

# 论恒星, 它们的演化和稳定性<sup>1)</sup>

S. Chandrasekhar

## 一、引言

当想到原子的时候, 我们脑子里有一幅清晰的图象: 中心有个核, 一群电子环绕着它. 我们想象它们是尺度以埃 ( $\sim 10^{-8}$  厘米) 量度的小物体, 存在的种类有上百种. 这幅图象在近代量子论中定量化和精确化了. 整个理论的成功可追溯到两个基本事实: 第一, 氢原子基态的玻尔半径是

$$\frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \sim 0.5 \times 10^{-8} \text{ 厘米}, \quad (1)$$

为原子的大小提供了正确的量度, 这里  $h$  是普朗克常数,  $m$  是电子质量,  $e$  是电子电荷. 第二, 索末菲精细结构常数的倒数为

$$\frac{hc}{2\pi e^2} \sim 137, \quad (2)$$

给出了能为稳定电子轨道所环绕的中心核的最大正电荷数. 中心核的这个最大电荷数是对轨道电子运动的狭义相对论效应引起的.

现在我们问: 既然可用自然常数的两个组合(1)和(2)来了解原子, 那对有关恒星的基本事实是否也能同样简单地了解? 在本讲演中我将试图说明, 在一定意义上这是可能的.

恒星最重要的属性是它的质量. 它以太阳质量 $\odot$ , 即  $2 \times 10^{33}$  克为单位来量度. 质量远小于或远大于太阳质量的恒星相对讲是不多的. 现代恒星结构和恒星演化理论的成功很大程度上来自这一事实: 下述质量量纲的组合量为恒星质量提供了正确的量度,

$$\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \simeq 29.2 \odot, \quad (3)$$

其中  $G$  是引力常数,  $H$  是氢原子质量. 我在本讲演的前一半主要关心的问题是: 这事是怎么发生的?

## 二、辐射压强的作用

正常恒星的一个基本事实是在它的流体静平衡中辐射压强是一要素. 恒星的流体静平衡方程是

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho, \quad (4)$$

其中  $P$  是总压强,  $\rho$  是密度,  $M(r)$  是半径为  $r$  的球内的质量. 对总压强的贡献有两部分: 来自物质和来自辐射. 设物质处于经典麦克斯韦意义下的理想气体状态, 物质的压强为

$$p_{\text{气}} = \frac{k}{\mu H} \rho T, \quad (5)$$

其中  $T$  是绝对温度,  $k$  是玻耳兹曼常数,  $\mu$  是平均分子量 (正常恒星条件下它约为 1.0). 辐射压强为

$$p_{\text{辐}} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (6)$$

其中  $a$  是斯忒藩辐射常数. 若辐射对总压强的贡献占  $(1 - \beta)$ , 那么就有

$$P = \frac{1}{1 - \beta} \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{\beta} \frac{k}{\mu H} \rho T. \quad (7)$$

为显示出辐射压强在恒星平衡中的作用, 可以从上述方程中消去  $T$ , 并把  $P$  表示成  $\rho$  和  $\beta$  的函数. 我们得到

1) 本文是 1983 年诺贝尔奖金物理学奖获得者之一, 美国芝加哥大学教授 S. Chandrasekhar 在获奖仪式上的讲演, 原文发表在 *Reviews of Modern Physics* 1984 年第 56 卷第 2 期. ——编者注

$$T = \left[ \frac{k}{\mu H} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta} \right]^{1/3} \rho^{1/3} \quad (8)$$

和

$$P = \left\{ \left[ \frac{k}{\mu H} \right]^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right\}^{1/3} \rho^{4/3} = C(\beta) \rho^{4/3}. \quad (9)$$

因子  $(1-\beta)$  对恒星结构理论的重要性首先是 Eddington 指出的。在他所著《恒星内部构造》一书中的著名的一段落里，他把它联系到“恒星的发生”。下面是爱丁顿论据的一个更合理的说法，同时它把自然常数的组合(3)分了出来。

有一普遍定理说，对一流体静平衡下质量为  $M$  的恒星，它在径向距离  $r$  处的密度  $\rho(r)$  不超过  $r$  内的平均密度  $\bar{\rho}(r)$ ，则它的中心压强  $P_c$  必满足不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3} M^{2/3} &\leq P_c \\ &\leq \frac{1}{2} G \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M^{2/3}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中  $\bar{\rho}$  是恒星平均密度， $\rho_c$  是中心密度。这定理的内容只不过是断言，恒星中心的实际压强必定介于密度为  $\bar{\rho}$  及  $\rho_c$  的两个均匀密度的位形的中心压强之间(见图 1)。若不等式(10)被破坏，一般说来就必有一些区域中反向密度梯度占优势，而这意味着不稳定性。换句话说，不等式(10)等价于恒星的稳定存在条件。

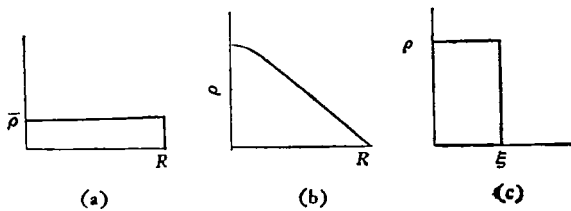


图 1 密度不均匀分布的恒星(b)与两个均匀位形的比较 [(a) 为密度等于平均密度; (c) 为密度等于中心密度]

