

近代物理讲座

第四讲 物理学中的一些基本电路问题 (I)

余道衡

(北京大学无线电电子学系)

无线电电子学是从物理学中生长出来并逐渐发展成为独立的学科, 它又反过来影响物理学, 特别是其中的实验物理。近代实验物理离不开应用无线电电子学及其技术。归结起来, 对各种电磁信号的处理, 大都是研究电磁信号通过电路的过程及规律, 其中一些最基本的电路问题可以看作物理学的一部分。物理工作者也应该掌握这些知识, 这有利于进一步学习掌握专门的无线电电子学技术, 并把它们应用于实验物理中。

本讲不涉及那些专门的无线电电子学问题, 仅简要讨论一些物理学中的基本电路问题, 并通过习题来进行说明。这里所选的题目大多是近来物理考题中常见的类型。

一、电路分析的基本定理

1. 用拉氏¹⁾变换解电路

(1) 拉氏变换

把时间函数 $f(t)$ 的如下定积分叫做 $f(t)$ 的拉氏积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

其中 $s = \sigma + j\omega$, σ 与 ω 是实数, 在电路理论中 s 叫做复频率。拉氏积分在复平面的右半平面内的一点 $s_0 = \sigma_0 + j\omega$ ($0 < \sigma_0$) 上如果收敛, 则在下列情况下也收敛:

$$0 \leq \sigma_0 \leq \operatorname{Re} s = \sigma.$$

此时, 由拉氏积分把 $f(t)$ 变换为 s 的函数, 记为

物理

$F(s)$, 叫做 $f(t)$ 的拉氏变换, 把这种运算也记为 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 。

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma). \quad (1)$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数, 对应的 $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。在电路理论中, $f(t)$ 和 $F(s)$ 有一一对应的关系, 在下文我们把拉氏变换简单记为 \mathcal{L} 变换。当给定 $F(s)$ 时,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (0 \leq \sigma_0 \leq \sigma, 0 \leq t). \quad (2)$$

(2) 主要的拉氏变换公式

i. 线性组合

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} \\ = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s); \end{aligned}$$

ii. 导函数

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0_+),$$

其中 $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$;

iii. 定积分

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s};$$

iv. 不定积分

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int f(t) dt\right\} &= \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \\ &\times \left\{\int_{-\infty}^t f(t) dt\right\}_{t=0_+}; \end{aligned}$$

1) 即拉普拉斯, 以下都相同。

v. 延迟定理

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = F(s)e^{-s\tau};$$

vi. 位移(频移)定理

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{\alpha t}\} = F(s-\alpha);$$

vii. 相似定理

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right).$$

(3) 主要时间函数的拉氏变换关系 (见表 1)

表 1

函数形式	$f(t)$	$F(s)$
单位脉冲函数	$\delta(t)$	1
单位阶跃函数	$u(t)$ 或 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
指数函数	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
正弦函数	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
余弦函数	$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
指数乘正弦	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
指数乘余弦	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
正弦函数 (有初相)	$\sin(\beta t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \beta \cos \theta}{s^2 + \beta^2}$
余弦函数 (有初相)	$\cos(\beta t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \beta \sin \theta}{s^2 + \beta^2}$

(4) 电路方程的拉氏变换

把电路方程中的电压 $V(t)$ 、电流 $I(t)$ 、电动势 $E(t)$ 和电流强度 $I_s(t)$ 进行拉氏变换, 得到

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s);$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s);$$

$$\mathcal{L}\{E(t)\} = E(s);$$

$$\mathcal{L}\{I_s(t)\} = I_s(s).$$

电感 L 和电容 C 两端的电压 $v_L(t)$ 、 $v_C(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}\right\} &= V_L(s) \\ &= sL I_L(s) - L I_L(0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt\right\} &= V_C(s) \\ &= \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{V_C(0)}{s} \\ &= \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{Q_C(0)}{sC}. \end{aligned}$$

L 和 C 中的电流 $i_L(t)$ 、 $i_C(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt\right\} \\ &= \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}\right\} \\ &= sC V_C(s) - C V_C(0) \\ &= sC V_C(s) - Q_C(0). \end{aligned}$$

在电压源的情形下, 当直流电动势 E 在 $t=0$ 时接入电路时, 它的拉氏变换应是

$$\mathcal{L}\{E1(t)\} = \frac{E}{s};$$

正弦电动势的拉氏变换应是

$$\mathcal{L}\{E_m(\omega t + \theta_c)\} = E_m \frac{s \sin \theta_c + \omega \cos \theta_c}{s^2 + \omega^2}.$$

用上述拉氏变换后的量组成的电路方程具有如下的性质:

A. 方程中包含了所有的初值 (L 、 C 元件的初值);

B. 是电路变量 $V(s)$ 和 $I(s)$ 的一次代数方程式;

C. 电路变量的系数是 s 的实有理函数;

D. 在 $t=0$ 时, 加入直流电动势或正弦电动势, 电路的响应 $X(t)$ 是 s 的实有理函数, 分子多项式的次数不超过分母多项式的次数。

一般来说, 用拉氏变换法求信号通过电路 (包括暂态过程) 的步骤为:

