

重整化群和临界现象*

Kenneth G. Wilson

(美国康奈尔大学)

一、引言

本文分三部分。第一部分简述重整化群基本思想及应用于临界现象的 ϵ 展开,这部分大体上是来源于作者1972年的一篇综述文章。第二部分是其所记得的一个历史性记叙,然后逐渐转到1971—1972年论述重整化群的文章,最后综述一下1971年以来的某些发展及对未来的估计。

二、多种长度标度及重整化群

科学中有一些问题具有共同的特征,即复杂的微观行为支配着宏观效应。

在简单的情况下,当考虑较大标度时,微观涨落被平均掉,平均值满足经典连续性方程。流体力学是这方面的一个典型例子。在这个例子中,原子涨落被平均掉,导致经典流体力学方程。遗憾的是,存在一类更困难的问题,涨落达到宏观波长,因而所有中间长度的标度都变得非常重要。

属于后一类型的问题有:发达湍流、临界现象和基本粒子物理。非磁金属中的磁性杂质(Kondo问题)也属这一类。

当大气中有发达湍流时,整个气体环流变成不稳定,在几千英里的尺度上形成涡旋。这些涡旋破裂,形成更小的涡旋,再依次破裂下去,直到低至几毫米的所有长度标度的混沌运动激发起来为止。在几毫米的尺度上,粘滞性使湍流涨落衰减,因而一直到原子尺度时,更小的标度才显出其重要性。

在量子场论中,“基本”粒子(如电子、光子、

质子和中子)在低至零的所有大小标度上都具有复合内部结构。至少这是量子场论的预言。对这种小距离结构进行观察非常困难,然而,实验物理学家测出的粒子散射截面必须用量子场论来加以解释。没有在理论中出现的内部结构,量子场论的预言便不会与实验符合。

临界点是相变的特例。比如,观察液-汽相变。假如水和蒸汽在某种压强下总处于沸腾温度,在临界点——218个大气压和374℃——水和蒸汽之间的差别消失,整个沸腾现象也消失。水和蒸汽之间的主要不同点是它们具有不同的密度。当压强和温度趋近于临界值时,水和蒸汽之间的密度差变为零。在临界点,汽泡和水滴在宏观、可见和低至原子尺寸的所有大小标度上相互混杂。远离临界点时,表面张力使水滴和汽泡变为不稳定,但在临界点水和蒸汽变得不可分辨,这时两相之间的表面张力就变为零。特别是接近微米尺寸的水滴和汽泡引起强烈的光散射,水和蒸汽变为乳白状,这称为“临界乳光”。

在Kondo效应中,金属导带中的具有各种波长(从原子波长直至非常大尺度的所有波长)的电子都跟金属中的杂质磁矩相互作用。

理论家们对这些问题感到棘手,因为它们包含许多互相耦合的自由度。在临界点附近要用许多变数来描写湍流或流体的状态。当处理只含一个变数的函数时,解析方法是最有效的。某些特别精巧的变换已经有可能使上面提到的

* 这是 K. G. Wilson 1982 年 12 月 8 日在 1982 年诺贝尔物理学奖授奖大会上的讲演,发表在 *Rev. Mod. Phys.*, 55-3 (1983) 583—600. 译文删去了第四节(“IV. 1971 年以后的结果”)及参考文献。有兴趣的读者可参阅原文及本刊 9(1980), 376, 472, 545 郝柏林, 于渌的文章。

问题中的某些特殊情形用独立自由度写出来，以致可以解析地求解。这些特殊例子包括二维 Ising 模型的 Onsager 解，Kondo 问题的 Andrei 和 Wiegmann 解。量子场论中 Thirring 模型解及无相互作用量子场论的简单解。然而这些仅仅是特殊情况。整个发达湍流问题，临界现象的许多问题以及实际上所有强耦合量子场至今仍使解析技术遭受挫折。

计算机扩大了理论家的能力，但数值计算中实际所用的自由度数目也是有限的。正常的数值积分方法超过 5—10 个积分变数便失效了。同样，偏微分方程当超过三个左右独立变数时也变得特别困难。Monte Carlo 和统计平均方法可处理几千个甚至百万个变数情况，但是这些方法相对所用计算时间来说收敛得太慢，因而不断地引起非难。模拟一个包含所有长度标度的大气流需要一个间距为毫米的格子，水平方向长达几千英里，垂直方向长达几十英里，格点总数达 10^{23} 数量级，这远远地超出了任何现有和未来的计算机的能力。

“重整化群”是处理包含多种长度标度问题的一种方法。它一步一步地处理问题，每种长度标度作为一步。对于临界现象，技术上的问题是对所有大小标度的热涨落进行统计平均。重整化群近似就是依次积分掉涨落，从原子标度的涨落，然后依次移到更大标度的涨落，直到所有标度的涨落都积分掉为止。

为了描述重整化群思想，下面更详细地来讨论临界现象。首先描述朗道的平均场理论，并提出一些重要问题。重整化群将作为对朗道理论的一种改进来加以阐述。

铁磁居里点可作为临界点的特例。在居里温度以下，理想铁磁体在无外磁场时显示出自发磁化，自发磁化强度的方向与磁体的历史有关。在居里温度 T_c 以上，没有自发磁化。图 1 表示自发磁化强度对温度的典型关系。略低于居里温度时，磁化强度的行为如 $(T_c - T)^\beta$ ，这里 β 是一个指数，在三维情况下 β 接近 1/3。

磁性在原子层次中是由具有磁矩的未配对电子引起的，在铁磁体中，一对相邻的电子当它

们的磁矩同向排列时具有较低的能量，而磁矩

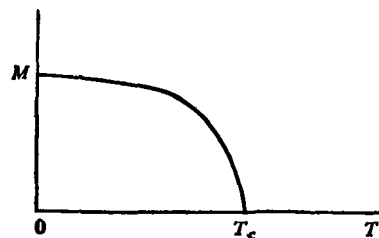


图 1

不同向排列时能量较高。在高温下热涨落妨碍磁的有序排列。当温度降低趋向居里温度时，一个磁矩的取向引起很大范围内的磁矩形成整齐排列，这个距离叫关联长度 ξ 。在居里点，关联长度变为无穷大，标志着整个系统开始了一种最佳排列。略高于 T_c ，关联长度的行为如 $(T - T_c)^{-\nu}$ ，这里 ν 在三维情况下大约为 2/3。

铁磁体的简单统计力学用一个哈密顿量来描写，它包含对最近邻磁矩的取和，每对磁矩对在同向和反向排列时具有不同能量。在最简情形下，磁矩沿一个固定空间轴只取正值和负值，这就是 Ising 模型。

为确定该模型的性质，形式上的手续是计算配分函数 Z ， Z 代表对玻耳兹曼因子 $\exp(-H/kT)$ 的取和(遍及所有磁矩位形)，这里 k 是玻耳兹曼常数。自由能正比于 Z 的对数的负值。