由(10)式和(9)式，可导出恒星稳定存在的条件为

$$\left\{ \left[ \frac{k}{\mu H} \right]^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right\}^{1/3} \leq \left( \frac{\pi}{6} \right)^{1/3} G M^{2/3}, \quad (11)$$

或等价地有

$$M \geq \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/2} \left\{ \left[ \frac{k}{\mu H} \right]^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right\}^{1/2} \frac{1}{G^{3/2}}, \quad (12)$$

其中  $\beta_c$  是恒星中心的  $\beta$  值。由普朗克定律，斯忒藩常数  $a$  的值为

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}. \quad (13)$$

把这  $a$  值代入(12)式，我们得到

$$\begin{aligned} \mu^2 M \left[ \frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right]^{1/2} &\geq \frac{(135)^{1/2}}{2\pi^3} \left( \frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \\ &= 0.1873 \left[ \frac{hc}{G} \right]^{3/2} \frac{1}{H^2}. \quad (14) \end{aligned}$$

我们看到不等式(14)把质量量纲的自然常数组合(3)分了出来。把(3)式的值代入，得出不等式

$$\mu^2 M \left[ \frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right]^{1/2} \geq 5.48 \odot. \quad (15)$$

对给定质量的恒星，这个不等式提供了  $(1-\beta_c)$  的上限。从而有

$$1-\beta_c \leq 1-\beta_*, \quad (16)$$

其中  $(1-\beta_*)$  由恒星质量  $M$  和平均分子量  $\mu$  通过四次方程

$$\mu^2 M = 5.48 \left[ \frac{1-\beta_*}{\beta_*^4} \right]^{1/2} \odot \quad (17)$$

唯一确定。

表 1 对若干  $\mu^2 M$  的值列出了相应的  $(1-\beta_*)$ 。从表 1 可以看出，对一个太阳质量的恒星，若平均分子量为 1，则中心处辐射压强不能超过总压强的 3%。

表 1 质量为  $M$  的恒星中心的最大辐射压强  $1-\beta_*$

$1-\beta_*$	$M\mu^2/\odot$	$1-\beta_*$	$M\mu^2/\odot$
0.01	0.56	0.50	15.49
0.03	1.01	0.60	26.52
0.10	2.14	0.70	50.92
0.20	3.83	0.80	122.5
0.30	6.12	0.85	224.4
0.40	9.62	0.90	519.6

由上述计算我们得到什么结论呢？我们推断，只要(17)式是真实恒星平衡的基础，那么为测定恒星质量提供了正确量级的自然常数组合(3)就是恒星结构的物理理论的基础。

### 三、恒星有足够的能量来冷却吗?

同一自然常数组合(3)不久后出现在一个更基本的问题上,这涉及解释 Eddington 用格言形式表达的佯谬“恒星将需要能量来冷却”。这个佯谬是在有平均密度为  $10^5-10^7$  克厘米 $^{-3}$  的白矮星(如天狼伴星)存在的新知识后,人们研究气态恒星的最终归宿而引起的。Eddington 说过:

“我不明白,当一颗恒星一旦陷入这致密状态后将怎么摆脱它……,看来当恒星的亚原子能量供应中断后,它处于困境之中”。

Fowler 在 1926 年用更清晰的物理语言重新表述了 Eddington 提出的佯谬。他的表述如下:

“处于白矮态的恒星物质已辐射了如此多的能量,以至它的能量比绝对零度下正常原子态的同样物质的能量还低。那么如果把它的部分物质从恒星上移开并除去压强,它将怎么办?”

Fowler 的问题定量地是这么产生的。

对一个电离至裸核的、序数为  $Z$  的原子系综,估计其单位体积的静电能为

$$E_v = 1.32 \times 10^{11} Z^2 \rho^{4/3}, \quad (18)$$

而自由粒子处于密度为  $\rho$  温度为  $T$  的理想气体状态时,单位体积的热运动动能为

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu H} \rho T = \frac{1.24 \times 10^8}{\mu} \rho T. \quad (19)$$

现在如果撤去这种物质所承受的压力,它能恢复普通原子状态的必要条件是

$$E_{kin} > E_v. \quad (20)$$

按(18)式和(19)式,即要求

$$\rho < \left[ 0.94 \times 10^{-3} \frac{T}{\mu Z^2} \right]^3. \quad (21)$$

若密度足够高,这个不等式显然将被破坏。这就是 Fowler 表述的 Eddington 佯谬的实质。1926 年, Fowler 在一篇题为“稠密物质”的文章里解决了这个佯谬。该文是恒星结构领域中伟大的里程碑之一:那里第一次引入了费米统计

