输入函数  $f(x)$  放置在  $P_1$  平面,在  $P_2$  平面得到的变换是

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} T(f_x, \xi) f(\xi) \cdot \exp \left[ \frac{j\pi}{\lambda f} [\xi^2 + (\lambda f f_x)^2] \right] \cdot \exp \left[ -\frac{j2\pi}{\lambda f} (f_x x + y \xi) \right] df_x d\xi = \int_0^{\infty} f(\xi) \xi^{\frac{j2\pi}{\lambda f} x - 1} \cdot \exp \left[ \frac{-j2\pi}{\lambda f} y \xi \right] d\xi. \quad (15)$$

在  $y = 0$  处,放置一平行于  $x$  轴的狭缝[如果  $T(f_x, \xi)$  是载频全息图,狭缝要相对移动],则(15)式成为

$$g(x, 0) = \int_0^{\infty} f(\xi) \xi^{\frac{j2\pi}{\lambda f} x - 1} d\xi,$$

得到一维 Mellin 变换。

从(14)式可以看出,式中的指数项是一焦距为  $f$  的正透镜的振幅透过率,  $\delta$  函数近似为一细的狭缝,即

$$f_x = \ln(\xi) \cdot \mu(\xi).$$

$\xi^{-1}$  的实现比较困难,如果我们在制造掩模  $T(f_x, \xi)$  时不考虑  $\xi^{-1}$ , 同样在输入平面用  $\xi^{-1}$  窗口截取  $f(x)$ , 从而得到  $f(x)$  的 Mellin 变换。

## 2. 光学几何变换方法

前面我们曾指出,实现 Mellin 变换可以通过  $x = \exp(\xi)$  和  $y = \exp(\eta)$  的坐标变换加傅里叶变换得到。O. Bryndahl 在“光学中的几何变换”<sup>[7]</sup>一文中指出,一对一的光学几何变换可以这样来实现:如果输入函数  $f(x, y)$  为一

实函数,一掩模是一纯相位函数  $\exp[j\phi(x,y)]$ , 则输入和掩模乘积的傅里叶变换是

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \cdot \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy. \quad (16)$$

利用鞍点近似法,对(16)式积分,贡献最大的点发生在鞍点  $(x_0, y_0)$ 。鞍点的位置可以通过对(16)式的指数项对  $x, y$  求偏微商找到。即通过

$$\partial\phi(x, y)/\partial x = \omega_x;$$

$$\partial\phi(x, y)/\partial y = \omega_y$$

找到。通过以上关系,可以实现许多光学几何变换。例如,为了实现坐标的对数变换,令

$$\omega_x = \ln x, \quad \omega_y = \ln y,$$

得

$$\partial\phi(x, y)/\partial x = \ln x,$$

$$\partial\phi(x, y)/\partial y = \ln y,$$

$$\phi(x, y) = x \ln x - x + y \ln y - y. \quad (17)$$

由(17)式给定的纯相位掩模同输入函数  $f(x, y)$  相乘,再进行傅里叶变换,得到了所需要的坐标对数变换。D. Casasent 根据(17)式,利用 Lee 型全息图完成了相息图的制造,最后实现了二维 Mellin 变换<sup>[1]</sup>。1981年,潘少华从 Wigner 分布函数出发,导出了实现坐标对数变换的相位掩模的解析式<sup>[6]</sup>。最近北京邮电学院矫建中等人在潘少华工作的基础上,用计算机全息图,进行了坐标对数变换的实验,取得了一定结果。

以上是国内外在实现光学 Mellin 变换方面的主要工作。除此之外,还有利用电子计算机进行对数变换,光学方法进行傅里叶变换的光电混和方法。由于本文仅限于光学方法,这里不作讨论。

## 二、实现光学 Mellin 变换的一种新方法

1981年,杨国栋提出了“利用单个全息透镜实现光学变换的理论”<sup>[9]</sup>。他设想的光学系统,如图4所示。图中,  $P_1$  为输入平面,  $H$  为全

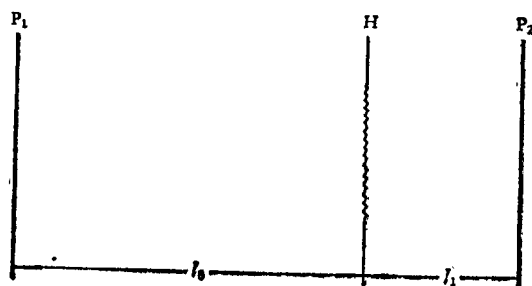


图 4

息透镜平面,  $P_2$  为输出平面,  $l_0, l_1$  分别为输入平面到全息图平面和全息图平面到输出平面之间的距离。这个设计思想是: 希望有  $N_1$  个抽样点的输入实函数,用准直激光束照明,透射波经过  $l_0$  的自由传播后,同  $N$  个抽样点的计算机全息图相乘,光波再经过  $l_1$  的自由传播,得到  $N_2$  个抽样点的需要的任意给定线性变换。这个想法的正确性已被实验所证实。现在的问题是已知某一给定变换,要用图4的光学系统实现它,全息图的振幅相位分布如何呢? 由于对于某一给定变换,在一定条件下,输出对输入的响应就是该变换的积分核,是已知的,各平面之间的光的自由传播函数也是已知的,因此全息图的振幅相位分布可以通过解一组线性方程得到。为了使讨论方便,我们仅考虑一维情况,所有结果可以直接推广到二维。