在 T_c 附近(实际上除 $T = 0$ 外)，玻耳兹曼因子 $\exp(-H/kT)$ 是 T 的解析函数。解析函数之和也是解析函数。因而令人迷惑不解的是，磁体(包括 Ising 模型)在 $T = T_c$ 时怎么会出非解析性呢？实际上，真正的非解析行为仅仅出现在无限大铁磁体的热力学极限下。在此极限下，有无穷多种磁矩位形，但却不存在普适的解析定理来处理此时出现的无穷和。然而人们难于理解的是：即使是一个无穷和，又怎么能产生高度非解析的行为呢？因此一个严重的挑战摆在人们面前——究竟非解析性是怎样产生的？

朗道 1937 年提出：如果只考虑具有给定

磁化强度密度 M 的位形, 那么自由能对 M 是解析的. 对小的 M 值, 根据解析性假定, 自由能的形式(到 M 的四级项)可写为

$$F = V(RM^2 + UM^4), \quad (1)$$

这里 V 是磁体的体积, R 和 U 是与温度有关的常数. 式中略去了一个与 M 无关的常数项. 不存在外磁场时, 自由能不可能与 M 的符号有关, 因而式中仅含 M 的偶次幂. 真实的自由能在 M 的各种可能值中取使 F 最小的值. 在朗道理论中, R 在临界温度上为零; U 必为正值, 以便使 F 的最小值出现在 $M = 0$ 处. 如果 R 为正, F 的最小值仍然在 $M = 0$ 处, 这相当于临界温度以上情形. 如果 R 为负值, 则 F 的最小值出现在非零 M 处, 即 M 值满足下列方程:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial M} = (2RM + 4UM^3)V \quad (2)$$

或

$$M = \sqrt{-R/(2U)}. \quad (3)$$

这相当低于临界温度的情形.

根据自由能对 M 应为解析的这一要求, 朗道提出了对 T 的解析性假定: R 和 U 是 T 的解析函数. 在 T_c 附近, 在一级近似下, 要求 U 是一个常数, 而 R (在 T_c 时为零) 则正比于 $(T - T_c)$. (假定 dk/dT 在 T_c 处不为零). 因而在 T_c 以下, 磁化强度的行为如

$$M \propto (T_c - T)^{1/2}, \quad (4)$$

这相当于指数 $\beta = 1/2$, 这个结果跟实验和理论值 (β 约为 $1/3$) 不符.

朗道的理论对磁化强度是空间缓变函数的情况也是成立的. 在此情况下, 自由能取朗道-金茨堡形式:

$$F = \int d^3x \{ [\nabla M(x)]^2 + RM^2(x) + UM^4(x) - B(x)M(x) \}, \quad (5)$$

这里 $B(x)$ 是外磁场, 梯度项是一个展开式的首项, 该展开式包含任意多个梯度和 M 的任意高次幂. 对缓变场 $M(x)$, 梯度的高次幂很小, 可以忽略. (正常情况下, $\nabla M^2(x)$ 项有一个常系数, 本文中该系数已任意地取作 1). 这种广义自由能的一个用途是计算高于 T_c 的关联

长度 ξ . 为此, 令 $B(x)$ 是局限在 $x = 0$ 处的一个非常小范围的 δ 函数, F 中的含 U 项可忽略, 因而造成 F 取最小值的磁化强度满足下列方程:

$$-\nabla^2 M(x) + RM(x) = B\delta^3(x). \quad (6)$$

$M(x)$ 的解为

$$M(x) \propto B e^{-\sqrt{R}|x|}/|x|, \quad (7)$$

因而关联长度可写作:

$$\xi \propto 1/\sqrt{R}. \quad (8)$$

这预示着, 在 T_c 附近 ξ 具有如 $(T - T_c)^{-1/2}$ 的行为, 这个结果再次跟实验和理论值不符.

朗道理论隐含着下列假定: 由于所有空间涨落均已平均掉, 因而解析性成立. 只是当对平均磁化强度 M 的各种值做平均时, 才失去解析性. 这里谈的是对 $e^{-F/kT}$ 求平均, 这种平均导致 F 对 M 必定取最小值的法则, 因而必定得到非解析的公式(4). 准确地说, 如果磁体的体积是有限的, 则 $e^{-F/kT}$ 必须对 M 积分, 从而产生解析结果; 仅仅在 $V \rightarrow \infty$ 的热力学极限下, $e^{-F/kT}$ 的平均才用 F 对于 M 最小化来获得, 从而出现方程(4)的非解析性.

朗道理论具有同流体力学一样的物理动机. 朗道假定: 仅仅原子标度的涨落才重要. 一旦这些涨落被平均掉, $M(x)$ 就变为一个连续函数, 它仅仅在对来自外界的与空间有关的刺激发生响应时才出现涨落. 因此 $M(x)$ (当它为常数时写作 M) 由一个简单的经典方程决定, 在临界点附近, 关联函数本身是经典方程(6)的解.

在一个大于四维的世界中, 朗道图象是正确的. 四维是一条分界线——低于它, 所有标度(直至达到关联长度)的涨落都很重要, 因而朗道理论失效(以下将证实这一点). 金茨堡早期给出的一个判据也预言四维是分界线.

在四维附近, 长波涨落的作用很容易理解, 它们的影响极小. 我们在此只讨论这种情况. 我们将只考虑比原子标度长的波长的影响, 并假定只需对朗道理论做适当的修正. 更仔细的讨论可参看 Wilson 和 Kogut 的文章(1974).

一旦原子标度的涨落被平均掉,磁化强度 $M(x)$ 就像在朗道理论中那样变为一个连续函数. 然而,长波涨落仍然出现在 $M(x)$ 中,它们并未被平均掉,因而必须小心地来写 $M(x)$ 的公式. 为明确起来,假定波长 $< 2\pi L$ 的涨落已经平均掉,这里 L 是一个略大于原子线度的长度. 因而 $M(x)$ 只能含波长 $> 2\pi L$ 的傅里叶模. 按此要求可写成:

$$M(x) = \int_k e^{ik \cdot x} M_k, \quad (9)$$

这里对 k 的积分符号是指 $(2\pi)^{-d} \int d^d k$, d 是空间维数,积分只限于所有 $|k| < L^{-1}$ 的值.

现在,对长波涨落的平均归结为对变数 M_k 的积分(对所有 $|k| < L^{-1}$ 的 M_k). 有大量这样的变数;通常要进行许多耦合积分,这是一项没有希望完成的任务. 下面将做大量的简化,以便能够实现这些积分.