物理

和电子简并的概念。

### 四、Fowler 对 Eddington 佯谬的解释,白矮星中电子的简并

对完全简并的电子气体,相空间中动量低于某一阈值(叫费米阈)  $p_0$  的全部可利用的区域都按泡利不相容原理占满了,即六维相空间中每一体积为  $h^3$  的元胞中有两个电子。用  $n(p)dp$  记单位体积内处于  $p$  与  $p+dp$  间的电子数,那么完全简并假设相当于说

$$n(p) = \begin{cases} \frac{8\pi}{h^3} p^2, & (p \leq p_0); \\ 0, & (p > p_0). \end{cases} \quad (22)$$

阈动量  $p_0$  由归一条件确定:

$$n = \int_0^{p_0} n(p) dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3, \quad (23)$$

这里  $n$  是单位体积内的总电子数。

当分布由(22)式给出时,压强  $P$  和单位体积内电子动能  $E_{kin}$  分别是

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 v_p dp \quad (24)$$

和

$$E_{kin} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 T_p dp, \quad (25)$$

其中  $v_p$  和  $T_p$  是动量为  $p$  的电子的速度和动能。

若按非相对论力学,把

$$v_p = p/m \text{ 和 } T_p = p^2/2m \quad (26)$$

代入(24)式和(25)式,我们得到

$$P = \frac{8\pi}{15h^3 m} p_0^5 = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (27)$$

和

$$E_{kin} = \frac{8\pi}{10h^3 m} p_0^5 = \frac{3}{40} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3}. \quad (28)$$

Fowler 对 Eddington 佯谬的解释在于:对预期在白矮星内占着优势的密度和温度下,电子是高度简并的,于是  $E_{kin}$  应按(28)式计算而不是(19)式。(28)式给出

$$E_{kin} = 1.39 \times 10^{13} (\rho/\mu)^{5/3}. \quad (29)$$

现在把(18)式和(29)式相比,我们看到,对白矮星内  $\rho \sim 10^5$  克厘米<sup>-3</sup>的物质,总动能约是强位能的二至四倍, Eddington 佯谬不再出现。Fowler 用很有洞察力的陈述结束他的文章:

“黑矮物质极象一个处于最低量子态的单个巨型分子。按费米-狄喇克统计,它的高密度只可能靠它巨大的能容量来达到。但这能量不再象正常原子或分子的能量那样转为辐射。黑矮物质与正常分子的唯一差别是分子能够以自由状态存在,而黑矮物质却只能在极高的外压力下存在。”

### 五、白矮星的理论;极限质量

压强为  $P$  的简并电子气的内能 ( $= 3P/2$ ) 是零点能; Fowler 文章的要点是讲,这零点能如此大,以至可以期望恒星能够最终停留在全部能量都属这类能量的状态之下。Fowler 的论证可以更清楚地表述如下:

按(27)式,我们有关系式

$$P = K_1 \rho^{5/3} \quad (30)$$

其中,  $K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m(\mu_e H)^{5/3}}$ , 这里  $\mu_e$  是一电子的平均分子量。对一平衡位形,若压强  $P$  与密度  $\rho$  的关系为

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad (31)$$

则叫它指标为  $n$  的爱姆登多层球。这样,按(30)式构成的简并位形是指标为  $3/2$  的多层球;多层球理论立即给出关系式

$$K_1 = 0.4242(GM^{1/3}R). \quad (32)$$

把(30)式给出的  $K_1$  代入,则有

$$\begin{aligned} \log_{10}(R/R_\odot) &= -\frac{1}{3} \log_{10}(M/\odot) \\ &- \frac{5}{3} \log_{10} \mu_e - 1.397. \end{aligned} \quad (33)$$

当质量等于太阳质量,  $\mu_e = 2$ , (33) 式预言  $R = 1.26 \times 10^{-2} R_\odot$  以及平均密度为  $7.0 \times 10^5$  克厘米<sup>-3</sup>。这些值正是白矮星的半径和平均密度的量级。此外由(32)式和(33)式看出,白矮位形的半径反比于质量的立方根。因此,对一

切质量都预言出有限的平衡位形。这曾使人相信,白矮星代表一切恒星演化的最后阶段。

不久后弄清了上述在 Fowler 的前提下的简单理论需要修正。问题在于随质量的增大,简并恒星中心的阈能电子的速度开始可与光速相比拟。当简并星的质量还只有一个太阳质量(设  $\mu_e = 2$ ),中心密度(约为平均密度的六倍)已达  $4.19 \times 10^6$  克厘米<sup>-3</sup>,与这密度相应的阈动量  $p_0 = 1.29mc$ ,速度为  $0.63c$ 。这样物态方程必须考虑狭义相对论效应而修正。这很容易,只要用

$$v_p = \frac{p}{m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}}$$

和

$$T_p = mc^2[(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} - 1] \quad (34)$$

代替非相对论的(26)式,代入(24)式和(25)式就可做到。这样,物态方程就可用参数式表示:

$$P = Af(x) \text{ 和 } \rho = Bx^3, \quad (35)$$

其中

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}, \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 \mu_e H}{3h^3}, \quad (36)$$

以及

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 3) + 3\sinh^{-1}x. \quad (37)$$

