

# 光学信息处理讲座

## 第七讲 光学沃尔什变换

王玉堂

(中国科学院物理研究所)

### 一、引言

沃尔什 (Walsh) 函数是美国数学家 J. L. Walsh 在 1923 年首先提出的<sup>[1]</sup>, 它因此而得名。由于它仅有两种取值方式, 所以具有数学逻辑开关的特性, 及与正弦、余弦函数相似的一些特性。这样, 在某些应用中更为简便。因此, 许多数学和物理学工作者对沃尔什函数的理论和应用开展了研究。三十年后, 随着半导体器件的成熟和数字计算机的应用, 促使了沃尔什函数在多路通讯、图象编码、电视信号处理、语言处理和生物医学等多方面应用的迅速发展<sup>[2-5]</sup>。

近十几年来, 随着激光器的出现和全息术的广泛应用, 光学信息处理技术以其速度快、信息容量大、结构简单、可以完成二维或多通道运算而显示了优越性。目前, 光学信息处理主要依据薄的透镜具有对前后焦平面上, 光场振幅实现傅里叶变换的特性。利用这一特性所完成的模拟运算已成功地用于光学图象象质的改善、特征识别等课题。这就是比较成熟的傅里叶光学。然而, 傅里叶光学属于空间平移不变系统, 这种系统是某些线性系统的近似。这种近似在许多情况下不能被满足, 因此傅里叶光学所能处理的问题是有限的。在某种程度上来说, 绝大多数光学系统是空间变的<sup>[6]</sup>。这样, 为了扩大光学信息处理的能力, 实现傅里叶变换之外的其它变换, 就成了光学工作者奋斗的目标之一。当然沃尔什变换只是其中的一种。早

在 1975 年, 苏联的 A. A. Васильев 等人就利用液晶材料进行了沃尔什变换系数的测量。1979 年, 美国的 James R. Leger 等人, 利用计算机产生的全息图也获得了沃尔什变换的结果。同年, 我们根据霍裕平和杨国祯等人提出的用光学方法实现一般变换的理论, 采用五平面系统实现了相干光沃尔什变换。在此基础上又进行了简化, 利用单个变换元件也得到了自然序沃尔什变换的结果。以上几种方法都存在一些缺点, 尚属于基础研究阶段, 要达到实际应用, 目前还有困难需要进行大量的工作。本文对于用相干光实现沃尔什变换的各种方法作简要的原理性介绍。

### 二、沃尔什函数和沃尔什变换

沃尔什函数的定义是在拉德梅克函数的基础上给出的, 其表达式比较繁杂。但是沃尔什函数通常只有二种取值, +1 和 -1, 因此函数的形式是极其简单的。沃尔什函数通常表示为

$$Wal(n, t), \quad (1)$$

这里有二个自变数,  $t$  为时间变数, 经常归一化为  $t/T$  ( $T$  是时基),  $n$  为序数也称为阶数。沃尔什函数在发展过程中, 先后出现过几种不同的排列方法或称为定序的方法。利用只包含有 +1 和 -1 阵元的正交矩阵, 可以将沃尔什函数表示为矩阵形式。例如, 沃尔什序沃尔什矩阵记为  $Wal_w(j, k)$ 。这里角标  $w$  用来区别不同的序, 其中  $j = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ 。8 阶的沃尔什矩阵为

$Wal_w(j, k)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

按沃尔什序沃尔什函数的定义, 如果画出沃尔什函数的波形, 可以清楚地看出其阶数就是图形中零点的个数。因此, 在某种程度上它与“频率”相联系比较直观, 当然(2)式也反映了这一规律。

另外一种按哈达玛序排列的沃尔什函数, 其矩阵形式为

$$Wal_H(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Wal_H(p) = \begin{pmatrix} Wal_H(p-1) & Wal_H(p-1) \\ Wal_H(p-1) & -Wal_H(p-1) \end{pmatrix}.$$

