物理学史和物理学家

波导理论的奠基人瑞利

黄 志 洵

（中国计量科学研究院）

瑞利（Lord Rayleigh，1842—1919）原名 John William Strutt，英国物理学家，曾在剑桥大学的三一学院从事教学，1879 年成为该院的实验物理教授，1887 年任皇家研究院的自然哲学教授，1908 年任剑桥大学校长[1].

瑞利在物理学上有多方面的贡献，例如 1893 年发现氩，为此获 1904 年诺贝尔物理学奖；关于由媒质不均匀性和起伏造成的光的散射，瑞利的研究最早[2]；他发现波长短的光线散射较多，据此可解释气体和液体的颜色(例如天空、海洋为何呈蔚蓝色)．他在 1877—1878 年间发表了《声学原理》一书，在当时是公认的名著．他还从事过电的绝对单位的研究．正象那个时代的许多大师一样，瑞利知识渊博、著作内容深刻，有很强的预见性.

瑞利还建立了早期的波导理论．也就是说，早在十九世纪末他就解决了波导的可能性及其基本理论问题，虽然那时还没有“波导”一词．由于这方面的情况鲜为人知，本文即重点地加以介绍.

一、波导理论出现的历史背景[3]

瑞利之所以能预见波导这一事物的必然性，并于 1897 年提出其数学理论，不是偶然的，其背景在于数学物理方法已经过一百多年的发展．我们知道，二阶偏微分方程比一阶偏微分方程先受人们注意，这是因为物理学更直接地引出了前者．二阶、一维的波方程很早就提出了．1727 年，J. 伯努利针对乐器(如提琴)的弦振动问题的工作，经过 1746 年达朗伯和欧拉的工作，对于 $y=f(x,t)$，就有[1)]

$$\partial^2 y/\partial t^2 = a^2(\partial^2 y/\partial x^2),$$

而达朗伯得到，每个解都是 $(at+x)$ 的函数与 $(at-x)$ 的函数之和．1753 年，J. 伯努利提出：多个模式能同时存在，使运动弦发出许多谐音．此外，另一位 D 伯努利在 1732 年有了“分离变数法”的观念；而在 1770 年达朗伯则明确地令

$$y = h(t)g(x),$$

并用以解偏微分方程.

1759年欧拉研究了矩形鼓(尺寸 $a\times b$)的膜振动，他得到二维波方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

z 代表鼓面的垂直位移，x，y 代表鼓面任意点的坐标．上式的解为

$$\psi = \sin[(\beta x/a)+d]\sin[(\gamma y/b)+e],$$

式中几个常数之间有如下的关系：

$$(\omega/c)^2=(\beta/a)^2+(\gamma/b)^2,$$

这里 $\omega=2\pi f$，f 是振动频率．如果边界固定，则 $\beta=m\pi$，$\gamma=n\pi$，故得

$$f=(c/2)\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}.$$

此外，欧拉还研究了圆形鼓，独创性地采用圆柱坐标，并引出贝塞耳方程．这些工作均与后来的波导理论有关.

三维波方程的形式是：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

这个十八世纪提出的方程在十九世纪得到了许多应用．自 1808 年起，泊松研究了它的解，于 1818 年发表了重要论文[4].

1) x, y, z 代表空间坐标，t 是时间，下同.

更重要的进展是在稳态、简谐波问题上.假定

$$u = U(x, y, z)e^{j\omega t},$$

代入波方程,即得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \omega^2 U = 0.$$

这是简化波方程. 此式是亥姆霍兹 1860 年在关于空气在风琴管(一端开口)中振荡的论文中提出的[5],故后人称为亥姆霍兹方程.

然后是麦克斯韦在 1865 年提出位移电流概念及电磁场方程组[6],并且他把电磁波传播定律公式化[7]. 1893 年亥维赛 (Heaviside) 用矢量微分形式重新写出麦克斯韦方程组[8],成为近代所用的形式. 上述一切成为早期波导理论出现的历史背景.

二、汤姆孙和拉摩尔的工作

1893 年,亥维赛的书《电磁理论》出版[8]. 他在该书第一卷中写道: "我们不能使电磁波象光束那样沿着一根管子的内部传输". 他认为管子里必须有内导体,因而他实际上只肯定了象同轴线那样的结构,而否定了波导在原理上的可能性. 亥维赛显然是错误的.