这些积分需要一个被积函数. 这个被积函数是对所有原子位形的玻耳兹曼因子的约束和. 约束条件是所有 $|k| < L^{-1}$ 的 M_k 保持固定,这是朗道理论中约束和的一种推广. 差别在于,朗道理论中仅仅平均磁化强度保持固定. 类似于朗道理论,约束和的结果可写成 e^{-F} , 这里为方便起见,把 $e^{-F/kT}$ 改写为 e^{-F} (将 $1/kT$ 吸收到 F 中去). 指数 F 依赖于方程(9)中的磁化强度函数 $M(x)$. 我们假定,朗道分析对 F 仍成立,即 F 仍由方程(5)决定. 然而,长波涨落的重要性意味着参数 R 和 U 依赖于 L , 因此在没有外场的情况下, F 应表示为 F_L :

$$F_L = \int d^d x [(\nabla M)^2(x) + R_L M^2(x) + U_L M^4(x)], \quad (10)$$

在这里的简化分析中, $\nabla M^2(x)$ 的系数没有改变,仍为 1. 这些假定将在后面加以评述.

R_L 和 U_L 对 L 的依赖关系将在以后确定. 然而,解析性在临界点的破坏是它们依赖 L 的直接结果. 对 L 的依赖性只保持到关联长度 ξ 以内,因为以后会看到,波长 $> \xi$ 的涨落可以忽略. $L \sim \xi$ 的所有波长的涨落一经被积分掉,便可使用朗道理论. 粗略地说,这意味着将

R_ξ 和 U_ξ 代入自发磁化强度和关联长度的方程(4)和(8)中. 由于在 T_c 点, ξ 本身对 T 是非解析的,因而在临界点, R_ξ 和 U_ξ 对 ξ 的依赖性引起新的复杂关系. 稍后将详细讨论这点.

为了讨论涨落的影响,我们只来考虑一个单一的波长标度,这是重整化群方法的基本步骤. 为明确起见,仅考虑波长处于无穷小间隔 L 到 $L + \delta L$ 之间的涨落. 为了对这些涨落进行平均,我们从玻耳兹曼因子 e^{-F_L} 出发, [这里 L 到 $L + \delta L$ 之间的波长仍然出现在 $M(x)$ 中], 然后对 $M(x)$ 内波长为 L 到 $L + \delta L$ 的涨落进行平均. 涨落平均的结果产生自由能 $F_{L+\delta L}$, 它仅仅是波长大于 $L + \delta L$ 的磁化强度 $M_H(x)$ 的函数, $M_H(x)$ 的傅里叶分量和 $M(x)$ 中的 M_k 相同,但现在 $|k| < 1/(L + \delta L)$.

下一步是计算 $|k|$ 处于 $1/L$ 和 $1/(L + \delta L)$ 之间的积分变数 M_k 的数目. 为此必须考虑体积为 V 的一个有限体系. 在此系统中波长处于 $2\pi L$ 和 $2\pi(L + \delta L)$ 之间的自由度数目由相应的相体积给出,即用 k 空间体积与实空间体积之积给出. 这个乘积(除去常数因子 π 等)为 $L^{-(d+1)} V \delta L$.

为方便起见,不选 M_k 本身而选它们的线性组合作为积分变数. 这些线性组合相当于定域的波包而不是平面波. 也就是说,差 $M_H(x) - M(x)$ 应按波包函数 $\phi_n(x)$ 的集合来进行展开,每个函数仅含 $1/L$ 到 $1/(L + \delta L)$ 之间的动量,但在 x 空间则尽可能定域化. 由于每个函数 $\phi_n(x)$ 按测不准原理必须填满相空间单位体积,因而每个 $\phi_n(x)$ 的实空间体积为

$$\delta V = L^{d+1} / \delta L, \quad (11)$$

因而便有 $V/\delta V$ 个波函数 $\phi_n(x)$. 我们可写出:

$$M(x) = M_H(x) + \sum_n m_n \phi_n(x), \quad (12)$$

因此待进行的积分是遍及系数 m_n 上的积分.

由于朗道-金茨堡自由能的局域性,我们将假定: 不同波函数 $\phi_n(x)$ 之间的重叠可以忽

略。因而对每个 m_n 的积分可以分别处理, 这里仅讨论一个这样的积分。对这种单个积分, $M(x)$ 可写为

$$M(x) = M_H(x) + m\phi(x), \quad (13)$$

因为这时在 n 个取和中只有一项在波函数 $\phi(x)$ 占据的空间体积内给出贡献。

我们要做的其它简化是, 在 $\phi(x)$ 占据的体积内将 $M_H(x)$ 看作常数。换言之, 在 $M_H(x)$ 中非常长的波长比起接近 L 的波长更加重要。

待进行的计算是

$$e^{-F_{L+\delta L}[M_H]} = \int_{-\infty}^{+\infty} dm e^{-F_L[M_H+m\phi]}, \quad (14)$$

这里 $F_{L+\delta L}$ 和 F_L 只在 $\phi(x)$ 占据的体积上进行积分。展开 $F_L[M_H+m\phi]$ 时, 作下列简化: 首先, 为求 F_L 而对 x 进行积分时, 假定所有 $\phi(x)$ 的线性项积分为零, $\phi(x)$ 的三级项和高级项也都忽略。假定 $\phi(x)$ 是归一化, 即有:

$$\int d^d x \phi^2(x) = 1. \quad (15)$$

由于在 $\phi(x)$ 中波长范围有限, 因而得到

$$\int [\nabla\phi(x)]^2 d^d x \simeq 1/L^2. \quad (16)$$

这些简化的结果是, 使积分变为

$$e^{-F_{L+\delta L}[M_H]} = e^{-F_L[M_H]} \int_{-\infty}^{\infty} dm \exp\{[R_L + (1/L^2)]m^2 + 6U_L M_H^2 m^3\} \quad (17)$$

或

$$\begin{aligned} F_{L+\delta L}[M_H] &= F_L[M_H] + (1/2)\ln[(1/L^2) \\ &\quad + R_L + 6U_L M_H^2]. \end{aligned} \quad (18)$$

必须把对数更新写成在 $\phi(x)$ 占据的体积上的积分。这样当把其它 m_n 积分的贡献也考虑进来时, 这个积分便可延展到整个体积 V 上。同样, 对数也可展成为 M_H 的幂级数, 仅保留 M_H^2 及 M_H^3 两项。进一步再假定 R_L 随 L 缓慢地变化。当 L 等于关联长度 ξ 时, $1/L^2$ 与 R_L 相等(前面已证明), 所以对那些处于原子大小和关联长度之间的 L 值而言, R_L 比 $1/L^2$ 小。将对数展成 $(R_L + 6U_L M_H^2)$ 的幂, 保留到第二级(以便得到 M_H^3 项), 便得到:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{L^2} + R_L + 6U_L M_H^2 \right\} \\ &\quad - \text{与 } M_H \text{ 无关的项} \\ &\quad + (\delta V)(\delta L)L^{-d-1}(3U_L M_H^2 L^2 \\ &\quad - 9U_L^2 M_H^3 L^4 - 3R_L U_L M_H^3 L^4). \end{aligned} \quad (19)$$