矩阵的阶数  $N = 2^p, p = 2, 3, 4, \dots$ 。例如 8 阶哈达玛序沃尔什矩阵是

$$Wal_H(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

由于矩阵元只有两种取值方式, +1 和 -1, 在光学上实现有困难, 为此引入一个参数  $l$ , 定义一个复数的沃尔什矩阵<sup>[7]</sup>, 也称为光学序沃尔什函数, 令

$$l = \begin{cases} 0 & (i = 0), \\ i/2 & (i \text{ 为偶数}), \\ (i+1)/2 & (i \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

定义

$$\begin{cases} Cal(l, k) = Wal_w(j, k) & (j \text{ 为偶数}), \\ Sal(l, k) = Wal_w(j, k) & (j \text{ 为奇数}), \end{cases}$$

则有

$$Wal_0(0, k) = Wal_w(0, k),$$

$$Wal_0(l, k) = \frac{1}{2} [(1-i)Sal(l, k) + (1+i)Cal(l, k)],$$

$$Wal_0(N/2, k) = Sal(N/2, k),$$

$$Wal_0(N/2 + l, k) = Wal_0^*(N/2 - l, k),$$

式中  $l = 1, 2, \dots, (N/2 - 1), k = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$ 。例如 8 阶光学序沃尔什矩阵为

$$Wal_0(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \end{pmatrix} \quad (4)$$

在光学系统中, 输入信号是振幅-相位空间分布的函数, 因此, 沃尔什函数就变成了透光和不透光这两个状态的空间分布。图 1 是根据

$$Wal(m, n, x, y) = Wal(m, x) \cdot Wal(n, y),$$

利用液晶所实现的前 8 个沃尔什函数。

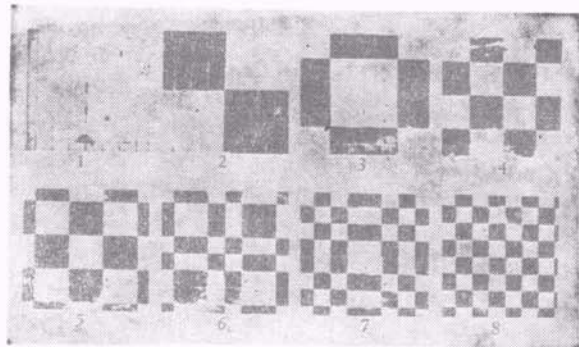


图 1 沃尔什函数的光学表示

1.  $Wal(0, 0, x, y)$ ; 2.  $Wal(1, 1, x, y)$ ; 3.  $Wal(2, 2, x, y)$ ;
4.  $Wal(3, 3, x, y)$ ; 5.  $Wal(4, 4, x, y)$ ; 6.  $Wal(5, 5, x, y)$ ;
7.  $Wal(6, 6, x, y)$ ; 8.  $Wal(7, 7, x, y)$

沃尔什变换完全可以和傅里叶变换对比而得出。由于沃尔什函数是正交完备系，因此满足一定条件的函数可以表示成沃尔什函数的积分。沃尔什变换及逆变换的表达式如下：

$$W[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)Wal(\mu, t)dt, \quad (5)$$

$$W^{-1}[W(\mu)] = \int_0^{\infty} W(\mu)Wal(\mu, t)d\mu, \quad (6)$$

这里  $f(t)$  是定义在  $[0, \infty)$  区间上的可积函数， $\mu$  和前面沃尔什函数定义中的  $n$  之间的区别是  $\mu$  可以取任意实数。在归一化的情况下，根据取样定理将  $[0, 1]$  区间分成  $N$  等分，并计算各等分点的  $f(\theta)$  值，则有离散的沃尔什变换和逆变换，其表达式为

$$W(n) = \frac{1}{N} \sum_{\theta=0}^{N-1} f(\theta)Wal(n, \theta) \quad (7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1),$$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} W(n) \cdot Wal(n, \theta)$$

