

光学信息处理讲座

第九讲 傅里叶光学中的算符方法

曹其智 秦克诚

(南开大学物理系) (北京大学物理系)

傅里叶光学是光学信息处理的理论基础,它的基本内容是应用傅里叶变换方法来研究衍射、成象以及光学变换等问题,这些问题是作为近轴菲涅耳衍射问题来处理的。如果系统中有多个透镜,那么系统的输入-输出关系式就包含多重衍射积分,非常繁复,写出和推演都非常不便^[1]。但是,如果我们分析一下这些关系式,就可以看到,出现的基本演算只有有限几种。这样,就很适合于使用算符方法,对这些基本演算定义一些算符,用算符的代数运算代替积分运算。算符方法的优点是非常简洁,这不但简化了书写记号和数学推演,而且有助于揭示问题的物理实质,不致被数学的冗繁所掩盖。

近年来,算符方法在傅里叶光学中有较大的发展。光学中的算符方法最早是Vander Lugt^[2]于1966年对相干光学系统引入的。他注意到,二次位相因子是相干光学中遇到最频繁的函数,根据这个函数的运算性质,总结出一套算符代数规则以代替积分演算。然后,H. Butterweck在1977年从分析一般光学处理系统所受约束出发,引进一组算符使算符方法系统化^[3,4]。近四年来,以色列的M. Nazarathy和J. Shamir等人发表了一系列文章^[5-9],他们分析了傅里叶光学中的重要公式,提出四个(严格说是三个)基本算符,傅里叶光学的全部问题都可以归结为这四个基本算符的代数运算。他们的算符方法同Butterweck提出的基本相同,只是更便于对系统参量进行计算,并且被应用到光学的各个方面。本文就是对他们的算符方法的一个初步介绍。除此之外,D. Stoler^[10]还从近轴光学的传

播方程与量子力学薛定谔方程在形式上的相似出发,把量子力学中的算符方法移植到物理光学中来,这是在光学中引入算符方法的又一途径。

一、基本算符的定义

下面列出各个基本算符的定义,这些定义是Nazarathy不久前在Stanford大学J. Goodman教授研究组的报告会上给出的,同他们发表的文献中所给的有所不同,用起来更方便一些。我们用草写体字母代表算符,算符的参量放在其后的方括号里。

1. 二次位相因子算符 $\mathcal{Q}[c]$

$$\mathcal{Q}[c]u(x, y) = e^{i\frac{k}{2}c(x^2+y^2)}u(x, y), \quad (1)$$

其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是单色光的波矢量的绝对值。这个算符对一光场的作用表示光场乘上一个二次位相因子,因此,光场 $u(x, y)$ 穿越一个焦距为 f 的球面透镜之后可表示为

$$\mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right]u(x, y) = e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}u(x, y).$$

在傅里叶光学中,除了球面透镜的透过率函数之外,还有球面波照明因子、菲涅耳衍射的脉冲响应及其在频域对应的传递函数,也都是二次位相因子,因此使用 \mathcal{Q} 算符的地方是很多的。 $\mathcal{Q}[c]$ 看来象是一个普通函数,但实际是一算符,因为它所给出的二次位相因子的宗量是随它所作用的函数的宗量而定的。

2. 二维标度算符 $\mathcal{S}[b]$

$$\mathcal{V}[b]u(x, y) = bu(bx, by) \quad (2)$$

显然,这个算符描述放大倍数为 $\frac{1}{b}$ 的理想成像作用:象的尺寸是物的 $1/b$,复振幅则为 b 倍.此外,透镜产生的光学傅里叶变换的尺度也要用这个算符描述(见下).