A. 把已知电动势、电流源强度进行拉氏变换求象函数;

B. 划出算符形式的电路图, 把 L 、 C 上的初值看作电源, 按电路定理解算符形式的电路, 解出待求量的象函数;

C. 用查表法或展开定理求出待求量的原函数。

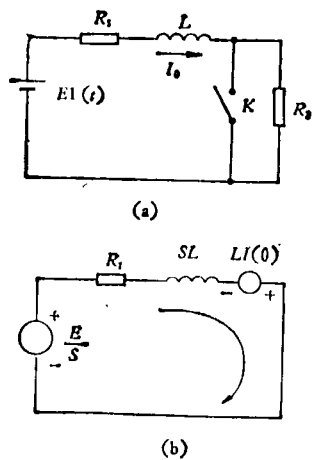


图 1

例 1 如图 1(a) 所示电路, 在开关闭合前已达稳态, 若在 $t = 0$ 时, 将开关闭合, 求电路中的电流 $i(t)$

解 先求电感中电流的初值 $I_L = E / (R_1 + R_2)$, 划出算符等效电路如图 1(b) 所示, 其中电压源电动势的象函数为 E/s , 由图 1(b) 看出, 电流 $i(t)$ 的象函数为

$$I(s) = \frac{E/s + LI_L(0)}{R_1 + sL} = \frac{I_L(0)s + E/L}{s(s + R_1/L)}$$

用展开定理或查拉氏变换表不难求出

$$i(t) = \frac{E}{R_1} - \left[\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2} \right] e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

$$= \frac{E}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1}{L}t} \right) \quad t \geq 0.$$

例 2 设电容 C 上的初始电荷为 Q , 求图 2(a) 电路中 C 上的电压 $v_C(t)$

解 考虑电容初值, 划出算符等效电路如图 2(b) 所示, 其中 Q/sC 为初值电源, E/s 为电源电动势. 利用等效电源定理得图 2(c) 之电流源等效电路. 得出电容上电压为

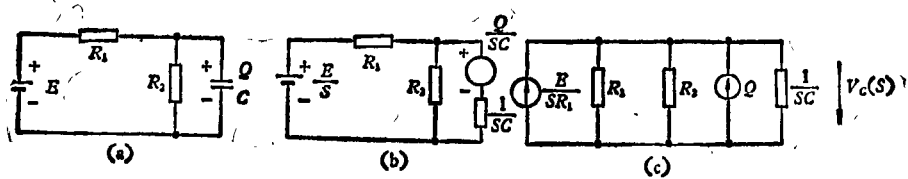


图 2

$$V_C(s) = \left(\frac{E}{sR_1} + Q \right) Z(s),$$

其中

$$Z(s) = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + sC}.$$

把 $Z(s)$ 代入 $V_C(s)$ 并简化, 得到

$$V_C(s) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda} \right) + \frac{Q}{s} \frac{1}{s + \lambda},$$

其中

$$\lambda = \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = \frac{1}{C(R_1 // R_2)}.$$

求反变换得

$$v_C(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{Q}{C} e^{-\lambda t}.$$

2. 用微分算符解电路

设函数 $y = y(t)$, 用微分算符 D 表示微商 $\frac{d}{dt}$, 则 $Dy = \frac{dy}{dt}$, 表示对 y 进行一次运算, 则 $D^n y = \frac{d^n y}{dt^n}$. 以 $D^{-1} = \frac{1}{D}$ 表示 D 的逆运算, 即 $\frac{1}{D}$ 表示不定积分, $\frac{1}{D} = \int () dt$. 若有 $Dy = f(t)$, 则

$$y = \frac{1}{D} f(t) = \int f(t) dt. \quad (3)$$

设常数为 λ ,

则

$$e^{-\lambda t} D(e^{\lambda t} y) = Dy + \lambda y = (D + \lambda)y,$$

$(D + \lambda)$ 也是一种算符, 即对 y 作如下运算:

$$(D + \lambda)y = e^{-\lambda t} D(e^{\lambda t} y).$$

其逆运算记为 $(D + \lambda)^{-1} = \frac{1}{D + \lambda}$, 可以证明

$$\frac{1}{D + \lambda} = e^{-\lambda t} \int () e^{\lambda t} dt.$$

若有 $(D + \lambda)y = f(t)$, 则

$$y = \frac{1}{D + \lambda} f(t) = e^{-\lambda t} \int f(t) e^{\lambda t} dt. \quad (4)$$

常参量线性电路的基本解法是微分方程的解法, 用上述微分算符求解比用微分方程常规解法简便. 电路方程中的电阻元件满足欧姆定律, 其电压与电流的关系是 $V(t) = RI(t)$ 或 $I(t) = (1/R)V(t)$, 电容元件上电压、电流和初值之间的关系是

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{Q(0_+)}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \int I(t) dt, \end{aligned}$$