$$\theta = 0, 1, 2, \dots, (N-1). \quad (8)$$

用光学方法实现沃尔什变换就是从 (5) 式或 (7) 式出发，通过设计并制备一些特殊光学元件，组成一个光学系统，并采用模拟运算来进行的。

### 三、实现沃尔什变换的光学系统

1. 最早用来实现沃尔什变换的光学系统是苏联的 A. A. Васильев 提出的<sup>[6]</sup>，其结构见图 2。由氩-氟激光器 1 发出的光经透镜 2 发散并准直后被分束器 3 分为两束。透明片 7 是输入函数，其振幅透过率为

$$t_1(x, y) = f(x, y).$$

8 是液晶池，利用液晶的散射效应控制电压，使

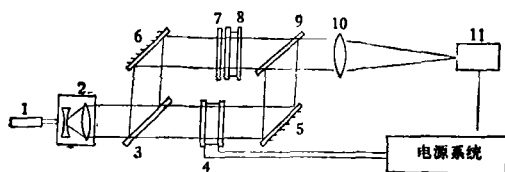


图 2 测量沃尔什变换的装置图

通过 8 的光透明或不透明，从而构成沃尔什函数，而且可以使  $m, n$  从 0 到 7 变化。这样，

$$t_2(x, y) = Wal(m, n, x, y) \quad (0 \leq m, n \leq 7).$$

11 是光电倍增管，其接收小孔置于透镜 10 的后焦平面上。这样倍增管的输入正比于透镜焦点的光强，即

$$V \sim I_0 = |E(\xi, \eta)|^2.$$

根据薄透镜的傅里叶变换特性，有

$$E(\xi, \eta) = \mathcal{F}(\xi/\lambda f, h/\lambda f) \cdot \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f} \left(1 - \frac{d}{f}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right].$$

如果调节实验系统，使 7 和 8 置于透镜 10 的前焦面上，也就是使  $d = f$ ，则

$$E(\xi, \eta) = \mathcal{F}(\xi/\lambda f, h/\lambda f) - A_0 \iint_S t_1 \cdot t_2 \cdot \exp\left(-i2\pi \left(\frac{\xi x}{\lambda f} + \frac{\eta \cdot y}{\lambda f}\right)\right) \cdot dx \cdot dy,$$

这里  $A_0$  是入射光波的振幅， $S$  是 8 的工作面积。如果在  $\xi = \eta = 0$  接收，则

$$E(0, 0) = \mathcal{F}(0, 0) = A_0 \cdot \iint_S t_1 \cdot t_2 \cdot dx \cdot dy.$$

将  $t_1, t_2$  代入

$$\mathcal{F}(0, 0) = A_0 \cdot \iint_S f(x, y) \cdot Wal(m, n, x, y) \cdot dx \cdot dy,$$

那么沃尔什变换为

$$W(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cdot Wal(m, n, x, y) dx \cdot dy = \frac{i\lambda f}{A_0 \cdot S} \mathcal{F}(0, 0). \quad (9)$$

图 2 中的校正器 4 可以消除系数  $\frac{i\lambda f}{A_0 \cdot S}$ ，(9) 式即是沃尔什变换。不难看出  $W(m, n)$  只是对应于  $Wal(m, n, x, y)$  的展开系数。也就是图 2 所给出的测量系统只能分别测出  $f(x, y)$  对不同“频率”的沃尔什函数的展开系数。因此，利用这样一种光学系统完成光学图象分析或处理是困难的，甚至是不可能的。

2. 美国的 James R. Leger 和 Sing H. Lee 提出了另外一种变换系统, 可以同时获得各个变换系数<sup>[9]</sup>. 他们所采用的是光学信息处理中常用的光学相关系统. 所谓相关函数  $C(-x', -y')$  是这样定义的:

$$C(-x', -y') = \iint f(x, y) \cdot g(x - x', y - y') dx dy, \quad (10)$$

其意义是一个透过率为  $f(x, y)$  的输入函数与一个点扩展函数为  $g(-x, -y)$  的滤波器的相关输出. 在光学上获得这个输出较为容易. 如果把  $f(x, y)$  放在透镜  $L_1$  的前焦面上, 将制得的滤波器放在  $L_1$  的后焦面同时又处于  $L_2$  的前焦面上, 则在  $L_2$  的后焦面上即可获得  $C(-x', -y')$ .