可将 δV 写成在体积 δV 上的积分, 因而得到下列方程:

$$R_{L+\delta L} = R_L + (3U_L L^{1-d} - 3R_L U_L L^{3-d})\delta L, \quad (20)$$

$$U_{L+\delta L} = U_L - 9U_L^2 L^{3-d}\delta L, \quad (21)$$

或微分方程:

$$L \frac{dR_L}{dL} = 3L^{2-d}U_L - 3R_L U_L L^{4-d}, \quad (22)$$

$$L \frac{dU_L}{dL} = -9U_L^2 L^{4-d}. \quad (23)$$

这些方程只对 $L < \xi$ 成立。当 $L > \xi$ 时, 对数变换主要是由 R_L 而不是由 $1/L^2$ 产生的, 因而只需对 R_L 或 U_L 作很少一点改变。如果 $d > 4$, 那么对很大的 L 可将 R_L 和 U_L 当作常数, 这正是朗道理论所预期的。如果假定 R_L 和 U_L 是常数(对大 L), 很易看出, (22)和(23)式的积分仅仅给出 L 的负幂。对 $d < 4$, 解不是常数。相反, 对足够大的 L , U_L 的行为是

$$U_L \simeq [(4-d)/9]L^{d-4}. \quad (24)$$

(容易看出它是方程(23)的解), 而 R_L 满足下列方程:

$$\frac{dR_L}{dL} + \frac{(4-d)}{3L} R_L = \frac{(4-d)}{3} L^{-3}, \quad (25)$$

它的解为

$$\begin{aligned} R_L &= cL^{(d-4)/3} - \frac{(4-d)}{3} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2-(4-d)/3} L^{-2}, \end{aligned} \quad (26)$$

这里 c 与 L 的某个初始值处的 R_L 有关。对足够大的 L , L^{-2} 可忽略。

参数 c 对温度应是解析的。实际上, 它正比于 $T - T_c$ 。因而对大 L 有

$$R_L \propto L^{(d-4)/3} (T - T_c). \quad (27)$$

对固定的 L 值, 它对温度是解析的。然而对 ξ 的方程为

$$\xi \propto R_\xi^{-1/2} = (T - T_c)^{-1/2} \xi^{(4-d)/6}. \quad (28)$$

令

$$\varepsilon = 4 - d, \quad (29)$$

则关联长度指数是

$$\nu = (1/2)[1/(1 - \varepsilon/6)], \quad (30)$$

在三维情况下得到 $\nu = 0.6$ 。类似地,在 T_c 以下自发磁化强度具有 $(R_\xi/U_\xi)^{1/2}$ 的形式,由此得到:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{1 - \varepsilon/6}. \quad (31)$$

这些计算给出某种启示,看出怎样才能得到 β 和 ν 的非平庸值。由于作了很大的简化,上面导出的公式是不严格的,但是,至少它们表明 β 和 ν 不一定是 $1/2$, 而且实际上还可能对维数 d 有复杂的依赖关系。

一个正确的处理是非常复杂的。一旦 $M_H(x)$ 不能当作常数,我们可想像将 $M_H(x)$ 在某个值附近展开为泰勒级数,这个值可取波函数 $\psi(x)$ 的中心位置 x_0 , 因而出现 M_H 的梯度项。此外,对数展开中的高级项给出 M_H 的高次幂。所有这些导致自由能泛函 F_L 的一个更复杂的形式,它包含更多梯度项和 M_H 的更高幂。实际上,这种展开为 M_H 的幂及梯度幂的想法可能引起非议。这是因为,涨落具有内禀大小[即根据方程(17)中被积函数的形式,有 $m^2 \sim L^2$], 当存在这些涨落时,我们不可能显而易见地断定 M 很小。由于任何波长的涨落都很重要,因而函数 M 的变化并不足够缓慢,因而就不能证明按梯度展开是正确的。这意味着 $F_L[M]$ 可能是 M 的一个任意复杂的泛函,一个含有几千个参数的难于写出来的表示式,而不是仅含两个参数 R_L 和 U_L 的简单朗道-金茨堡形式。

所幸的是,在四维附近由于 U_L 是个小量(正比于 $\varepsilon = 4 - d$), 使问题得以简化。所有前面略去的复杂性只出现在按 U_L 展开的二级或更高级项中,也就是出现在 ε 的二级项或高级项中。因而这里描述的计算只精确到 ε 级。

1971年建立的重整化群方法包括下列两方面内容,即用来进行实际计算的实用近似和形式表述,在此不可能来讨论完整的形式表述,

但可描述一下“不动点”的中心思想。

每当一种长度的涨落被积分掉以后,便从以前的泛函 F_L 中产生一个新的自由能泛函 $F_{L+\delta L}$ 。这个过程多次地重复。如果 F_L 和 $F_{L+\delta L}$ 用无量纲形式表示出来,便可发现,从 F_L 到 $F_{L+\delta L}$ 的变换是以相同的形式多次重复的,因而这样产生的变换群称为“重整化群”。当 L 变大时,自由能 F_L 趋近于变换的一个不动点,因而变得与系统在原子层次上的细节无关。这样就能解释在原子层次上不同的系统的临界行为的普适性。液-汽相变、磁相变、合金相变等等,在实验上都显示出相同的临界指数。理论上可从下面的假定去理解它:即相同的“不动点”相互作用描述所有这些系统。

为了说明自由能泛函的不动点形式,必须将其写成无量纲形式。长度必须用 L 作单位, M , R_L 及 U_L 必须写为无量纲形式,这些变换可写成

$$x = Ly, \quad (32)$$

$$M(x) = L^{1-d/2} m(y), \quad (33)$$

$$R_L = 1/L^2 r_L, \quad (34)$$

$$U_L = L^{d-4} u_L, \quad (35)$$

$$F_L = \int d^d y [(\nabla m)^2 + r_L m^2(y) + u_L m^4(y)]. \quad (36)$$

无量纲参数 r_L 和 u_L 的渐近解为

$$r_L = cL^{2-\varepsilon/3} - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2 - \varepsilon/3}, \quad (37)$$

$$u_L = \varepsilon/9. \quad (38)$$

除了 r_L 中的 c 项外,这些无量纲参数都与 L 无关,这表明自由能形式也跟 L 无关。 c 项表示不动点的不稳定性,即随着 L 增大对不动点的偏离也增大。仅当热力学系统处于临界温度时才能达到不动点,此时 c 为零。对临界点的任何偏离都是导致不稳定性。