但在同一年却出现了相反的观点. 电子的发现人汤姆孙在他 1893 年发表的《电磁学的新进展》[9] 一书中,不但肯定了电磁波沿圆管子(即圆波导)传输的可能性,而且在数学上进行了推导. 在管内介质中,汤姆孙一开始取磁感应分量 R 满足下述微分方程:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2R}{dy^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2R}{dt^2},$$

v 是电动作用经过介质的传播速度.

对于内半径为 r 的圆管子,在圆柱坐标(r, ϕ, z)下,汤姆孙指出,在介质中,R 满足的微分方程为

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + R\left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0,$$

其解为

$$R = A\cos m\phi \cdot J_m\left(\frac{\omega}{v}r\right)e^{j\omega t},$$

J_m 是 m 阶贝塞耳函数. 当他考虑"与 r 垂直的电动强度"时,它与 dR/dr 成比例,这时引出 $J'_m\left(\frac{\omega}{v}r\right)$; 在近似条件下,有:

$$J'_m\left(\frac{\omega}{v}r\right) = 0,$$

这与近代理论中理想导电壁圆波导内磁模所满足的条件一致. 汤姆孙指出,$m = 1$ 时的"最大周期"由下式决定:

$$(\omega/v)r = 1.841,$$

或者说波长是 $(0.543 \times 2\pi r)$,超过管子圆周长之半. 用现在的话说,这是给出了 $\boldsymbol{H}_{11}$ 模的截止条件.

此外,他根据导体内满足的微分方程,写出导体内 R 的解为

$$R = B\cos m\phi \cdot H_m(jnr)e^{j\omega t}.$$

然后,根据圆管子内表面交界处的连续性条件,导出了一个特征方程;这使我们有理由认为,汤姆孙最早处理了有限导电壁情况.

尽管汤姆孙的预见性令人叹服,然而,四年后出现的瑞利理论却更具完整性. 在后者手中,一切都更为详尽. 指出下面的情况是有趣的: 两位科学巨匠之间保持着诚挚的友谊,都获得过诺贝尔物理学奖.

1894 年拉摩尔发表论文[10],把今天的波导称为容电器或柱式容电器,讨论了波在其中的传播. 他用所谓流函数 (stream function)ϕ 作为分析的工具,讨论了两种结构(矩形截面、圆形截面),分析时都运用了边界条件. 关于矩形截面的结构,他把二维直角坐标 (x, y) 的原点取在矩形的左下角,从而给数学分析带来了方便. 关于圆柱式结构,他指出沿周向、轴向存在"驻波式振动",并指出使用贝塞耳方程的必然性. …瑞利有可能受到过拉摩尔的启发. 然而,拉摩尔的分析不够具体、详尽,也缺乏物理观念上的坚定性,因而无法和瑞利的贡献相比.

三、瑞利波导理论的主要内容和意义

现在着重介绍瑞利的工作. 当他 17 岁时,

恰是欧拉解二维波方程的论文发表100周年，泊松解三维波方程的论文发表41周年。在十九世纪欧洲良好的学术气氛下，瑞利成长起来，广泛地从事研究。他在《声学原理》一书中分析了空柱体中气体的二维振动，并注意到1876年出现的论固体圆柱的振动的论文．1897年，他发表了题为"论电波通过管子、或介质柱体的振动"的文章[11]；而"物化"了的成果(波导)直至1936年才出现[12]. Введенский 和 Аренберг[13]评论说："瑞利的论文是具有理想导电壁的无限长波导的理论．…他指出了实现各种不同波型的可能性，并引人了截止波长的概念，即沿给定形状和尺寸的管子通过某种波的可能性受到限制的问题．…近代的波导理论在原则上并没有得出瑞利理论里所没有的新原理和方法".这个评价是很高的．笔者则觉得，阅读瑞利于1897年发表的这篇论文是令人激动的！该文全是数学处理，共有51个编了号的公式．正是由于他遵循了严密的数学逻辑，才使论文具有长久的价值，并放出光采．

在"管子"内的介质中，瑞利一开始取电动强度的分量P，Q，R和磁感应的分量a，b，c满足下列微分方程：

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{d^2R}{dz^2}=\frac{1}{v^2}\frac{d^2R}{dt^2}, \qquad (1)$$

并且明确指出v是光速．由下述假定：

$$d^2R/dz^2=-m^2R,$$
$$d^2R/dt^2=-p^2R,$$

得到方程

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+k^2R=0. \qquad (2)$$

式中

$$k^2=(p^2/v^2)-m^2. \qquad (3)$$

在这里瑞利假定激励的(即电磁波的)"振动"正比于 $e^{i(mz+pt)}$.