从变换的角度来说, 如果将输入函数  $f(x, y)$  对  $g(x, y)$  展开, 则

$$f(x, y) = \sum_{m,n} F(m, n) \cdot g_{m,n}(x, y),$$

$$F(m, n) = \iint f(x, y) \cdot g_{m,n}(x, y) dx \cdot dy. \quad (11)$$

显然, 如果  $g_{m,n}(x, y)$  是  $Wal(m, n, x, y)$  时, 则 (11) 式与 (5) 式定义的沃尔什变换完全相同. 这样利用光学相关的方法来完成沃尔什变换, 问题就归结为制备一个点扩展函数为沃尔什函数的光学滤波器, 然后再获得其与输入函数的相关输出. 为了在相关平面上控制所需要的输出, 附加了一个随机相位因子. 要达到同时获得不同“频率”的变换系数并且输出的各个分量还是分开的, 采用求和方式并引入一个空间上的移动量  $\Delta$ , 则

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N Wal_{m,n}(x - m\Delta, y - n\Delta) \cdot \exp[i\phi_r(x - m\Delta, y - n\Delta)]. \quad (12)$$

这样所需要的二个光学滤波器, 可以利用计算机产生全息图的方法来制备 (请参阅本讲座第三讲).

获得相关输出的光学系统如图 3 所示. 激光束由透镜  $L_1$  准直.  $P_0$  平面上放置的是根据  $e^{i\phi_r(x,y)}$  制备的随机相位全息图.  $P_1$  是输入函数

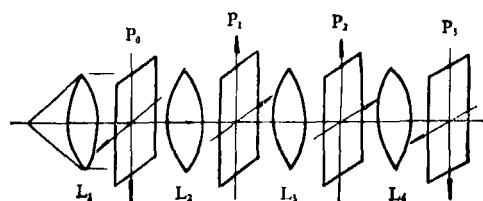


图 3 获得光学相关输出的系统

$f(x, y)$ ,  $P_2$  是根据 (12) 式制备的全息图,  $P_3$  平面上可以获得相关输出. 因为随机相位函数  $\phi_r(x, y)$  的自相关是一个  $\delta$  函数, 则有

$$\iint f(x, y) \cdot \exp[i\phi_r(x, y)] \cdot \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N Wal(x - x' - m\Delta, y - y' - n\Delta) \cdot \exp[-i\phi_r(x - x' - m\Delta, y - y' - n\Delta)] \cdot dx \cdot dy = \sum_{m=1}^N \cdot \sum_{n=1}^N W(m, n) \cdot \delta(x' + m\Delta, y' + n\Delta). \quad (13)$$

根据  $m, n$  和  $\Delta$ , 在  $P_3$  上的不同位置同时可以获得各个变换系数  $W(m, n)$ . 与前面的变换系统比较, 这是一个进步. 但是整个系统由两个平面变换元件和三个透镜组成, 比较复杂. 两个全息图产生衍射损失, 降低了能量的利用率, 同时也限制了输出孔径的大小.

3. 上述两种系统其共同特点是利用透镜的积分特性来模拟计算沃尔什变换系数的. 我们采用五个变换片的光学系统来实现沃尔什变换的, 它与前述方案完全不同. 文献 [10] 提出了一种用光学方法实现一般变换的普遍理论 (见本讲座第五讲). 其主要结论是: 从理论上讲, 对于任意给定的线性变换, 均能够用足够多的全息透镜构成的光学系统充分精确地实现它. 根据这一理论, 我们设计和制备了变换元件——相息图 (kinoforn), 实现了相干光 Walsh 变换<sup>[11]</sup>. 这里是从离散的沃尔什变换式出发, 根据光波在平面变换元件之间的传播情况, 设计出变换系统, 其中包括平面变换元件的数目、每个元件各类参数的设计, 使其精确地逼近给定的沃尔什变换.