或

$$I(t) = C \frac{d}{dt} V(t).$$

电感元件上电压、电流关系为

$$V(t) = L \frac{d}{dt} I(t);$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{L} \int V(t) dt \\ &= I(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

若用微分算符 D 描述它们关系, 可表示为

$$V(t) = \frac{1}{DC} I(t) = \frac{1}{CD} I(t),$$

$$I(t) = DCV(t) = CDV(t);$$

$$V(t) = LDI(t),$$

$$I(t) = \frac{1}{LD} V(t).$$

由以上各式可看出它们和欧姆定律有相同的形式: 算符 $\frac{1}{CD}$, LD 和电阻相对应; 算符 CD , $\frac{1}{LD}$ 和电导 $G = \frac{1}{R}$ 相对应. 以上算符反映了电阻、电容、电感上的电压、电流和初值的关系. R , LD , $\frac{1}{CD}$ 称为微分算符阻抗, G , $\frac{1}{LD}$, CD 称为微分算符导纳. 用这些微分算符来解电路是方便的.

当电路中的电动势为简谐电动势, 且只考虑稳态解时, 则各元件上的电压、电流都是同频

率的简谐函数, 具有 $A(\omega) = A_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ 的形式,

D 和 $\frac{1}{D}$ 作用于 $A(\omega)$, 有

$$DA(\omega) = j\omega A(\omega)$$

和

$$\frac{1}{D} A(\omega) = \frac{1}{j\omega} A(\omega),$$

则 D 和 $\frac{1}{D}$ 简化为 $j\omega$ 和 $\frac{1}{j\omega}$. 通过微、积分运算, 可简化为代数运算, 于是微分算符阻抗 LD 和 $\frac{1}{CD}$ 分别变成了 $j\omega L$ 和 $\frac{1}{j\omega C}$, 此时微分算符阻抗变成了复阻抗.

例 1 在图 3(a) 所示电路中, 已知在 $t \leq 0$ 时电容 C 上的初始电荷为 Q , 在 $t = 0$ 时, 开关 K 闭合, 求此后电路中的电流 $I(t)$.

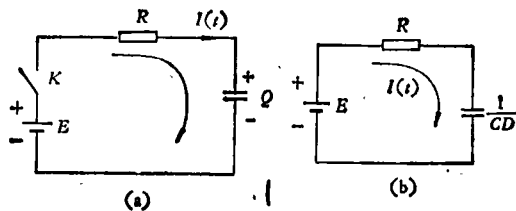


图 3

解 因 E 为有限量, 电容上电荷连续, $t = 0$ 时电荷为 Q , 电阻两端电压为 $E - \frac{Q}{C}$, 所以初值为

$$I(0) = \frac{1}{R} \left(E - \frac{Q}{C} \right).$$

由图 3(b) 得

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{R + 1/CD} E = \frac{CD}{RCD + 1} E \\ &= \frac{\frac{1}{R} DE}{D + 1/RC} = \frac{1}{D + 1/RC} 0 \\ &= e^{-\frac{1}{RC}t} \int e^{\frac{1}{RC}t} 0 dt \\ &= e^{-\frac{1}{RC}t} \int 0 dt = A e^{-\frac{1}{RC}t}. \end{aligned}$$

利用初值 $I(0) = A$, 定出 $A = \frac{1}{R} \left(E - \frac{Q}{C} \right)$ 最后得

$$I(t) = \frac{1}{R} \left(E - \frac{Q}{C} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

此题实际上是一个解电路微分方程的问题,利用微分算符直接写了解的形式,跳过了列电路方程这一步。

例 2 在图 4(a) 所示的电路中, $t = 0$ 时, $I_L(0) = I_0$ 。求 $t > 0$ 时电感上的电压 $V_L(t)$

解 由给定的初始条件,按图 4(a) 所示的计算方向,得 $V(0) = E - I_0 R$, 这就是 $V(t)$ 的初值,由图 4(b) 得

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{LD}{R + LD} E = \frac{D}{D + R/L} E \\ &= \frac{1}{D + R/L} 0 = e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} 0 dt \\ &= A e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

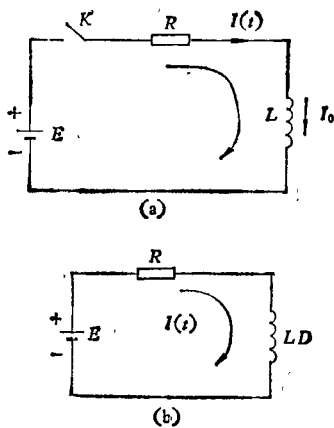


图 4

根据 $V(t)$ 的初条件得最后结果:

$$V(t) = (E - I_0 R) e^{-\frac{R}{L}t}$$

此题中用算符 LD 和解分压电路的计算方法,直接写出了电路的解。从以上两例结果看出,电容 C 的初值 Q 和电感初值 I_0 都有电源的作用。

例 3 在图 5 电路中 $t = 0$ 时, $I(t) = I_0$, 求电感 L 两端的电压 $V_L(t)$

解 由给定的初值得 $V(0) = E_0 - I_0 R$, 用上题的解法得

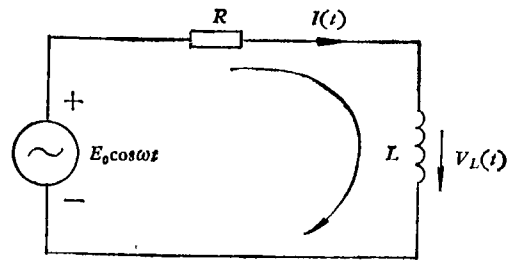


图 5

$$\begin{aligned} V_L(t) &= \frac{LD}{R + LD} E_0 \cos \omega t \\ &= \frac{D}{D + R/L} E_0 \cos \omega t \\ &= \frac{-1}{D + R/L} \omega E_0 \sin \omega t \\ &= -e^{-\frac{R}{L}t} \int \omega E_0 \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt \\ &= \frac{E_0}{1 + (R/L)^2} \left(-\frac{R}{L\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \\ &\quad + A e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{E_0 L \omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} \cos(\omega t + \phi) \\ &\quad + A e^{-\frac{R}{L}t}, \end{aligned}$$

其中 $\phi = \text{tg}^{-1} \frac{R}{L\omega}$ 。由初条件可定出

$$A = E_0 - I_0 R - \frac{E_0 L \omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} \cos \phi$$

3. 阻抗概念和电路定理的推广

讲了上述两种解常参量线性电路的方法之后,我们可以推广阻抗的概念如表 2 所示:

表 2

	电阻 R	电感 L (互感 M)	电容 C
复阻抗	R	$j\omega L$ ($j\omega M$)	$\frac{1}{j\omega C}$
复导纳	$G = \frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L}$ ($\frac{1}{j\omega M}$)	$j\omega C$
拉氏算符阻抗	R	sL (sM)	$\frac{1}{sC}$
拉氏算符导纳	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{sL}$ ($\frac{1}{sM}$)	sC
微分算符阻抗	R	LD (MD)	$\frac{1}{CD}$
微分算符导纳	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{LD}$ ($\frac{1}{MD}$)	CD

在电路各个支路上,欧姆定律成立,欧姆定律的推广形式如下:

$$I = \frac{V}{R} \quad \text{或} \quad I = GV;$$

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} \quad \text{或} \quad I(\omega) = Y(\omega)V(\omega);$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} \quad \text{或} \quad I(s) = Y(s)V(s);$$

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z(D)} \quad \text{或} \quad I(t) = Y(D)V(t).$$

在复杂电路中基尔霍夫定律成立,也可以推广为算符形式。对于任意节点,基尔霍夫电流定律(KCL)成立:

$$\Sigma I(t) = 0;$$

$$\Sigma I(\omega) = 0;$$

$$\Sigma I(s) = 0.$$

对于任意闭合回路,基尔霍夫电压定律(KVL)成立:

$$\Sigma V(t) = 0;$$

$$\Sigma V(\omega) = 0;$$

$$\Sigma V(s) = 0.$$

有了阻抗概念、欧姆定律和基尔霍夫定律的推广形式,就可以把电路分析和计算的各种方法推广为算符形式,这些规律(公式)包括:无源支路的串、并联;电流源与电压源互换;迭加定理;等效电源定理;回路电流法、节点电压法、割集电压法;最大功率输出条件等。

电路定理在形式上的简化也简化了计算过程,一个联立微分方程组的求解问题,可以化为代数方程的求解问题。在某些情况下,微分算符法还可以跳过写电路方程这一步,直接写出解的形式,这比拉氏算符法更为简便。我们应该灵活地应用各种方法去计算常参量线性电路的直流问题、稳态交流问题和暂态问题。

题1 如图6(a)所示的衰减器电路,为保证不产生线性失真(有最大的频带宽度),应接入什么元件?它们的数值应如何选取?