对重整化群的进一步分析,以及它与临界行为的普通想法的关系请参看 Wilson 及 Kogut 1974年的文章。

三、1971年以前的一些历史回顾

第一个描述临界点的是 Van der Waals, 他在一个多世纪以前, 继 Andrews 的实验之后提出了液-汽临界点的描述. 此后在 1907 年 Weiss 提出了磁体居里点的描述. Van der Waals 和 Weiss 的理论均是朗道平均场理论的特殊情况. 甚至还在 1900 年以前, 实验结果就已经显示出与平均场理论不一致; 特别是, 实验指出 β 接近 $1/3$ 而不是 $1/2$. 1944 年 Onsager 发表了二维 Ising 模型的著名解, 它明显地违背平均场理论的预言. 例如, Onsager 得到 $\nu = 1$, 而平均场理论预言 $\nu = 1/2$. 五十年代 Domb, Sykes, Fisher 及其他人, 使用高温级数展开方法研究了临界现象的简单三维模型, 他们作到非常高的级, 用各种外推方法导出临界指数. 他们得到的临界指数与平均场理论不符, 但与实验结果都合理地一致. 整个六十年代主要的实验工作都集中在临界指数方面, 以及更一般地为平均场理论以外的理论研究提供坚实的实验基础. 实验物理学家们, 如 Voronel; Fairbanks, Buckingham, 和 Keller; Heller 和 Benedek; Ho 和 Litster, Kouvel, Rodbell 和 Cemly; Sengers; Lorentzen; Als-Nielsen 和 Dietrich; Birgeneau 和 Shirane; Rice; Chu; Teaney; Moldorer; Wolf 和 Ahlers 等人对此作出了贡献, M. Green, Fisher, Widom 和 Kadanoff 也做了有力的配合. 理论上, Widom 于 1965 年提出了临界点附近状态方程的标度律, 这个标度律容纳各种非平均场指数, 并预言它们之间的关系. 整套标度假说是由 Essam, Fisher, Domb, Hunter, Kadanoff, Patashinshii 和 Pokrovskii 发展起来的. 这里也应参看 Rushbrooke 和 Griffiths 的不等式.

我本人的工作始于量子场论, 而不是统计力学. Bethe, Schwinger, Tomonaga, Feynman, Dyson 和其他人在 1940 年后提出的重整化理论可作为一个适当的出发点. 第一次讨论“重整化群”, 见于 Stueckelberg 和 Petermann 发表于 1953 年的文章. 1954 年 M. Gell-Mann 和 F.

Low 发表了一篇题为《在小距离内的量子电动力学》的文章, 这是 1966 年 Kadanoff 关于临界现象的标度假说的形式出现以前, 对我启发最大的一篇文章.

按照 1930 年由狄喇克、费米、海森伯、泡利、约旦、维格纳等人给出的量子电动力学的定义, 量子电动力学是用 e_0 的微扰级数展开来求解的, e_0 是量子电动力学的“裸电荷”. 量子电动力学的拉氏量 (或哈密顿) 包含两个参数 e_0 和 m_0 , 后者是电子的“裸质量”. 正如引言中所提到的, 量子电动力学中物理电子和光子具有复合结构. 由于这种结构, 使得测量到的电荷 e 和质量 m 并不等于 e_0 和 m_0 , 却可用 e_0 幂的微扰展开来给出, 只是在最低级, 才发现 $e = e_0$ 和 $m = m_0$. 遗憾的是, 在三十年代, 人们发现, 对 e 和 m 的级数的高阶修正都是无限大, 这是因为积分是对动量进行, 在大动量极限 (或小距离) 情况下积分发散.

四十年代后期提出了重整化理论, 该理论证明: 量子电动力学的发散都可消去, 只要将参数作些改变, 把拉氏量中的参数 e_0 和 m_0 改变为可测的量 e 和 m , 同时将出现在拉氏量中的电子和电磁场重新标度, 以保证可观测的矩阵元 (特别是由磁场) 是有限的.

量子电动力学中有多种重新参数化的方案, 它们都能消去发散, 但都使用不同于 e 和 m 的量去代替 e_0 和 m_0 . Stueckelberg 和 Petermann 发现, 可以定义一些联系不同的重新参数化方案的变换群, 他们称这些群为 “groupes de normalization”, 现在译作 “重整化群”. 一年后 (1954 年), Gell-Mann 和 Low 独立地发表了一篇非常深刻的研究文章, 澄清了选择重新参数化方案时的某些含糊不清之点, 同时研究了将各种不同的重新参数化方案联系起来的重整化群. Gell-Mann 和 Low 强调指出, 在经典实验中测量它的 e 是量子电动力学在非常长距离的性质, (比如, 它可以用相距几厘米的小球来测量, 而量子电动力学的自然尺度是电子的康普顿波长 $\sim 10^{-11}$ 厘米). Gell-Mann 和 Low 证明: 可引入另外一族参数 e_λ , 其中的任何一个

均可代替 e 去取代 e_0 。参数 e_1 与任意动量标度 λ 的量子电动力学行为有关，而不与 e 适用时的非常小的动量标度的量子电动力学行为有关。

将 Gell-Mann 和 Low 引入的参数族 e_1 插入到物理电荷 e 和裸电荷 e_0 中间，也就是说， e 是 e_1 的小动量极限 ($\lambda \rightarrow 0$)，而 e_0 是 e_1 的大动量极限 ($\lambda \rightarrow \infty$)。

Gell-Mann 和 Low 发现 e_1^2 遵守下列微分方程：

$$\lambda^2 d(e_1^2)/d(\lambda^2) = \phi(e_1^2, m^2/\lambda^2), \quad (39)$$

这里 ϕ 是一个简单幂级数展开式，它具有不分散的与 λ 无关的系数。实际上，当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时， ϕ 变为仅仅是 e_1^2 的函数。这个方程成了我的重整化群方程[如(22)和(23)式]的先驱。

Gell-Mann 和 Low 的主要发现是，除了微分方程的通常性质外，方程 (39) 的解是非寻常的。实际上，它预言当 e 按 e_0 的幂(或反之)展开的时候，物理电荷 e 会发散。更一般地说，如果 e_1 按 e_1' 的幂展开，则高级系数包含 $\ln(\lambda^2/\lambda'^2)$ 的幂，如果 λ 或 λ' 趋于无穷大，这些系数便发散；如果 λ^2/λ'^2 非常大或非常小，这些系数便变得非常大。

再者，Gell-Mann 和 Low 断定：作为方程 (39) 的结果， e_0 必定具有一个与 e 无关的固定值，这个固定值可能是有限的，也可能是无限的。

当我 1956 年进入加州理工学院研究生院的时候，最有前途的学生都是到基本粒子理论领域去做研究工作，那时 M. Gell-Mann, R. Feynman 和 J. Mathews 都正在这一领域忙碌着。我则反其道而行之，花了一个夏天在通用原子公司工作。那时我为 M. Rosenbluth 进行等离子体物理方面的研究，并和 S. Chandreskhar 进行讨论，那个夏天他也在通用原子公司工作。大约过了一个月以后，我便奉命写出得到的结果。于是我便立志要选择一个研究题目，至少先花 5 年时间去得到一些值得写出来的东西。看来似乎基本粒子理论才能提供达到这一要求的最好前景。于是，我请求 Gell-Mann 给