类似地有

$$E_{\text{kin}} = Ag(x), \quad (38)$$

其中

$$g(x) = 8x^3[(x^2 + 1)^{1/2} - 1] - f(x). \quad (39)$$

按(35)式和(36)式,当电子浓度足够低( $x \ll 1$ )时,压强近似于(30)式;但当电子浓度很大( $x \gg 1$ )时,压强则趋于

$$P = \frac{1}{8} \left[\frac{3}{\pi}\right]^{1/3} hcn^{4/3}. \quad (40)$$

这个极限容易算得,只要在(24)式中令  $v_p = c$ , 于是

$$P = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4. \quad (41)$$

借助(23)式消去  $p_0$ , 就导致(40)式。

虽然按狭义相对论要求修正状态方程显得

完全无害，但它对简并位形的质量与半径关系却有很显著的影响。

按(41)式， $P$ 与 $\rho$ 的关系为

$$P = K_2 \rho^{4/3}, \quad (42)$$

式中  $K_2 = \frac{1}{8} \left[ \frac{3}{\pi} \right]^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}}$ 。这个极限下的位形是一个指标为3的多层球。众所周知，当多方指标为3，平衡位形的质量唯一地由  $P$ - $\rho$  关系式中的比例常数  $K_2$  确定。我们相应地有

$$\begin{aligned} M_{\text{limit}} &= 4\pi \left[ \frac{K_2}{\pi G} \right]^{3/2} (2.018) \\ &= 0.197 \left[ \frac{hc}{G} \right]^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} \\ &= 5.76 \mu_e^{-2} \odot. \end{aligned} \quad (43)$$

[(43)式中的数字常数2.018来自  $n=3$  的 Lane-Emden 方程的显示解]。

从一般考虑知道，简并位形的精确的质量-半径关系必定以(43)式代表的位形的质量为上限，此外当半径趋于零和  $M \rightarrow M_{\text{limit}}$  时，位形的平均密度趋向无穷。当考虑用精确的物态方程(35)式至(37)式构成的平衡位形，这些情况可直截了当地得出。这种位形的平衡方程可约

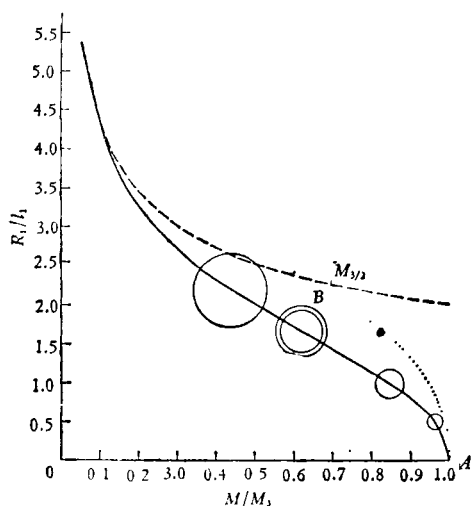


图2 实线曲线代表精确的质量-半径关系 [ $l_1$  由(46)式定义,  $M_s$  表示极限质量]。这曲线渐近地趋向虚线曲线, 与它对应的低质量的简并位形被近似成指标为  $3/2$  的多层球。图中阴影的区域中位形被当作相对论性的 [ $\rho > (k_1/k_2)^2$ ]

化成如下形式:

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = - \left( \phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}, \quad (44)$$

其中

$$y_0^2 = x_0^2 + 1, \quad (45)$$

$m c x_0$  是位形中心处的电子阈动量,  $\eta$  是以

$$\left( \frac{2A}{\pi G} \right)^{1/2} \frac{1}{B y_0} = l_1 y_0^{-1} \quad (46)$$

为单位的径向距离。

用适当的边条件和各种起始  $y_0$  值对(44)式作积分, 我们可导出简并位形的精确的质量-半径关系及其他平衡性质。计算的主要结果示于图2和图3。

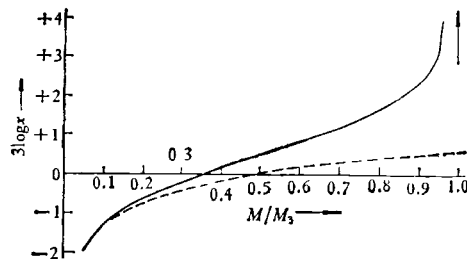


图3 实线曲线代表高度塌缩位形的精确的质量-密度关系, 这曲线当  $M \rightarrow 0$  时渐近地趋向虚线曲线

上述考虑导致的重要结论是: 第一, 在演化最后阶段能变成简并位形的恒星具有一个质量上限  $M_{\text{limit}}$ ; 第二, 上述考虑不能预言  $M > M_{\text{limit}}$  的恒星的终态。最后我们看到, 自然常数组组合(3)出现在(43)式所示的  $M_{\text{limit}}$  中, 这样它对恒星结构和演化理论的重要意义已无可怀疑。

## 六、什么条件下正常恒星能产生简并核心?

在确立完全简并位形的质量上限后, 要解决的问题是如何把它与恒星从气态开始的演化联系起来。若恒星的质量小于  $M_{\text{limit}}$ , 设想它最终将演化成完全简并态是合理的, 但它的质量若大于  $M_{\text{limit}}$  会如何? 回答这个问题的关键是用第二和第三节的方程式和不等式。