按照近代的符号，$p\to\omega$，$m\to j\gamma$，$k\to h$，$v\to c$；"电动强度"即电场强度，P，Q，R即E_x，E_y，E_z；"磁感应"即磁场强度，a，b，c即H_x，H_y，H_z．因此，(2)式实际上是：

$$\frac{\partial^2E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}+h^2E_z=0, \qquad (4)$$

用偏微分号更确切些．h是本征值，也叫截止系数．

出发点是对的，而且

$$e^{i(mz+pt)}\to e^{i(j\gamma z+\omega t)}=e^{j\omega t}e^{-\gamma z}.$$

此即时间相位因子，γ是传播常数($\gamma=\alpha+j\beta$)，故有：

$$h^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\gamma^2=k_0^2+\gamma^2, \qquad (5)$$

c是真空中光速．

瑞利写道："假如k^2的最小可能值超过p^2/v^2，m必须是虚数；这就可以说没有一定频率的周期波能沿空柱传播"．

这就是说，$h^2>k_0^2$时m为虚数．现在我们知道，$h^2>k_0^2$意味着$\lambda_c<\lambda(f_c>f)$，即截止区1)．在这区域里，理想导电壁波导$\gamma=\alpha$(实数)，因而$m=j\alpha$(虚数)．可见，由于瑞利的思维遵循了严格的数学逻辑，他最早指出了理想导电壁截止波导的本质(没有波能沿波导传播)．至于汤姆孙则未指出过波导存在着截止现象．

大家知道，波导的最基本形态有二：矩形波导、圆波导．这两种形态都由瑞利作了透彻的讨论(两种截面的"空柱"中的电磁振动)，分析结果十分正确．他认为，矩形空柱是最简单的；如对其横截面坐标取$x=0$，a和$y=0$，b，则可写出下述公式：

$$R=\sin(\mu\pi x/a)\sin(\nu\pi y/b)e^{i(mz+pt)},$$
$$k^2=\pi^2[(\mu^2/a^2)+(\nu^2/b^2)],$$
$$m^2=(p^2/v^2)-\pi^2[(\mu^2/a^2)+(\nu^2/b^2)].$$

μ，ν是正整数，对应近代习惯的m，n．用现在的符号，以上各式为

$$E_z=\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)e^{j\omega t-\gamma z}, \qquad (6)$$
$$h^2=\pi^2[(m^2/a^2)+(n^2/b^2)], \qquad (7)$$
$$-\gamma^2=(\omega/c)^2-\pi^2[(m^2/a^2)+(n^2/b^2)]) \qquad (8)$$

因此瑞利是完全正确的．

瑞利认为，第一类振动的周期波沿空柱传播的最低频率由下式决定：

1) f，λ分别为工作频率和工作波长；f_c，λ_c分别为波导的截止频率和截止波长．

$$p^2/v^2=(\pi^2/a^2)+(\pi^2/b^2).$$

这里他实际取 $m=n=1$，用近代的语言讲，这是决定电波 $\boldsymbol{E}_{11}$ 模截止频率的公式：

$$(\omega/c)^2=(\pi^2/a^2)+(\pi^2/b^2). \qquad (9)$$

瑞利所谓"第一类振动"即电波（$\boldsymbol{E}$ 波），"第二类振动"即磁波（$\boldsymbol{H}$ 波）．对后者有：

$$H_z=\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)e^{j\omega t-\gamma z}. \qquad (10)$$