我一个研究题目。他首先建议我做强相互作用粒子(K 介子等)的弱相互作用问题。几个月之后，我对试图回避强相互作用的根本不了解的性质感到厌烦，因此再次请求他给我一个直接处理强相互作用的问题，因为这才是问题的关键。Gell-Mann 建议我用单介子近似下的 Low 方程去解 K 介子——核子散射问题。由于我对当时解 Low 方程的方法很不满意，所以使用各种方法去求解一个更简单的 π -核子散射问题。不顾单介子近似即使正确也只能用于低能情况，我着手研究高能极限，并发现可以求出“打头对数”的和。这使我回忆起玻戈留博夫和希尔科夫的场论教科书中最奥妙的一章，即重整化群。

1960 年我向加州理工学院提出论文，其中包含一堆希奇的计算。那时我已经是哈佛大学的一个初级研究人员。1962 年我去欧洲原子核中心 (CERN) 工作。在 1960—1963 年期间，我多少追随了一下潮流。那时固定源的介子理论 (Low 方程的基础) 凋落了，而代之以 S 矩阵理论。我又重新想起“长条近似”(1960 年 Ter-Martirosyan 首先提出)，并研究了 Amati-Fubini-Stanghellini 的多重产生理论。在讲习会上我全神贯注地听讲演(在我一生中，只有这个时期我愿意保持清醒的头脑去听讲)，同时逆流而进，回溯诸如固定源介子理论的强耦合近似那样一些问题。

大约在 1963 年，下列情况变得非常明显：我想追求的目标只不过是适用于强相互作用的量子场论。我拒绝了 S 矩阵理论，因为纵使我能写出 S 矩阵理论的方程，它毕竟还是太复杂，作为一个理论未免太不漂亮。与此相反，固定源介子理论的强耦合近似和弱耦合近似的存在，使我相信量子场论可能有意义。谈到强相互作用，我只能说人们能够写出的那些理论，例如，赝标量介子理论，显然都是错误的。没有人有过可能是正确的理论想法。我敢说，甚至也没有人对如何解决强耦合领域内的这些理论问题有过朦胧的见解。

我在量子场论领域中工作的强烈愿望似乎

并未促使我很快发表文章,但我发现,即使我没有发表任何东西,也还能找到工作.因而我并不担心“发表文章否则灭亡”的问题.

在量子场论中只有很少一点问题我能去做,很少的人在这个领域工作,很少问题有待研究.在1963—1966年期间,我不得不抓住一些价值不大的东西.我思考过李-杨的“ ξ 极限”过程,我花了大量精力去反驳 K. Johnson 的主张,他认为可以对任意小的 ϵ_0 去定义量子电动力学,这跟 Gell-Mann 和 Low 的结果背道而驰.我听过 K. Hepp 和其他作者描述他们的公理化场论的结果.我不完全理解他们,但却从中获得某些启发,我觉得应该用位置空间而不是动量空间来思考问题.我把以前做过的大动量费曼图的工作(为了反驳 Johnson 的想法)转到位置空间,并对量子场算符的乘积进行短距离展开.在1964年的一个预印本中,我描述了一组这种展开的规则.我将这篇文章送去发表,审稿人指出 Thirring 模型的解可能有助于解释这种展开.遗憾的是,当我检验完 Thirring 模型后,发现虽则 Thirring 模型确实存在一个短距离展开,但我得到的关于系数函数如何变化的法则在强耦合范围内都是错的.我将预印本抛在一边,期待着重新解决这一问题.

当我是研究生的时候,我曾学过固定源介子理论,后来还继续思考这个问题.我将对某些大动量费曼图的分析应用到固定源模型上.我认识到,如果对固定源模型本身作某些简化,我得到的结果会变得更为清楚.这些简化就是用动量片段代替连续的动量空间.也就是说,除了留下分隔开的动量片段,如 $1 \leq |k| \leq 2, \Lambda \leq |k| \leq 2\Lambda, \Lambda^2 \leq |k| \leq 2\Lambda^2, \dots, \Lambda^n \leq |k| \leq 2\Lambda^n$ 等(Λ 是个大数),其余的动量都抹掉.

这个模型可以用微扰论来解决,它与以前在场论中使用的方法很不相同.每个片段的能量标度非常不同,对第几个片段是 Λ^n 数量级.因此处理问题的自然步骤是:把最大动量片段的哈密顿作为未扰动的哈密顿,而把所有与更低片段相应的项当作微扰.在每一片段,哈密顿都包含自由介子能量项和相互作用项,所以这

种新的微扰法既非弱耦合也非强耦合微扰.

我曾证明,这种微扰法的结果是:倘从 n 动量片段出发,选好第 n 片段的未扰动哈密顿的基态,便能为其余 $n-1$ 个片段得到一个有效哈密顿.这个新哈密顿等同于仅留下 $n-1$ 个片段的原来的哈密顿.此外,介子-核子耦合常数 g 也要作重整化(即进行修正),修正因子包含第 n 片段哈密顿的基态的非平庸矩阵元.

这个工作对我来说是一次真正的突破.我第一次找到了重整化群分析的自然基础:即从问题中解出和消去一个动量标度.当然还有许多问题有待研究,但我不再是抓住一些无价值的问题了.我的重整化思想现在很像1951年 Dyson 对量子电动力学的分析. Dyson 曾阐明,在对量子电动力学实现重整化的时候,应该在解决低能量之前先解决和消除高能量.我仔细地研究过 Dyson 的文章,但未能更多地利用他的工作.

在这个发展过程中,我曾以 ϕ^4 相互作用标量场为例,苦心思考“究竟什么是场论”这个问题(ϕ^4 标量场等同于临界点的朗道-金茨堡模型).整个六十年代中,我经常地教授量子力学,我深深地被人们理解简单量子力学系统的能力所感动.第一步是定性分析,用测不准原理使能量(由哈密顿所定义)最小化;第二步是用由第一步得到的定性信息所构造出的波函数作变分计算;最后一步是用计算机作数值计算,以便达到高精度.我感到人们应当能以同样方式去理解场论.