如果两个变换平面分别为  $x_0$  和  $x_1$ . 则波长为  $\lambda$  的光波从  $x_0$  平面出射, 经过一段自由空

间传播到达  $x_1$  平面, 光波在自由空间传播可用传播函数表示成

$$F(x, y, d) = \iint G_0(x, y, x_0, y_0, d) \cdot f(x_0, y_0) \cdot dx_0 \cdot dy_0,$$

其中

$$G_0(x, y, x_0, y_0, d) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left\{ikd + \frac{ik}{2d}(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right\}$$

是光波在自由空间传播矩阵的表达式.  $d$  是两个平面间的距离,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . 在离散的情况下, 设  $x_0$  和  $x_1$  平面上的取样间隔分别是  $\Delta x_0$  和  $\Delta x_1$ , 则有

$$x_0 = m \cdot \Delta x_0, \quad x_1 = n \cdot \Delta x_1, \\ m, n = 0, 1, 2, \dots, (N-1).$$

取样定理要求  $\Delta x_0, \Delta x_1, \lambda$  和  $d$  之间必须满足条件:

$$N \cdot \Delta x_0 \cdot \Delta x_1 / \lambda d = 1.$$

为了方便起见, 取  $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x$ , 那么

$$G_0 = A \cdot \exp\left[\frac{i\pi}{N}(m^2 + n^2)\right] \cdot \exp\left[\frac{-i2\pi m \cdot n}{N}\right], \quad (14)$$

$$\frac{(\Delta x)^2}{d \cdot \lambda} = \frac{1}{N}. \quad (15)$$

把离散的沃尔什变换表达式与多平面变换系统相比较, 系统两端的输入、输出平面与输入、输出函数对应, 则变换矩阵与系统中的变换平面及光波在平面间的传播矩阵相当, 因此可以写出下面的等式:

$$Wal(j, k) = [G_0] \cdot [K_1] \cdots [G_0] \cdot [K_2] \cdots [G_0] \cdot [K_1] \cdot [G_0], \quad (16)$$

这里  $l$  是系统中变换元件的个数,  $K$  是变换元件的透过率函数,  $G_0$  是光波自由传播矩阵.

对于多个平面的变换系统, (16) 式是设计变换元件的主要依据. 文献[10]中进行了严格的证明. 只要给出变换矩阵的形式, 就可以编写出计算程序, 用迭代法在电子计算机上算出变换的最佳方案. 对于 8 阶光学序沃尔什变

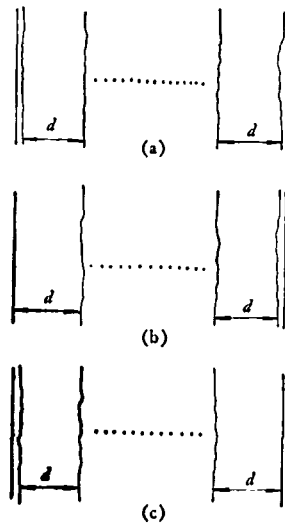


图 4 实现变换的三种方案

表 1

系 统	变换元件个数	方 差
图 4 (a)	2	0.0761
	3	0.0761
	4	$< 10^{-4}$
图 4 (b)	2	0.0761
	3	0.0761
	4	$< 10^{-4}$
图 4 (c)	2	0.1416
	3	0.0761
	4	0.0761

换, 考虑到输入、输出及变换平面的不同关系 (见图 4), 计算结果如表 1 所示. 其中, 方差是所实现的变换与给定变换的近似程度<sup>[6,7]</sup>. 可见取 (a), (b) 结构并用多个元件精度较高. 实验中我们用氩-氟激光器,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ . 取  $N = 8, \Delta x_0 = \Delta x_1 = 130 \mu\text{m}$ . 根据 (15) 式求出  $d = 213.65\text{mm}$ . 变换元件采用相息图形式, 同轴再现可以减少光能的损失. 根据银盐干板漂白乳胶厚度起伏特性, 控制曝光量从而控制乳胶厚度起伏来达到调制光波相位的目的. 我们取 (b) 结构, 令  $K_i = 1$ . 理论计算及实际的实验数据见表 2. 表中所给出的实际条纹数是用反射式干涉显微镜测量的. 变换片的具体制备方法及处理过程, 请参阅本讲座第四讲《银