第一个必须回答的问题是关于起始为气态的恒星会产生简并核心的条件。从物理上讲,什么时候将开始有对理想气体物态方程(5)的偏离及显露电子简并效应的问题是不难回答的。

比如设想一个高度电离的自由电子和原子核的系综,它开始处于物态方程(5)决定的理想气体态,我们在恒星下持续地加大它的密度.开始电子压强将随  $\rho$  线性增加,不久就会有偏离发生,最终密度将按完全简并电子气的物态方程增长(见图4)。值得注意的是这个极限形式的物态方程与温度无关。

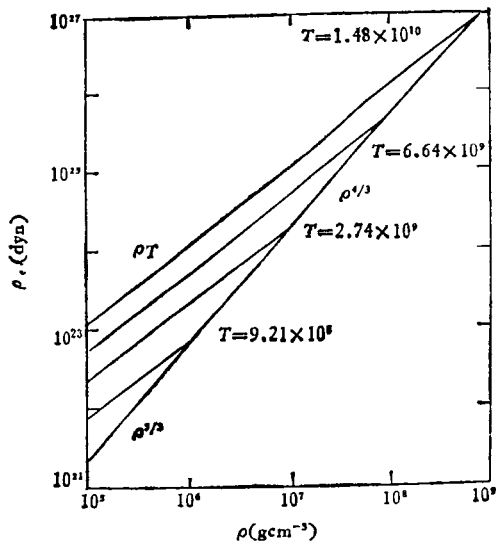


图4 恒温下通过增大密度使简并发生

为阐明恒星演化过程中产生简并核心的条件,把电子压强(由经典理想气体物态方程给出)表示成  $\rho$  和  $\beta_e$  的函数更方便。 $\beta_e$  定义为[见(7)式]

$$P_e = \frac{k}{\mu_e H} \rho T = \frac{\beta_e}{1 - \beta_e} \frac{1}{3} a T^4, \quad (47)$$

其中  $P_e$  表示电子压强。然后类似(9)式,可写出

$$P_e = \left[ \left( \frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}. \quad (48)$$

把它与(42)式比,我们推断,如果

$$\left[ \left( \frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{\frac{1}{3}} > K_2$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \frac{3}{\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}}, \quad (49)$$

则经典理想气体物态方程给出的压强  $P_e$  将大于简并占优势的物态方程所给的值,且不只对特定的  $\rho$  和  $T$ ,而是对具有相同  $\beta_e$  的一切  $\rho$  和  $T$ 。

把(13)式给出的  $a$  值代入,(49)式简化为

$$\frac{960}{\pi^4} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} > 1, \quad (50)$$

或等价地表示成

$$1 - \beta_e > 0.0921 = 1 - \beta_\infty. \quad (51)$$

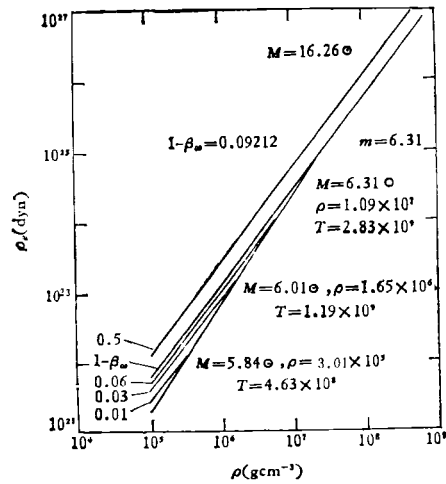


图5 在恒定的  $\beta_e$  值下,增大密度使简并触发(注意当  $1 - \beta_e > 0.09212$  时没有焦点。图上  $1 - \beta_e$  转换成了用标准模型构成的恒星的质量)

为了我们眼下的目的,不等式(51)主要是作为恒星产生简并的判据,它要求辐射压强必须小于  $P_e + P_{rad}$  的9.2%。这最后的推断在当今所有恒星演化体系中是非常重要的,因此值得重复一下前面论点的直接性和简明性。

前面论点中的两要素是:第一,辐射压强随恒星质量增大而越来越占优势;第二,为使电子简并可能出现,辐射压强必须在总压强中不占显著比例,实际上已看到,它必须不超过  $P_e + P_{rad}$  的9.2%。论点中第二要素是简并的直接而基本的物理后果,而第一要素需要一些详述。

随恒星质量增大,辐射压强必定越来越起支配作用,这是爱丁顿建立的恒星结构理论的

最早期的结果之一。这结果的定量表述由爱丁顿的标准模型给出,作为他早期研究的基础,综述于他的“恒星内部构造”一书中。

比例  $\beta$  (=气体压强/总压强) 在标准模型中当作恒星内的常数。根据这一假设,从(9)式可以看出,恒星是指标为 3 的多层球,于是我们有关系式[看(43)式]

$$M = 4\pi \left[ \frac{C(\beta)}{\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} (2.018), \quad (52)$$

其中  $C(\beta)$  由(9)式定义。让  $\beta = \beta_\omega$ , (52) 式给出

$$\begin{aligned} M &= 0.197\beta_\omega^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{hc}{G} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\mu + 1)^2} \\ &= 6.65\mu^{-2}\odot = \mathfrak{M}, \quad (53) \end{aligned}$$

那么在标准模型中,质量超过  $\mathfrak{M}$  的恒星,其辐射压强将超过总压强的 9.2%。因而  $M > m$  的恒星内部在演化的任何阶段都不会产生简并。对这样的恒星,除非它能抛掉大部质量,否则不可能有最终的白矮态。

当然,标准模型只是一种模型。但除了下面扼要提到的特殊情况外,经验已证实了标准模型结果的定性正确,即质量超过 7—8  $\odot$  的恒星的演化必定是与低质量恒星演化很不一样的方式进行的。这些约在五十年前得出的结论是如此令人信服,因此当时那些断言都是很有信心地作出的。

给定一个电子和原子核的封闭体(总电荷为零),若我们无限地压缩它,结果会怎样?