解 只要能够实现衰减器的分压比与频率无关,也即要求衰减器的各臂阻抗具有相同的幅角就行,因此在 R_1 , R_2 和 R_3 三个电阻旁并联

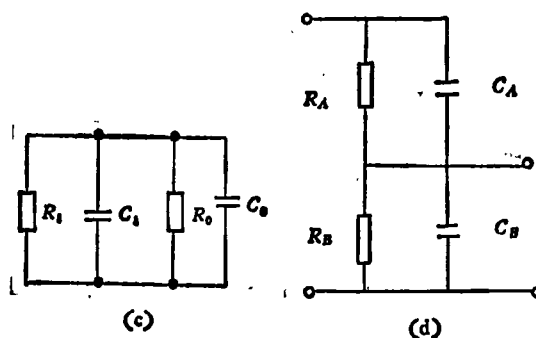
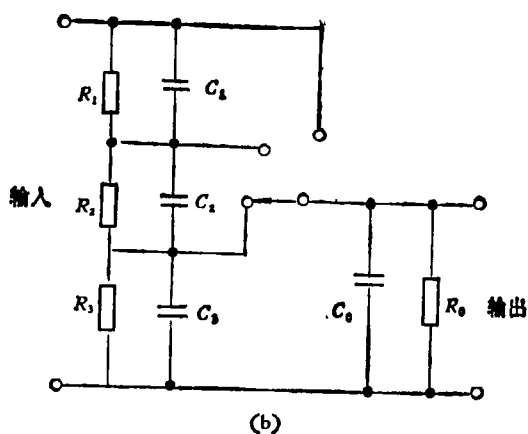
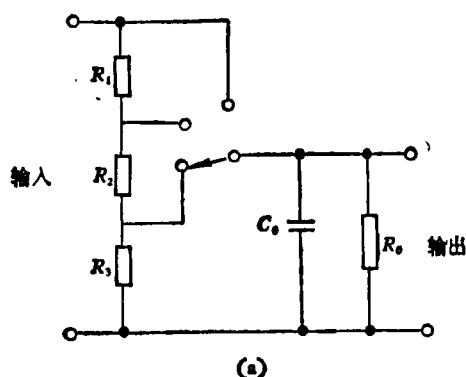


图 6

三个电容 C_1 , C_2 和 C_3 如图6(b)所示,三个电容的取值应满足以下条件:

$$R_0 C_0 = R_1 C_1 = R_2 C_2 = R_3 C_3.$$

证明: 每一个电阻电容的并联阻抗为

$$Z(\omega) = \frac{R(1/j\omega C)}{R + 1/j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega CR},$$

当上式满足的情况下,每一个如图6(c)所示的并联阻抗的时间常数为

$$\frac{RR_0}{R+R_0}(C_1+C_0) = R_0C_0 = RC.$$

因此,任意档上的分压比关系可等效为如图 6 (d) 所示的关系,其衰减比为

$$K(\omega) = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{\frac{R_A}{1+j\omega R_A C_A}}{\frac{R_A}{1+j\omega R_A C_A} + \frac{R_B}{1+j\omega R_B C_B}}$$

当 $R_A C_A = R_B C_B$ 时,

$$K(\omega) = \frac{R_B}{R_A + R_B}.$$

$K(\omega)$ 与频率无关,满足线性不失真条件,或有最大的频带宽度.

以上结论的证明也可以归结为下面将要讨论的问题.

题 2 在图 7(a) 所示的分压电路上加一个阶跃电压 $E1(t)$, 设电容上初值为零, 并有 $R_1 C_1 = R_2 C_2$, 试求输出电压 $V_2(t)$

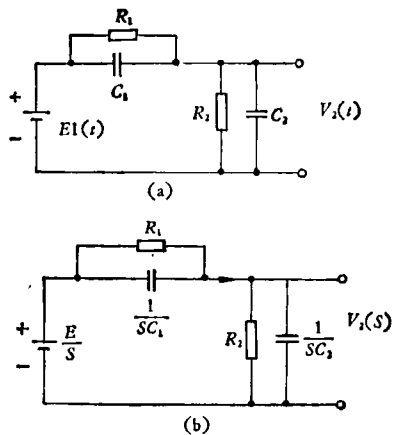


图 7

解 画出电路的拉氏算符电路如图 7(b) 所示, 设时间常数 $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$, 解出

$$V_2(s) = \frac{E}{s} \frac{\frac{R_2}{1+s\tau_2}}{\frac{R_2}{1+s\tau_2} + \frac{R_1}{1+s\tau_1}} = \frac{E}{s} \frac{R_2(1+s\tau_1)}{R_1(1+s\tau_2) + R_2(1+s\tau_1)}$$

物理

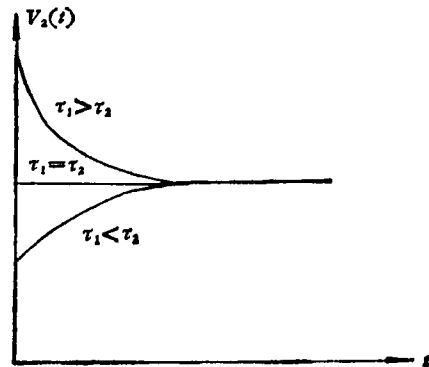


图 8

当 $\tau_1 = \tau_2$ 时, 有

$$V_2(s) = \frac{E}{s} \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

进行拉氏反变换后得

$$V_2(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} 1(t).$$

这表明, 当 $\tau_1 = \tau_2$ 时, 输出波形与输入波形完全相同, 不产生线性失真. 如果 $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$, 则输出波形将产生失真. 如图 8 所示, 在 $t = 0$ 时电容上电压突跳 $\frac{C_1}{C_1 + C_2} E$, 若 $\tau_1 > \tau_2$ (即

$R_1 C_1 > R_2 C_2$), 则有

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} > \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

所以, 在 $t = 0$ 时, $V_2(t)$ 的跳变值比 $\frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ 大. 经过逐渐放电, 趋于稳态值 $\frac{R_2}{R_1 + R_2} E$. 反之, 若 $\tau_1 < \tau_2$, 则

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} < \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

在 $t = 0$ 时 $V_2(t)$ 的跳变值比 $\frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ 小.