表 2

序号	$K_1$				$K_2$				$K_3$			
	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹
0	0.1652	2.7496	1.75	1.80	-0.0206	2.2809	1.45	1.5	1.2307	3.1395	2	2
1	0.2268	3.1416	2	2.00	-1.5161	0.7854	0.5	0.6	1.2327	3.1415	2	2
2	-1.7360	1.1788	0.75	0.80	-1.5914	0.7101	0.45	0.5	-1.9068	0.0020	0	0
3	0.02282	3.1430	2	2.00	-2.3015	0	0	0	-1.9088	0	0	0
4	-0.1652	2.7496	1.75	1.80	-0.0206	2.2809	1.45	1.5	1.2307	3.1395	2	2
5	-2.9148	0	0	0	1.6255	3.9270	2.5	2.5	1.2328	3.1416	2	1.9
6	-1.7359	1.1789	0.75	0.80	-1.5913	0.7102	0.45	0.5	-1.9068	0.002	0	0
7	-2.9133	0.0015	0	0	0.8401	3.1416	2	2	-1.9088	0	0	0

盐记录介质在光学信息处理中的应用》或文献[12]。五平面变换系统的实验装置如图5所示。其中振幅掩膜G是为了消除乳胶起伏的过渡带而放置的。实验时变换系统中各个元件相对位置的调节十分重要,否则即使变换片的精度很高也很难得到一个很好的结果。我们是通过激光自准方法使G与光轴垂直,利用Table效应调准各元件的间距 $d$ [13]。实验中我们对五种输入函数的输出谱进行了测量,其结果与理论计算相一致[11]。

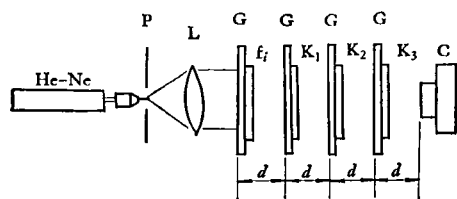


图5 五平面变换系统光路图

He-Ne 为激光器; P 为滤波小孔; L 为准直透镜; G 为振幅掩膜;  $K_1, K_2, K_3$  为变换片;  $f_1$  为输入片; C 为照相机

图5给出的系统,由于元件个数多,调节困难,因而衍射所造成的光能损失较大。为了克服上述缺点,可以减少变换元件。当然只取一片是最少了,但是可能性如何,文献[14]在理论上给出了肯定的答复。我们取各平面的孔径相等,变换片有64个取样点,大小为 $40\mu\text{m}$ ,用扫

描曝光法分别制备振幅和相位变换片[15],其实验结果与理论计算基本相符合。

#### 四、讨论

以上介绍的几种系统虽然都能够用光学方法实现沃尔什变换,但是取样点的数目还不够多,输出的信噪比也不是很高。因此,这仅是一些初步结果,尚属于基础研究性质的工作,到实际应用还有一段距离。目前,采用相息图或全息图方式制备的变换片,其相位控制精度有限,其原因是受到方法和材料的限制。因此,在用相干光实现空间可变的变换的研究中,目前急需在制备变换片的方法和材料上有突破性的进展。相比之下,利用平面元件的系统使之接近实用的条件是有希望的。文献[16]也提出了一种获得广义变换掩膜的方法。这样的工作也将有力地促进沃尔什变换工作的发展。可以预计,随着科学技术的发展及新材料的出现和完善,光学沃尔什变换的研究将会展现出新的局面。

#### 参 考 文 献

- [1] J. L. Walsh, *American J. Math.*, **45**(1923), 5.
- [2] AD 707431; AD 727000; AD 744650.
- [3] 李龙堂, *北京大学学报*, **4**(1975), 403; 程民德, *北京大学学报*, **1**(1978), 26.

(下转第755页)