因此，虽然汤姆孙没有模式分析的概念，瑞利却用两类振动的说法从数学上区分了电波和磁波．对于磁波，k^2（即 h^2）的表达式与(7)式相同，这里不再写出．

瑞利指出，若 $a>b$，"第二类振动 k 的最小值相应于 $\mu=1$、$\nu=0$"．这就是说，若 $a>b$，$\boldsymbol{H}$ 波的 h 的最小值相应于 $m=1$、$n=0$，即 $\boldsymbol{H}_{10}$ 模．因此，他解决了矩形波导中的主模是什么的问题，并给出一组表达式(略去指数因子)：

$$\left.\begin{array}{l} E_x=0,\ E_y=-(j\omega/h)\sin hx,\ E_z=0 \\ H_x=(\gamma/h)\sin hx,\ H_y=0,\ H_z=\cos hx \end{array}\right\} \qquad (11)$$

这是 $\boldsymbol{H}_{10}$ 模的场方程组，其中只有 E_y, H_x, H_z 三个场分量不为零．$E_z=0$ 的事实使我们称之为磁波，即横电波．大家知道，本世纪三十年代末英、美开始发展微波雷达，常用矩形波导中 $\boldsymbol{H}_{10}$ 模传输微波．而这种模式在数十年前就由瑞利预见到了．

为了简单起见，以下关于瑞利的圆波导理论的叙述全用近代符号进行．瑞利取圆柱坐标系 r, ϕ, z，z 轴与圆截面"空柱"的几何中轴线平行．r 也用来表示圆波导的内半径．对于第一类振动（$\boldsymbol{E}$ 波），瑞利给出：

$$E_z=J_m(hr)\cos m\phi. \qquad (12)$$

h 值满足下述边界条件：

$$J_m(hr)=0. \qquad (13)$$

显然，当 $m=0$，得

$$E_z=J_0(hr), \qquad (14)$$

并且在 $m=0$ 时电场强度的周向分量为零．他正确地指出，这类振动的 h 的最小值属于 $m=0$ 系列，满足下式：

$$hr=2.404. \qquad (15)$$

我们知道，这对应近代理论中的 $\boldsymbol{E}_{01}$ 模．

对于第二类振动（$\boldsymbol{H}$ 波），他给出：

$$E_z=0, H_z=J_m(hr)\cos m\phi. \qquad (16)$$

h 满足下述的边界条件：

$$J'_m(hr)=0. \qquad (17)$$

这类振动的 h 的最小值属于 $m=1$ 系列，满足下式：

$$hr=1.841. \qquad (18)$$

这对应近代理论中的 $\boldsymbol{H}_{11}$ 模．

瑞利的立足点是高的，他先有一个总概念，然后再应用于两种截面的结构．这两种结构近几十年来被广泛应用于物理学、电子学、计量学等处，它们都来源于瑞利的科学（实际是数学）的"设计"．因此，完全有理由把一批基本公式，即本文的(5)，(6)，(7)，(8)，(9)，(11)、(13)，(15)等式，称之为瑞利公式，以纪念这位继麦克斯韦、赫兹、汤姆孙、亥姆霍兹之后对电磁理论作出了重大贡献的物理学家．

如上所述，汤姆孙没有讨论过矩形结构(矩形波导)，是又一弱点．总括几个方面，可以说瑞利比汤姆孙前进了一大步．瑞利的不足之处是从未导出过特征方程，亦即从未考虑过非理想导电壁的情况，因而在这方面仍由汤姆孙保有优先权．

本文中所提到的早期文献是黄志潜同志及美国威斯康星大学的罗白兰女士（Mrs. Barbara Rust）协助寻找的，在此表示深切的谢意！

参 考 文 献

[1] A. V. Howard, Dictionary of Scientists, Chambers Ltd, (1961), London & Edinburgh.
[2] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, 12 (1881), 81; 47 (1899), 377.
[3] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Press, (1972), New York.
[4] S. D. Poisson, Mèm. de l'Acad. des Sci:, Paris, (2), 3 (1818), 121—176.
[5] H. von Helmholtz, *Jour. für Math.*, 57 (1860), 1—72.
[6] J. C. Maxwell, *Phil. Trans.*, 155 (1865), 459—512.
[7] J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, (1873).
[8] O. Heaviside, Electromagnetic Theory, Vol. I,

(下转第 236 页)