我们把全息图的振幅相位分布记为

$$H(x) = A(x)e^{i\phi(x)},$$

式中  $A(x)$  为全息图的振幅,  $\phi(x)$  为全息图的相位。图4所示的光学系统完成的变换  $\tilde{G}$  可以写成

$$\tilde{G} = G_0(l_1)HG_0(l_0), \quad (18)$$

式中  $G_0(l_0)$  表示光波在距离为  $l_0$  的自由传播中所实现的变换,它由自由空间的菲涅耳-基尔霍夫公式给出。在旁轴近似和离散抽样情况下,它的一维表示式是一个二维矩阵:

$$G_0(l) = B \exp \left[ \frac{jk}{2l} \left( \frac{mx'_m}{N'_1} - \frac{nx'_n}{N'_2} \right)^2 \right] \quad (19)$$

$m = 1, 2, \dots, N'_1, n = 1, 2, \dots, N'_2$ , 式中  $B$  为归一化常数,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为所使用

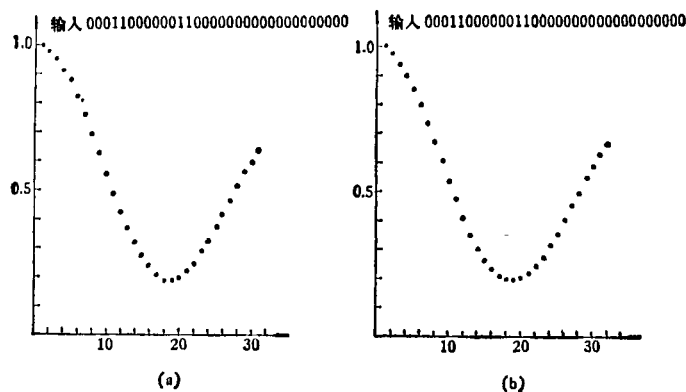


图 5

的光波波长,  $l$  为两平面之间的距离,  $N_1, x_{m_1}$  为输入平面抽样点数和孔径大小,  $N_2, x_{m_2}$  为输出平面的抽样点数和孔径大小。由(18)式可得

$$G_0^+(l_1)G_0(l_1)HG_0(l_0)G_0^+(l_0) = G_0^+(l_1)\tilde{G}G_0^+(l_0), \quad (20)$$

式中  $G_0^+$  为  $G_0$  的共轭矩阵, 输入和输出平面的抽样点数同全息图的抽样点数不相等。  $G_0^+(l_1) \cdot G_0(l_1)$  和  $G_0(l_0)G_0^+(l_0)$  为一个  $N \cdot N$  方阵, ( $N$  为全息图的抽样点数) 一般不是单位矩阵。从(20)式看出, 如果我们找出了  $G_0^+(l_1)G_0(l_1)$  和  $G_0(l_0)G_0^+(l_0)$  为单位矩阵的条件, 全息图的具体表达式不难给出。杨国楨在文献 [9] 中进行了详细讨论, 指出了这个条件是

$$\begin{aligned} N &= N_1 N_2, \\ N l_1 \lambda / x_m x_{m_2} &= 1, \\ N_1 l_0 \lambda / x_m x_{m_1} &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

由此得到图 4 所示的光学系统全息图的计算公式为

$$H_{ij} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij}(G_0^*(l_1))_{il}(G_0^*(l_0))_{lj}. \quad (22)$$

式中  $N_1, N, N_2$  分别为输入平面、全息图平面、输出平面的抽样点数,  $x_{m_1}, x_m, x_{m_2}$  分别为输入平面、全息图平面和输出平面的孔径大小,  $G_{ij}$  为给定变换的积分核的抽样表示。对于 Mellin 变换

$$G_{ij} = \left( \frac{x_{m_1} j}{N_1} \right)^{j(x_{m_2}/N_2)-1}, \quad (23)$$

我们利用(21),(22)和(23)式,进行了 Mellin 变换全息透镜的设计,我们使用的参数是

$$\begin{aligned} 2x_{m_1} = x_m = 2x_{m_2} &= 10.24\text{mm}, \\ N_1 = N_2 &= 32, \end{aligned}$$

则

$$N = 1024, l_0 = 2589.13\text{mm}, l_1 = 80.91\text{mm}.$$

利用计算机,我们获得了 1024 点全息图的振幅和相位。由于数据过多,不在此列出。

图 5(a) 是利用上述全息图,假定放在图 4 的全息平面上,输入用一双狭缝,狭缝宽度分别为 0.32mm,两狭缝的中心距离为 1.12mm,双狭缝中心离原点距离为 1.28mm,对这样一个输入,用计算机模拟计算得到 Mellin 变换谱的输出结果。

图 5(b)是用图 5(a)那样的输入狭缝、用数字 Mellin 变换公式

$$M(J) = \sum_{I=1}^{N_1} f(I) \left( \frac{Ix_{m_1}}{N_1} \right)^j \frac{1}{N_2} \quad J = 1, 2, \dots, N_2$$

的计算结果。上式的一些符号和前面的定义相同,两个结果进行比较表明,这样设计的变换精度是较高的。

### 三、讨 论

到现在为止,我们讨论了三种实现光学 Mellin 变换的方法。第一种方法的两种作法, (下转第 698 页)