小质量恒星的生命史必然本质地不同于大质量恒星的生命史。对小质量恒星,自然的白矮阶段是走向完全灭亡的一个起始步骤。大质量恒星不能进入白矮阶段,其他的可能性还有待推究”。

这些陈述一直保持着它们的正确性。

在大质量星的演化还不能确定时,质量足够小的恒星的终态却未曾有过这种不确定性。原因是这样:仍根据(10)式,只要

$$\frac{1}{2} G \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{3}{2}} M^{\frac{3}{2}} < K_2$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \frac{3}{\pi} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}}, \quad (54)$$

或等价地要求

$$M < \frac{3}{16\pi} \left( \frac{hc}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 1.74\mu_e^{-2}\odot, \quad (55)$$

则恒星内可达到的最大中心压强必定小于简并物态方程规定的值。由此推断,在质量小于 0.43 $\odot$  (若  $\mu_e = 2$ ) 的恒星的演化中不可能有意外发生。这种恒星演化的最后阶段只能是白矮阶段。(这里可以顺便指出,(55)式暗示质量  $\sim 10^{15}$  克的所谓“小”黑洞在今天的宇宙中是不能自然形成的。)

## 七、大质量恒星演化和引力塌缩的触发方面最新进展的简要评述(略)

## 八、相对论起因的不稳定性

### 1. 球状星的振动不稳定性

现在我转向讨论起因于广义相对论效应的某些类型的恒星不稳定性,它在牛顿理论中没有对应物。人们将会看到,这些新的起因于相对论的不稳性对讨论引力塌缩和大质星的晚期演化起着实质性的作用。

我们先考虑球状星对纯径向扰动的稳定性。这种稳定性的判据直接来自恒星球对称径向振动的线性化方程组。在牛顿引力理论的框架下,径向扰动的稳定性仅依赖于绝热指数  $\Gamma_1$  的平均值,  $\Gamma_1$  是随动流体元的压力和密度的百分拉格朗日改变量之比,即

$$\frac{\Delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\Delta \rho}{\rho}. \quad (56)$$

稳定性的牛顿判据为

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \int_0^M \Gamma_1(r) P(r) dM(r) \\ &\div \int_0^M P(r) dM(r) > 4/3. \quad (57) \end{aligned}$$

若  $\Gamma_1 < 4/3$ , 全局性的动力不稳定性将发生,其时间常数是声波从中心传至表面的时间。

当在广义相对论的框架下考察同一问题时,人们发现,稳定性仍依赖于  $\Gamma_1$  的平均值,但与牛顿结果相反的是稳定性也取决于恒星的半径. 因此不管  $\Gamma_1$  多大,只要半径比 Schwarzschild 半径

$$R_s = 2GM/c^2 \quad (58)$$

的某一确定的倍数小,不稳定性仍将发生. 如果为简单起见,我们假定  $\Gamma_1$  在星内是常数,且等于  $5/3$ ,那么当  $R_1 < 2.4R_s$ , 恒星对径向扰动就是动力不稳定的. 若  $\Gamma_1 \rightarrow \infty$ , 不稳定性将发生于  $R < \frac{9}{8}R_s$ . 这个半径  $\frac{9}{8}R_s$  是在广义相对论框架下处于流体静平衡的自引力物体所能具有的最小半径. 1916年 Schwarzschild 发表的一篇基本论文中暗示了这一重要结果(实际上 Schwarzschild 对能量密度均匀的星证明了  $R > \frac{9}{8}R_s$ ).

从某种意义上说,这相对论起因的不稳定性的最重要影响在于,若  $\Gamma_1$  (为简单计,仍设它为常数)仅比  $4/3$  大一个小的正常数,那么不稳定性发生在  $R$  比  $R_s$  大很多倍时,而这时广义相对论对平衡位形本身结构几乎没有影响. 实际上按广义相对论的一级后牛顿近似,恒星的径向振动方程导致径向扰动不稳定性发生条件为

$$R < \frac{K}{\Gamma_1 - 4/3} \frac{2GM}{c^2}, \quad (59)$$

其中  $K$  是与牛顿框架下平衡位形中密度与压力的整个<sup>1)</sup>进程有关的常数. 对指标为  $n$  的多层球,常数  $K$  的值为

$$K = \frac{5-n}{18} \left[ \frac{2(11-n)}{(n+1)\xi_1^3 |\theta'_1|^3} \times \int_0^{\xi_1} \theta \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \xi^2 d\xi + 1 \right], \quad (60)$$

其中  $\theta$  是标准归一(在  $\xi = 0$  处  $\theta = 1$ ) 的兰恩-爱姆登函数,  $\xi$  是无量纲径向坐标,  $\xi_1$  是多层球的边界 ( $\theta = 0$  处) 以及  $\theta'_1$  是  $\theta$  在  $\xi_1$  处的微商.

