卡诺制冷机的最佳制冷系数与制冷率间的关系

严 子 浚
(厦门大学物理系)

一、引 言

众所周知,可逆卡诺热机的效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_L}{T_H}, \tag{1}$$

而可逆卡诺制冷机的制冷系数为

$$\varepsilon_c = \frac{T_L}{T_H - T_L}. \tag{2}$$

然而,实际热机的效率或制冷机的制冷系数,都不象理想可逆机那么大,其主要原因是要实现理想的可逆卡诺循环,循环的等温部分必须以无限缓慢的速度进行. 否则由于热阻的存在,循环就必须在不可逆导热的情况下进行. 而实际热机或制冷机总是在有限时间内完成循环的,它难免要受到热阻的影响 . 因此,为了使热力学理论能更好地指导实际热机或制冷机的工作,必须考虑有限时间的热力学问题.

自从 Curzon 和 Ahlborn 发表《最大功率输出时卡诺热机的效率》一文后[1],这个问题引起了人们的注意,近几年来有不少人开展了研究,取得许多重要结论. 例如,Curzon 和 Ahlborn 最先推出最大功率输出时卡诺循环的效率为

$$\eta_m = 1 - \left(\frac{T_L}{T_H}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

随后,Rubin 等也得到了这个结论[2], Rubin 还推出在给定的循环周期 τ 和输入能量 Q_1 的情况下,卡诺热机的最大效率. Salamon 及其他一些人[3] 又推出在给定的循环周期下,沿着循环各过程的熵产生率为常数时,循环的总熵产生最小. 并且对于慢过程极限,熵产生最小时,循环各过程的熵产生率为同一常数,等等[4-10]. 这些结论都有助于对实际热机的最佳运转性能的进一步认识. 然而,至今对制冷机有关这方面的研究还较少. 本文将导出由于热阻的影响,卡诺制冷机的最佳制冷系数与制冷率之间的关系. 有了这个关系,便能确定各种不同具体条件下卡诺制冷机所能达到的制冷系数界限.

二、理 论 模 型

考虑一卡诺制冷机工作在温度分别为 T_H 和 $T_L(T_H > T_L)$ 的热源之间. 为了只考虑热阻的存在对制冷机工作性能的影响,设机器进行循环时,工作物质本身进行准静态的逆卡诺循环(这意味着在循环过程中,工作物质内部的弛豫时间与循环中任一过程进行的时间相比短得多,所进行的两个等温过程和两个绝热过程可认为是准静态的). 然而,循环的两个等温过程的温度不是 T_H 和 T_L,而分别为 T_1 和 T_2,并有 $T_1 > T_H > T_L > T_2$. 这样可在有限时间内从低温热源吸取热量及放热给高温热源,并对循环做功. 由于两个绝热过程没有与外界交换热量,不受热阻所耽搁,故可设它们进行的时间与两个等温过程相比较可以忽略. 最后为了简便,设工作物质与热源之间的导热系数 α 为常数,即有

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_H)t_1, \tag{4}$$

$$Q_2 = \alpha(T_L - T_2)t_2, \tag{5}$$

其中 Q_1 表示在 t_1 时间内放给高温热源的热量, Q_2 表示在 t_2 时间内从低温热源所取出的热量,而 $t_1 + t_2$ 为循环的周期 τ. 由此可定义制冷率 R 如下:

$$R = \frac{Q_2}{\tau}, \tag{6}$$

则有

$$R = \frac{\alpha(T_L - T_2)t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\alpha(T_L - T_2)}{1 + t_1/t_2}. \tag{7}$$

由于工作物质内部进行准静态的逆卡诺循环，故有

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{8}$$

而制冷系数为

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}. \tag{9}$$

由(4)，(5)和(8)三式解得

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{T_L - T_2}{T_1 - T_H}. \tag{10}$$

于是，(7)式可写成

$$R = \frac{\alpha}{\frac{1}{T_L - T_2} + \frac{T_1}{T_2(T_1 - T_H)}}. \tag{11}$$

令 $x = \frac{T_1}{T_2}$，$y = T_2$，则(9)和(11)式又可分别写成

$$\varepsilon = \frac{1}{x - 1}, \tag{12}$$

$$R = \frac{\alpha}{\frac{1}{T_L - y} + \frac{1}{y - \frac{T_H}{x}}}. \tag{13}$$

利用这些公式，即可导出所需的关系.

三、最佳制冷系数与制冷率间的关系

为求出在给定制冷率 R 的条件下，制冷系数 ε 的极值，应用求极值的拉格朗日乘子法较为方便. 定义拉格朗日函数 L，

$$L = \varepsilon - \lambda R, \tag{14}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子. 将(12)和(13)两式代入(14)式，得

$$L = \frac{1}{x - 1} - \frac{\lambda\alpha}{\frac{1}{T_L - y} + \frac{1}{y - \frac{T_H}{x}}}. \tag{15}$$

ε 为极值时应有

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

而

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{\lambda\alpha T_H}{\left(\frac{1}{T_L - y} + \frac{1}{y - \frac{T_H}{x}}\right)^2 \left(y - \frac{T_H}{x}\right)^2 x^2}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\lambda\alpha\left[\frac{1}{(T_L - y)^2} - \frac{1}{\left(y - \frac{T_H}{x}\right)^2}\right]}{\left(\frac{1}{T_L - y} + \frac{1}{y - \frac{T_H}{x}}\right)^2}. \tag{18}$$