我发觉必须想想形成场论的自由度问题.求解 ϕ^4 理论的麻烦在于,哈密顿(包含 $(\nabla\phi)^2$)中的动能项仅当用场的傅里叶分量 ϕ_k 表示时才能对角化,反之, ϕ^4 项则仅当用 $\phi(x)$ 场本身表示时才是对角化的.我找到一个折中的表象,使得动能项和相互作用项二者能同时粗略地对角化.我需要借助波函数来展开场 $\phi(x)$,这些波函数在位置空间和动量空间都应当有最小延展范围.换言之,波函数在相空间应占据最小体积.测不准原理定出该体积的下限,这个下限用适当的单位表示为1.这使我想到分成

单位体积块的相空间。动量分成片段标志着动量空间应当用对数标度来区分，即每个动量空间体积应当对应一个前面定义的片段那样的壳层，只是不能抛弃任何动量区域。因此这种壳层必须是，例如， $1 < |k| < 2$ ， $2 < |k| < 4$ 等。由于平移不变性，对一个给定的动量壳层，位置空间块都应有同样大小，因而可定义一个简单的块晶格。对不同的动量壳层，位置空间块应有不同的大小。

当我试图去研究这个哈密顿的时候，我未能走得太远。显然，小动量项对大动量项而言应当是一个微扰，但是微扰处理的细节变得非常复杂。同时我的分析过于粗糙，以至不可能确定高度相对论性粒子的物理，而它本应包含在场论的哈密顿中。

然而，我从哈密顿的这种图象得知，为了理解它的意义必须将哈密顿在某个大的但有限的动量值 k 处切断。一旦作了这种切断，我们基本上便面临一个格点理论，这种格子粗略地对应最大动量标度的位置空间块。更精确地说，定义格点理论的合理步骤是定义能覆盖整个切断了动量空间的相空间元胞，此时必有位置空间块的一个单一集合，它们反过来又决定一个位置空间格子，场 ϕ 便定义在这些格点上。由此我看到，为了理解量子场论，必须先理解在格点上的量子场论。

当我思考并试图提炼出“什么是场论”的想法时，我发觉要求一个正确表述的场论可用计算机求解将是十分有益的，正如一个常微分方程可在计算机上求解那样。也就是说，用足够的计算能力去获得任意高的精确度。显然，在六十年代实际上没有这样的计算能力可供利用，所有我真正能干的事情只是在有限格点上做些自由场的简单练习。

1966年夏天，我在 Aspen 度过了一段长时间。在那儿，我实现了在当研究生时所许下的一个诺言，即搞通二维 Ising 模型的 Onsager 解。我当时阅读的是经过变换的解法，即研究 Schultz, Mattis 及 Lieb 给出的场论形式。

当我进入研究生院时，我曾按父亲的指导

去找 Gell-Mann 和 Feynman，问他们当时正在做什么课题。Gell-Mann 写出三维 Ising 模型的配分函数，并说，如果我能解决它那将是非常好的。Feynman 的回答则是“没做什么”。后来 Mathews 给我讲解某些可以求得二维 Ising 模型解的 Feynman 技术。当时我不懂他讲的东西，但就在那时候心中许下了诺言。在去 Aspen 前，当 Ben Widom 在康奈尔大学的讨论会上讲述他的状态标度方程的时候，我被介绍给 Widom。我对 Widom 的公式缺乏理论基础而感到吃惊。那时我一点也不懂临界现象的背景，实际上 Widom 的工作成了一项重要进展。

我读完 Mattis, Lieb 和 Schultz 的文章之后，感到应当将我的重整化群思想应用到临界现象上去。在 Aspen，我曾与一些固体物理学家讨论过这个问题。我得知 Kadanoff 已经抢在前面，我应当去看看他的预印本。

Kadanoff 的思想是：在临界点附近，可以考虑磁矩块，比方说，每块包含 $2 \times 2 \times 2$ 个原子，它起着有效磁矩的作用。这些有效磁矩如同系统原来的模型那样具有简单的最近邻相互作用。唯一的改变是系统具有有效温度和外磁场，它们可能与原来的温度和外磁场不同。更一般地说，有效磁矩可能出现在间距为原子间距 L 倍的晶格中。Kadanoff 的想法是，存在与 L 有关的温度和场变数 T_L 和 h_L ，且 T_{2L} 和 h_{2L} 是 T_L 和 h_L 的解析函数。但在临界点， T_L 和 h_L 的值与 L 无关。基于这一假定，Kadanoff 可以导出 Widom, Fisher 等人的标度律。

现在我将格点场论和临界现象的思想结合起来。我学习了欧几里德(虚时)量子场论和统计力学模型的转移矩阵方法，发现二者存在很多类似之处。我还学到，为了使一种场论成为相对论性的，其相应的统计力学理论必须具有大的关联长度，即必须靠近临界点。我将 Schiff 的强耦合近似应用到 ϕ^4 理论，发现他忽略了重整化效应。把这些考虑进去以后，强耦合展开便不再象他说的那么容易了。我思考过把 Kadanoff 和 Widom 的标度理论用到量子场论的含义如何，同时考虑了 Thirring 模型解的标

度不变性,以及量子场论中 Kastrup 和 Mack 对标度不变性的讨论. 这些想法意味着,至少在短距离内标度不变性是适用的. 但是场算符必须有非平庸的标度量纲,相当于临界现象中的非平庸指数. 基于这些标度思想,我重做了短距离展开理论,并发表了所得结果. 我的理论似乎与有关短距离行为的主要实验想法不符,对此我只觉得有些含糊不清,但并不太担心.

我回到固定源理论和动量片段近似,并对模型本身作了进一步的简化. 然后我更加小心地去做微扰分析. 由于实际上,动量片段的间隔因子 Λ 应当为 2 而不是非常大,因而相继两个能量标度之比 $1/\Lambda$ 应当是 $1/2$ 而不是非常小,这就使得在 $1/\Lambda$ 下应有包含各级微扰的处理. 当我们处理较低的能量标度,一直处理到比最高能量标度低的所有各级时,便产生一个无限复杂的有效哈密顿,它具有无限多个耦合常数. 每通过一次微扰处理消去一个能量标度,便产生一个新的无限复杂的哈密顿. 然而我发现,对足够大的 Λ ,可以从数学上严格控制这些新产生的有效哈密顿. 尽管有无穷多个耦合常数,我还是得以证明:即使经过任意多次迭代,高级微扰也只对有效哈密顿产生一点小的有限度的影响.

这件事告诉我,一个目的在于消去问题中的某个能量标度,或长度标度,或别的什么东西的重整化群变换,可能产生一个具有任意多耦合常数的有效相互作用,同时并不导致灾难. 基于不动点的重整化群形式可能仍然是正确的,而且可以进一步期望只有很少量的耦合常数对变换的定性行为起着重要作用,而其余的则只对定量计算起作用. 换言之,耦合常数可根据其重要性排出一个次序,对某个给定的精确度,只需要考虑耦合常数的一个有限子集合. 在我的模型中,重要性的次序是按展开式中 $1/\Lambda$ 的幂次来决定的. 然而,我认识到在格点相互作用的框架内,特别是在 Ising 型模型中,定域性可以为耦合常数重要性提供一个自然顺序——在任何有限格子体积中,仅仅存在有限个可以确定的 Ising 自旋相互作用. 我认为应当重申

一下 Kadanoff 对 Ising 模型的最近邻耦合所做的阐述:最近邻耦合是最重要的,因为它是我们能够确定的最定域化的耦合. 然而其它的耦合也出现在 Kadanoff 的有效“块自旋”哈密顿中. 对这些耦合的一个合理的切断步骤是考虑一个有限区域,例如,考虑含 3^3 或 4^3 个格点的区域,同时只考虑在这些区域内的多自旋耦合(加上这些耦合的平移和旋转).