经过逐渐充电, 趋于稳态值 $\frac{R_2}{R_1 + R_2} E$. 可见, 这种衰减器电路应当满足 $R_1 C_1 = R_2 C_2$ 的条件, 才不产生线性失真.

题 3 如图 9(a) 的电路中, ω , R_1 , R_2 和 L 是固定的, C 和 M 是可变的. (1) 求电阻 R_2 上耗散功率最大时的 M 和 C . (2) 求最大耗散功

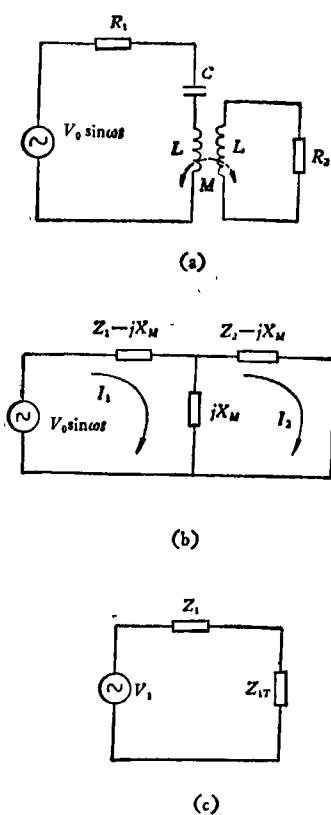


图 9

率。如有必要，可以假设 $R_2 > R_1$, $\frac{\omega L}{R_2} > 10$ 。

解 这是一个互感耦合电路的问题。根据互感等效电路，可以得到此电路的等效电路如图 9(b) 所示。其中

$$Z_1 = R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L,$$

$$jX_M = j\omega M.$$

由等效电路写出电路方程：

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_1 - jX_M I_2 \\ 0 = -jX_M I_1 + Z_2 I_2 \end{cases}$$

然后解出

$$I_2 = \frac{jX_M}{Z_2} I_1 \quad \text{和} \quad I_1 = \frac{V_1}{Z_1 + X_M^2/Z_2},$$

这等效于图 9(c) 所示的电路。令 $Z_{IT} = X_M^2/Z_2$ ，并称之为反映阻抗，它相当于把次级回路的阻抗反映到初级回路中来的阻抗。

$$\begin{aligned} Z_{IT} &= \frac{X_M^2}{Z_2} = \frac{X_M^2}{R_2 + j\omega L} \\ &= \frac{X_M^2}{R_2 + \omega^2 L^2} R_2 - j \frac{X_M^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} \omega L \\ &= R_{IT} + jX_{IT}. \end{aligned}$$

由于互感 M 和电感 L 都是无耗元件， R_2 上耗散功率就是加在次级阻抗 Z_2 上的功率，也就是加在反映阻抗 Z_{IT} 上的功率，因此 R_2 上得到最大功率的条件也是反映阻抗得到最大功率的条件，根据最大功率输出条件（功率匹配条件），

$$Z_1^* = Z_{IT}.$$

从实部相等，即

$$\begin{aligned} R_1 = R_{IT} &= \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} R_2 \approx \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L^2} R_2 \\ &\left(\text{当 } \frac{\omega L}{R_2} > 10\right), \end{aligned}$$

得到

$$M^2 = \frac{R_1}{R_2} L^2,$$

从虚部关系

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 M^2 \omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} \\ &\approx \frac{\omega M^2}{L} \quad \left(\text{当 } \frac{\omega L}{R_2} > 10\right), \end{aligned}$$

得到

$$\frac{1}{C} = \omega^2 \left(L - \frac{M^2}{L} \right).$$

所以，从最大功率输出条件解出

$$M = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} L, \quad C = \frac{L}{\omega^2(L^2 - M^2)}.$$

消耗在 R_{IT} 上的功率就是消耗在 R_2 上的功率即 $P_2 = R_{IT} I_1^2 = R_2 I_2^2$ ，在最大功率输出条件下有

$$\begin{aligned} I_{1\max} &= \frac{V_1}{(R_1 + R_{IT}) + j(X_1 + X_{IT})} \\ &= \frac{V_1}{R_1 + R_{IT}} = \frac{V_1}{R_1 + \frac{M^2}{L^2} R_2} \\ &= \frac{V_1}{2R_1}, \end{aligned}$$