将(17)和(18)两式分别代入(16)中的两式，化简后可得

$$\mu T_H(x-1)^2 - \left(\frac{T_L x - T_H}{T_L - y}\right)^2 = 0, \tag{19}$$

$$(T_L - y)^2 - \left(y - \frac{T_H}{x}\right)^2 = 0, \tag{20}$$

其中 $\mu = -\lambda\alpha$. 由(19)和(20)两式不难解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{T_H}{T_H - 2\sqrt{\dfrac{T_H}{\mu}}}, \\ y = \dfrac{T_H + T_L}{2} - \sqrt{\dfrac{T_H}{\mu}}. \end{cases} \tag{21}$$

将(21)式代入(12)和(13)两式，即得在给定制冷率 R 时，最佳制冷系数为

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T_H} - 1. \tag{22}$$

而

$$R = \frac{\alpha}{4}\left(2\sqrt{\frac{T_H}{\mu}} - T_H + T_L\right). \tag{23}$$

再由(22)和(23)式消去 μ，得 ε_0 与 R 的关系为

$$\varepsilon_0 = \frac{T_L - \frac{4R}{\alpha}}{T_H - T_L + \frac{4R}{\alpha}}, \tag{24}$$

或

$$R = \frac{\alpha}{4}\left(T_L - \frac{T_H \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}\right). \tag{25}$$

(24)和(25)两式是本文所要求的结果. 它确定了在给定的制冷率、热源温度和导热系数的情况下，卡诺制冷机的最大制冷系数. 同时又可确定在给定的制冷系数、热源温度和导热系数的情况下,卡诺制冷机的最高制冷率.

四、讨　论

1. 显然,当 $\varepsilon_0=\frac{T_L}{T_H-T_L}$ 时, $R=0$. 即卡诺制冷机要达到理想的制冷系数时，制冷率为零. 所以理想可逆卡诺制冷机的制冷系数不能作为实际制冷机制冷系数的上限. 在给定制冷率的情况下，实际制冷机制冷系数的界限应由(24)式来确定.

2. 由(24)式不难看出, ε_0 随 R 的增大而单调地减小, 并且当 R 较大时, ε_0 变得很小,而当 $R=\frac{\alpha T_L}{4}=R_{\max}$ 时, $\varepsilon_0=0$. 可见实际制冷机的 R 不宜过大,大多取 $R_{\max}$ 的百分之几较为适宜. 当然, R 的数值还应该根据 T_H 与 T_L 的比值来选择. 一般说来, T_H 与 T_L 的比值大时,特别当 T_L 小时, R 可适当取大些.

3. 引进等效温度 T_L^*:

$$T_L^*=T_L-\frac{4R}{\alpha}, \tag{26}$$

则(24)式可写成

$$\varepsilon_0=\frac{T_L^*}{T_H-T_L^*}. \tag{27}$$

这形式与可逆卡诺制冷机的制冷系数表达式完全相同. 可见,当有热阻存在(即 α 有限)时,在一定制冷率的情况下，相当于低温热源温度降低,并且 R/α 越大时降低越厉害,而当

$$\frac{R}{\alpha}=\frac{T_L}{4}$$

时,相当于 $T_L^*=0$,这时制冷循环将无法进行.

五、ε_0 与其他参数的关系

1. 由于制冷机的平均输入功率 P 与 R 的关系为

$$R=\varepsilon_0 P, \tag{28}$$

因此可将(25)式写成

$$P=\frac{\alpha}{4}\left(\frac{T_L}{\varepsilon_0}-\frac{T_H}{1+\varepsilon_0}\right). \tag{29}$$

(29)式为制冷机的输入功率与最佳制冷系数之间的关系. 它确定了在给定的输入功率、热源温度和导热系数的情况下，卡诺制冷机的最大制冷系数. 同时又确定了在给定的制冷系数、热源温度和导热系数的情况下，卡诺制冷机所需的最小输入功率.

2. 由于每循环的平均熵产生率为

$$\sigma=\frac{\Delta S}{\tau}=\frac{1}{\tau}\left(\frac{Q_1}{T_H}-\frac{Q_2}{T_L}\right)$$
$$=R\left(\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0 T_H}-\frac{1}{T_L}\right), \tag{30}$$

故由(25)式可得最佳制冷系数与平均熵产生率之间的关系为

$$\sigma=\frac{\alpha}{4}\frac{T_L(1+\varepsilon_0)}{\varepsilon_0}\left[1-\frac{T_H\varepsilon_0}{T_L(1+\varepsilon_0)}\right]^2. \tag{31}$$

由此又可确定在给定的熵产生率情况下，制冷机的最佳制冷系数等. 显然,当 $\varepsilon_0=\frac{T_L}{T_H-T_L}$ 时, $\dot{\sigma}=0$, 这时循环过程是可逆的.

总之,由(24)或(25)式,我们可求出最佳制冷系数与制冷机各种参数之间的关系. 这样我们便能确定在某些指定参数下，制冷机所能达到的制冷系数界限. 另一方面，又可根据这个变化关系，对给定的制冷机，选择适当的参数，使之能在较佳状况下运转. 所以(24)或(25)式是考虑热阻存在时，制冷机的一个很重要的普遍关系式. 由它给出的制冷系数界限，与经典的可逆界限(2)式比较，更具有实际意义，它能对实际制冷机起更准确的指导作用.

参 考 文 献

[1] F. L. Curzon and B. Ahlborn, *Am. J. Phys.*, 43 (1975), 22.
[2] M. H. Rubin, *Phys. Rev. A*, 19(1979), 1272.
[3] P. Salamon et al., *Phys. Rev. A*, 21(1980), 2115.
[4] B. Andresen et al., *Phys. Rev. A*, 15(1977), 2086.
[5] D. Gutkowicz-Krusin et al., *J. Chem. Phys.*, 69

(下转第 736 页)