以前我所熟悉的所有重整化群变换都只含有固定数目的耦合常数:在 Gell-Mann-Low 情况下正好是电荷 e_1 ,在 Kadanoff 情况下是有效温度和外场. 我曾使用各种方法试图推导出对这些确定数目的耦合常数的变换,但未获成功. 越出这种限制,便很容易确定重整化群变换. 困难的问题在于如何找出这些变换的近似表示,使得可以在实践中进行计算. 的确,现在已经有了一批这样的重整化群变换.

1970 年秋天, Widom 邀请我去他的统计力学讨论班讲讲重整化群. 对此他特别有兴趣,因为 Di Castro 和 Jona-Lasinio 曾建议将场论重整化群形式用于临界现象,但在 Widom 的小组内没有人懂得 Di Castro 和 Jona-Lasinio 的文章. 在论述不动点之类的一般思想的讲课中,我觉得应该提供一个可计算的例子,尽管这个例子并不一定精确和可靠. 我将分析相空间元胞的思想应用于临界点的朗道-金茨堡模型,并力图将其简化为一个可计算的方程;对它的精确度不作要求,但却力图保持相空间元胞图象的精髓. 结果得到一个单变数函数的非线性积分变换形式的递推公式,我可以通过迭代该变换在计算机上对其求解. 同时我也可以由递推公式去计算出指数的数值. 我可以证明(至少部分的证明)递推公式具有一个不动点,而且 Widom 等人提出的临界现象的标度理论也可由不动点的公式导出. 1971 年两篇有关重整化群的文章便是讲述这一工作的.

几个月后,当我把从递推公式中得到的某些数值结果拿给 Fisher 看的时候,我们共同认识到,我正在研究的非平庸不动点在四维情况下将变为平庸的,因而在四维附近应更容易进

行研究。维数 d 作为一个参数直接出现在递推公式中,并可直截了当地写出详情。Fisher 和我写了一篇快报,报道了这方面的结果。当时几乎显然看出,同样的分析也适用于完整的朗道-金茨堡模型,而不需递推公式带来的任何近似。由于简化的原则是 ϕ' 项的系数很小,所以费曼图展开是按级进行的。我利用在场论方面的素养去给出费曼图,用对重整化群不动点的理解去确定如何使用我计算出的图。结果见于 1972 年初发表的第二篇快报中。后来的发展将在第四节中加以讨论。(按:该节从略)

与我完成这一工作同时,在同一领域内还出现了一些其他人的工作。Gribor 和 Migdal, 以及 Polyakov 也认识到临界现象与量子场论之间的联系,一些公理化场论理论家如 Symanzik, 吴大峻等人也在场论和 Ising 模型方面进行了工作。Larkin 和 Khmel'nitskii 应用 Gell-Mann 和 Low 的场论重整化群理论到四维临界现象和三维单轴铁磁体这一特殊情况,在两种情况下都推导出对朗道理论的对数修正。Dyson 建立了一个多少带有人为特性的“多层次”(“hierarchical”)相变模型,它可用一维积分递推公式严格求解。这个公式几乎等同于我后来在 1971 年文章中写出的公式。Anderson 采取了一个简单而近似的步骤消去 Kondo 问题中的动量标度,成为我在这方面工作的先驱。许多固体理论家们也试图将图形展开方法应用到临界现象中,Abe, Scalapino 和 Ferrell 奠定了在任意维数中用图形处理具有大量内部自由度模型的基础。(Stanley 早在 1968 年就解出了无穷自由度极限。)Kadanoff 对 Ising 模型作了广泛的研究,发现了一个短距离展开,它很类似于我对场论的展开。在临界现象中,过去就有人考虑过分数维数的问题。费曼图延拓到非整数维数也被引入量子场论中,以便对非阿贝尔规范理论提供一个规范不变的正规化步骤。这件事与用它来发展 ϵ 展开一事几乎同时完成。

在六十年代后期,Migdal 和 Polyakov 提出了一个基于费曼骨架图展开的临界现象“靴带”(“bootstrap”)公式,其中所有参数,包括展开参

数本身都要自治地确定。由于靴带方程本身的复杂性,他们不可能对它求解。后来发现了四维附近的 ϵ 展开, Mack 证明可在 ϵ 的最低级求解靴带方程。如果不是 1971 年提出了重整化群思想,那么 Migdal-Polyakov 的靴带理论可能成为当时试图进一步理解临界现象的最有希望的理论框架。然而,重整化群方法被证明为更容易而且用途更广,因而靴带理论在今天才没有得到重视。

回忆起来,靴带理论解决了我一个想解决但又没解决的问题,即怎样导出仅含一个或两个耦合参数的不动点问题(Gell-Mann-Low 和 Kadanoff 的梦想)——在 Migdal-Polyakov 的靴带中仅存在一个特定的耦合参数。不过,我觉得靴带近似是难以接受的,因为 ϵ 展开发现以前,没有任何正式的论据可用来证明将骨架图展开终止到有限项是正确的。同时骨架图本身也太复杂,以致实际上不可能通过计算大量图形来检验切断是否正确。即使在今天,当我回顾那些不论是用 ϵ 展开,还是用重整化群方法都尚未解决的问题时,骨架图的收敛问题还是没有激起我从事靴带近似的热情,尽管它的收敛性实际上从未验证过。在此期间, Monte Carlo 重整化群已提供了一个在合理的有效的和非微扰方式下采用少量耦合参数的框架。

我不了解是否存在任何其它的从第一原理出发去理解重整化群的独立的尝试,这里重整化群被视为每次在一种长度标度上去解决场论或临界现象问题的手段。我也不了解是否有工作说明重整化群允许任意多个耦合参数出现在分析的中间阶段。

我将列出某些一般的参考文献来结束我的讲演。两篇半普及性的有关重整化群的文章是我 1979 年和 1975 年发表的。这方面的书有 Domb 和 Green (1976), Pfeuty 和 Toulouse (1977), Ma (1976), Amit (1978), Pata-shinskii 和 Pokrovskii (1979), 还有 Stanley (1971)。评论文章和会议文集有: Widom (1975), Wilson 和 Kogut (1974), Wilson (下转第 280 页)