表 2 中列出了不同多方指标下的  $K$  值. 特别值得注意,当  $n \rightarrow 5$ ,  $K$  无限增大,位形越来

越变为中心稠密. 对  $n = 4.95$  (这时  $\rho_c = 8.09 \times 10^6 \bar{\rho}$ ),  $K$  已约达 46. 换句话说,对中心高度致密的大质量星(这时  $\Gamma_1$  比  $4/3$  可只差 0.01), 当它的半径降至  $5 \times 10^3 R_s$  时,相对论起因的不稳定性就已发生. 在这些问题范围内,很清楚,必须考虑相对论性的不稳定性.

表 2

$n$	$K$	$n$	$K$
0	0.452381	3.25	1.28503
1.0	0.565382	3.5	1.49953
1.5	0.645063	4.0	2.25338
2.0	0.751296	4.5	4.5303
2.5	0.900302	4.9	22.906
3.0	1.12447	4.95	45.94

上段所述结果可进一步应用于接近极限质量的简并位形. 在这些高度相对论性的位形中,因电子速度接近光速,  $\Gamma_1$  的有效值将很接近  $4/3$ , 并且在质量略小于极限质量时,后牛顿的相对论不稳定性将发生. 因为质量小于  $M_{\text{limit}}$  情况下发生的径向振动不稳定性,在简并位形系列中振动周期必有一极小值. 估出这极小值约为 2 秒(见图 6). 当脉冲星被发现时,人们知道它们的周期远小于这极小值,从而排除了它们是接近极限质量的简并位形的可能. 这曾是支持脉冲星为中子星的决定性因素之一(作为奇怪的反嘲,按第七节扼要解释过的原因,超新星爆发产生的脉冲星的质量确接近于  $1.4 \odot$ !).

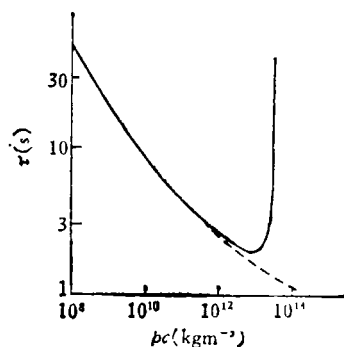


图 6

1) 正由这个原因,我们把不稳定性描述为全局的



最后指出,相对论起因的径向不稳定性是存在满足稳定性的极大质量的首要原因,这是广义相对论的流体静平衡方程的直接结果。

## 2. 由非轴对称振动模式发射引力辐射导致转动星的久期不稳定性

现在我转向讨论广义相对论预言的另一类转动位形的不稳定性。这新型不稳定性的起因是广义相对论给转动体加进了一种耗散机制,即非轴对称振动模式有发射引力辐射的可能性。这不稳定性似乎是限制了脉冲星的转动周期。但首先,我还是解释一下这种不稳定性的本质和起因。

如所周知,均匀转动物体的平衡位形的可能系列是扁迴转椭圆体的 Maclaurin 系列。当在随体转动参考系内考察 Maclaurin 迴转椭圆体的第二谐振动时,人们发现对方位角的依赖为  $e^{2i\varphi}$  的两个模式的振动特征频率  $\sigma$  按图 7 所示地随偏心率  $e$  变化。可以看出,当  $e = 0.813$ ,

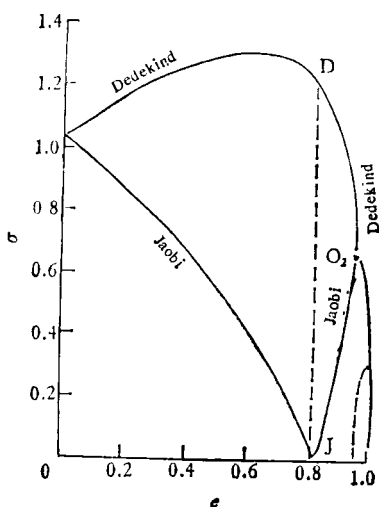


图 7

这些模式之一变为中性(即  $\sigma = 0$ ); 当  $e = 0.953$ , 两模式合并, 并在这点后变为互相复共轭。因而在后一点(首先由黎曼分出的), Maclaurin 迴转椭圆体变为动力学不稳定。另一方面,  $e = 0.813$  的中性模式的起因是一个新的三轴椭球平衡系列——Jacobi 椭球在这点开始了分岔。对后者, L. Kelvin 在 1883 年就猜测过:

如果有一点粘滞, 不管多弱……超过 0.81 的平衡不能是久期地稳定的。L. Kelvin 的理由是: 粘滞耗散能量, 但不耗散角动量。对同样的角动量, Jacobi 椭球比麦克劳林迴转椭圆体具有较低的能量, 因此可预料, 粘滞将耗散麦克劳林迴转椭圆体的过剩能量, 并使它过渡到能量较低的 Jacobi 椭球。对两种振动模式的粘滞耗散效应的细致计算示于图 7, 它的确证实了 L. Kelvin 的猜想。人们看到, 粘滞耗散使在  $e = 0.813$  成为中性的那个模式在这点后变得不稳定, 其时间常数反比于运动学粘滞的大小, 且在动力学不稳定性开始的  $e = 0.953$  处, 时间常数单调地降至零。

因引力辐射既耗散能量也耗散角动量, 所以它不引起 Jacobi 模式的不稳定性。可是它对同一偏心率的另一模式引起不稳定性。开头这可能显得奇怪, 而这里我们遇到的情况澄清了一些重要的问题。

若我们不从转动参考系而从惯性系来分析简正模式, 我们会发现因辐射反作用而在  $e = 0.813$  处变为不稳定的那种模式实际上在该点是中性的。在惯性系中, 该模式为中性符合于下述事实, 即该点的中性形变关联到一个新的三轴系列——Dedekind 椭球系列在该点的分岔。这些 Dedekind 椭球与 Jacobi 比椭球是相合的, 但差别在于前者在惯性系中静止, 它的三轴形象是由于内部的涡旋运动。从这些事实似乎可以得出一个重要结论, 在广义相对论的框架下, 辐射反应会对形变的 Dedekind 模式(它在惯性系中是准稳的)而不是 Jacobi 模式(它在转动系中是准稳的)引起久期的不稳定性。

关于辐射反应引起久期不稳定性的进一步情况相继由 Friedman 和 Comins 发现。它说在小偏心率下高  $m (= 3, 4 \dots)$  模式变为不稳定, 但不稳定的时间常数迅速变长。从 Friedman 1983 年的初步计算看出,  $m = 3$  (或 4) 的模式导出的久期不稳定性限制了脉冲星的转动。

从前面的讨论清楚看出, 我们考虑过的两类相对论起因的不稳定性是一定要对我们所关心的问题起重要作用的。

## 九、黑洞的数学理论

至此我们只考虑了完全简并位形存在质量上限以及相对论起因的不稳性对恒星演化最后阶段引起的限制。从这些考虑得出不可避免的结论是，黑洞会作为大质量星演化的自然最终产物而形成，而且在今天的宇宙中它们应当大量存在。在这最后一节里，我想扼要说明一下广义相对论的有关预言。首先，我必须精确地定义什么是黑洞。

一个黑洞把三维空间分隔成两个区域：一个内部区，它为称作事件视界的光滑二维面所包围；一个外部区，它在事件视界之外，是渐近平坦的；内部区中没有一点能够（这是定义的一部分）与外部区的任一点通讯。这不可通讯性是由内部区中开始的任一光信号不可能穿过事件视界所决定。对外部区的渐近平坦性要求等价于黑洞在空间上是孤立的，远离事件视界的时空应逼近地球上的物理学的习惯时空。

在广义相对论中，我们必须从爱因斯坦真空方程寻求符合于我所说的两个要求的解。惊人的事情是，在符合这些简单而必须的要求后，广义相对论对稳定的（即与时间无关的）黑洞只允许有唯一的一个两参量解族。这就是 Kerr 解族，其中两参量是黑洞的质量和角动量。更令人惊异的是，描述这些解的度规很简单，且能明确地写出。

我不知道这些话的全部含义是否清楚。让

我来解释一下。

黑洞是宏观物体，其质量从几个到几百万个太阳质量不等。只要它们能被当作是稳定的和孤立的，它们中的每一个都精确地由克尔解描述。这是宏观物体被精确描述的仅有的例子。我们周围看到的宏观物体都被各种力所支配，并由各种物理理论的各种近似所得出。与此相反，黑洞结构中的唯一要素是基本的时空概念。因此几乎由定义决定，它们是宇宙中最完美的宏观物体。广义相对论又为它们的描述提供了一个独特的两参量解族，所以它们也是最简单的物体。

回到黑洞的物理性质，研究它们的最好办法是检查它们对外界扰动，如对各种波入射的反应。这些研究显现出 Kerr 时空的解析的丰富性，而它是人们难以预料的。这不是一个推敲技术内容的时机。让我们满足于说，与每一先验的预料相反，所有标准的数学物理方程都能在克尔时空中精确求解。这些解预言了黑洞与外部世界相互作用时必会呈现的多种多样的物理现象。

黑洞的数学理论是一个十分复杂的课题。对这一理论的研究使我相信古代箴言的基本真理：

简明是真实的征兆，

美丽是真理的光辉。

（俞允强摘译自 *Reviews of Modern Physics* 1984 年第 56 卷第 2 期）

---

## 敬告读者

本期中有关《集成电路中的物理问题》专题的文章有陈志豪等写的《GaAs-绝缘薄膜界面和金属-绝缘薄膜-半导体（MIS）结的特性》和卢勗吾等写的《硅中杂质的物理行为》二文。

---

## 更正

1985 年第 6 期《物理》第 322 页图 1 中的说明文字“快乐快和慢中号俘获”应改为“快质子、快和慢中子俘获”。