所以 R_2 上的最大耗散功率为

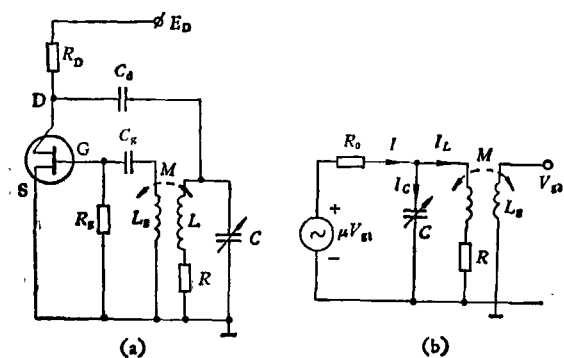


图 10

$$P_{2\max} = R_{1T} I_{1\max}^2 = \frac{M^2 R_2}{L^2} \left(\frac{V_1}{2R_1} \right)^2$$

$$= \frac{V_1^2}{4R_1} = \frac{V_0^2}{8R_1}$$

题 4 如图 10(a) 所示场效应管互感式调漏振荡电路。已知场效应管的放大系数为 μ ，输出阻抗为 r_d ，求可能的振荡频率 f ，问振荡器的振荡条件是什么？[提示： R_g 很大，场效应管 G 极可视为开路， C_d 和 C_g 很大，可视为短路。]

解 根据提示，不考虑 R_g ， C_d 和 C_g 的作用，场效应管用电压源等效，则振荡电路如图 10(b) 所示。图中 R_0 为 r_d 与 R_D 的并联值是场效应管电路的输出电阻， V_{g1} 是栅极的交流电压，经放大后漏极的交流电压为 μV_{g1} (应注意场效应管 μ 值为负值)，设

$$\begin{cases} Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \\ Z_L = R + j\omega L, \\ Z_M = j\omega M. \end{cases}$$

由于

$$\begin{cases} I_L Z_L = I_C Z_C, \\ I = I_L + I_C, \end{cases}$$

故得

$$I = I_L \left(1 + \frac{Z_L}{Z_C} \right).$$

互感作用有

$$V_{r2} = I_L Z_M.$$

根据欧姆定律，有

$$\mu V_{g1} = I R_0 + I_L Z_L.$$

若电路满足振荡条件，要求

$$V_{g1} = V_{g2}.$$

由以上四式解得

$$\mu Z_M = \left[R_0 \left(1 + \frac{Z_L}{Z_C} \right) + Z_L \right],$$

即

$$\begin{aligned} \mu j\omega M &= R_0 \left(1 + \frac{R + j\omega L}{1/j\omega C} \right) + R + j\omega L \\ &= R_0 (1 - \omega^2 LC) + R + j\omega L \\ &\quad + jRR_0\omega C. \end{aligned}$$

把上式实部与虚部分开，得到两个关系式。由实部得

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R}{R_0} \right),$$

推出振荡频率：

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 + R/R_0}{LC}}.$$

由虚部得出

$$M = \frac{CRR_0 + L}{\mu}.$$

上式为电路的振荡条件，要注意这是振荡的稳定条件，若要电路产生自激振荡，应要求

$$|M| \geq \left| \frac{CRR_0 + L}{\mu} \right|,$$

否则便不满足自激条件，电路不能振荡。

题 5 灵敏电荷放大器如图 11(a) 所示。已知 $V_o = -GXV_i$ ，理想放大器的输入阻抗

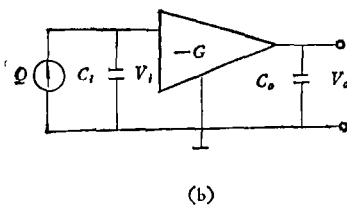
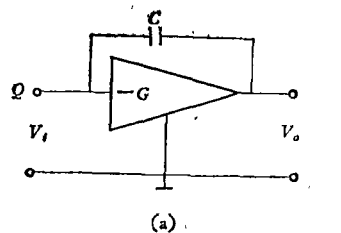


图 11

$Z_1 \gg 1$, 输出阻抗 $Z_o \ll 1$, 求输出电压 V_o 与输入电荷的关系。

解 第一种解法: 根据密勒定理, 跨接于输入和输出端的电容可以等效为图 11(b) 所示的电路, 其中

$$C_1 = (1 + G)C, \quad C_o = \frac{1 + G}{G} C,$$

由于放大器的 $Z_1 \gg 1$, 则输入电压

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{(1 + G)C}.$$

又因放大器的输出阻抗 $Z_o \ll 1$, 所以输出电压

$$V_o = -G \times \frac{Q}{(1 + G)C} = -\frac{Q}{C}.$$

第二种解法: 因为是理想放大器, 所以有

$$V_1 - \frac{Q}{C} = V_o,$$

即

$$-\frac{V_o}{G} - \frac{Q}{C} = V_o,$$

得出

$$V_o = -\frac{\frac{Q}{C}}{1 + G^{-1}} = -\frac{GQ}{(1 + G)C} = -\frac{Q}{C}.$$

题 6 一条 L, C 组成的无限长链低通滤波器如图 12 所示。求此低通滤波器的截止角频率与角频率 $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的关系。

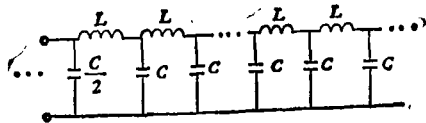


图 12

解 这是一个无耗滤波器的基本问题。根据无耗滤波器的传通条件 $1 + \frac{X_1}{4X_2} = 0$, 对于低通滤波器, $X_1 = \omega L, X_2 = -\frac{1}{\omega C}$, 得到

$$1 - \frac{1}{4} \omega^2 LC = 0,$$

推出截止角频率

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 2\omega_0.$$

题 7 由 L 和 C 组成的半无穷长电网络如图 13 所示, 左边 AB 端开路, 右边为无穷长 LC 级联网络, AB 端加一电压 $V_o \cos \omega t$, 在网络上产生电流, 试计算馈送到网络上的平均功率, 定量地求出在 $\omega > \omega_c$ 和 $\omega < \omega_c$ 两个范围的解。

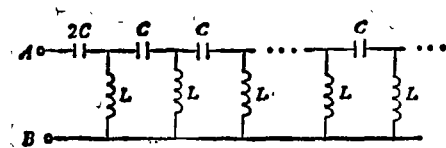


图 13

解 这是一个无耗滤波器的高通滤波器, 由于右边是无穷长链, 相当于匹配负载, 传输到电网络上的功率也就是馈送到 AB 端的功率。 AB 端的阻抗相当于 T 型网络的特性阻抗 Z_{CT} ,

$$Z_{CT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}},$$

Z_{CT} 随角频率的曲线如图 14 所示。当 $\omega > \omega_c$ 时, Z_{CT} 为实数; 当 $\omega < \omega_c$ 时, Z_{CT} 为虚数。因此, 当 $\omega < \omega_c$ 时馈送给网络的平均功率 $\bar{P} = 0$ (电压与电流的相位永远相差 $\pi/2$, 功率总为 0)。当 $\omega > \omega_c$ 时,

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{V_{AB}^2}{Z_{CT}} = \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{Z_{CT}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}. \end{aligned}$$

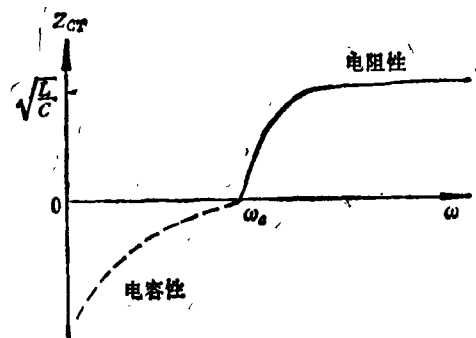


图 14

题 8 把上题图 13 中的 $2C$ 改为 C , 重作上题。

解 第一种解法: 当把 $2C$ 改为 C 后, 电路的阻抗相当于

$$Z_i = \frac{1}{j\omega 2C} + Z_{cT}$$

$$= \frac{1}{2j\omega C} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right),$$

这里 Z_i 是复数, 当输入端所加电压 $V = \text{Re } V_0 e^{-j\omega t}$, 流入端口的电流 $I = \text{Re } I_0 e^{j\omega t}$, 其中 V_0, I_0 为复数。这时, 加在 Z_i 上的平均功率

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \{ \text{Re } V_0 \text{Re } I_0 + \text{Im } V_0 \text{Im } I_0 \}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re } V_0^* I_0.$$

当 $Z_i = V/I$ 时, 有

$$\bar{P} = \frac{1}{2} |V_0|^2 \text{Re } \frac{1}{Z_i}.$$

当 $\omega < \omega_c$ 时,

$$\text{Re } Z_i = 0, \quad \text{Re } \frac{1}{Z_i} = 0, \quad \bar{P} = 0.$$

当 $\omega > \omega_c$ 时,

$$\text{Re } \frac{1}{Z_i} = \frac{2\omega C \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

$$\doteq \frac{1}{2\omega L} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1},$$

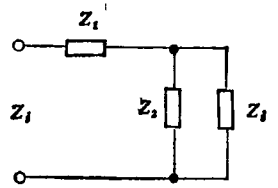


图 15

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{1}{2\omega L} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}.$$

第二种解法: 把电路化为如图 15 所示的等效电路, 则有

$$Z_i = Z_1 + \frac{1}{1/Z_2 + 1/Z_1},$$

其中

$$Z_1 = 1/j\omega C, \quad Z_2 = j\omega L.$$

解出

$$Z_i = \frac{Z_1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4Z_2}{Z_1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j\omega C} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right\},$$

其中

$$\omega_c^2 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

同样得到上面的结果。

新实验技术在材料研究中的应用讲座

第十一讲 Auger 谱仪和扫描 Auger 谱仪在材料研究中的应用

崔国文 周志刚

(清华大学化学与化学工程系)

七十年代初发展起来的微区分析新技术——Auger 谱仪 (AES) 及扫描 Auger 谱仪 (SAM) 在材料研究中的应用愈来愈受到人们

物理

的重视。

长期以来, Auger 效应^[1]未能找到实际应用。直至 1953 年才由 Lander^[2] 提出了可在超