3. 二维傅里叶变换算符 \mathcal{F}

$$\mathcal{F}u(x, y) = \frac{1}{j\lambda} \iint e^{-j\lambda(P_x x + P_y y)} \times u(x, y) dx dy. \quad (3)$$

同傅里叶变换的数学定义

$$F\{u(x, y)\} = \iint e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} \times u(x, y) dx dy$$

相比较,有

$$\mathcal{F}u(x, y) = \frac{1}{j\lambda} F\{u(x, y)\} \Big|_{f_x \rightarrow \frac{P_x}{\lambda}, f_y \rightarrow \frac{P_y}{\lambda}}$$

$\mathcal{F}u(x, y)$ 的宗量为 P_x, P_y , $F\{u(x, y)\}$ 的宗量是 f_x, f_y , 它们通过下式相联系: $P_x = \lambda f_x$, $P_y = \lambda f_y$, P_x, P_y 的意义是谐波传播的方向余弦.傅里叶光学中透镜实现的傅里叶变换

$$u_j(x_j, y_j) = \frac{A}{j\lambda f} \times \iint \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_j + yy_j)\right] \times u(x, y) dx dy$$

于是应表示为

$$u_j(x_j, y_j) = A\mathcal{V}\left[\frac{1}{f}\right]\mathcal{F}u(x, y),$$

式中右边两个算符相乘代表两个算符相继作用在其右的函数上,最右端的算符最先作用.

即 \mathcal{F} 作用于 $u(x, y)$ 上,然后 $\mathcal{V}\left[\frac{1}{f}\right]$ 再作用在 $\mathcal{F}u(x, y)$ 上.多个算符相乘仿此.

4. 自由空间传播算符 $\mathcal{R}[d]$

$$\mathcal{R}[d]u(x, y) = \frac{1}{j\lambda d} \times \iint e^{j\frac{k}{2d}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]} u(x, y) dx dy, \quad (4)$$

它表示平面 (x, y) 上的光场 $u(x, y)$ 在自由空间沿 z 方向传播到一个新平面 (x', y') 上的光场,参数 d 是两个平面的距离. $\mathcal{R}[d]u(x, y)$ 的定义与傅里叶光学中的菲涅耳衍射公式只差一个与 x, y 无关的常数因子 $\exp(jkd)$.

自由空间传播算符 $\mathcal{R}[d]$ 可以用前面三个算符表示出(见下节),因此它并不是基本算符.但是鉴于自由传播现象的重要性,我们仍把它列入基本算符,这样一共有四个基本算符.其中的两个 $\mathcal{Q}[c]$ 和 $\mathcal{R}[d]$ 描述实际物理系统(透镜和自由空间)的简化模型,另外两个 $\mathcal{V}[b]$ 和 \mathcal{F} 则只代表两种数学运算,描述光学系统的两种重要功能(成像和成空间傅里叶谱),这两种功能可通过透镜与自由空间两种光学元件的串接来实现. Butterweck^[3] 把这四个算符分别叫做透镜,自由空间、放大器和傅里叶变换器.

二、算符 $\mathcal{R}[d]$ 用其他算符的乘积表示

根据傅里叶光学中菲涅耳衍射公式的两种不同形式, $\mathcal{R}[d]$ 也有两种不同的表示形式.

第一种表示式对应于菲涅耳衍射公式的傅里叶变换形式.根据 $\mathcal{R}[d]$ 的定义(4)式,展开二次位相因子项,可得

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[d]u(\rho) &= \frac{1}{j\lambda d} e^{j\frac{k}{2d}\rho^2} \\ &\times \int e^{-jk\left(\frac{\rho'}{d}\right)\rho} \cdot \rho [e^{j\frac{k}{2d}\rho^2} u(\rho)] d\rho \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{V}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{F}\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]u(\rho), \end{aligned}$$

式中用向径 ρ 代替了坐标 (x, y) . 因此

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{V}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{F}\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]. \quad (5)$$

$\mathcal{R}[d]$ 的另一表示式对应于菲涅耳衍射积分的卷积形式.由(4)式有

$$\mathcal{R}[d]u(\rho) = h(\rho) * u(\rho), \quad (6)$$

式中

$$h(\rho) = \frac{1}{j\lambda d} \exp\left(j \frac{k}{2d} \rho^2\right)$$

是自由空间菲涅耳衍射的脉冲响应 [差一常因子 $\exp(jkd)$], 它对应的传递函数为

$$H(f_x, f_y) = F\{h(\rho)\} = e^{-j \frac{k d}{2} \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)}$$

把算符 \mathcal{F} 作用于(6)式两端, 利用傅里叶变换的定理以及 \mathcal{F} 同数学傅里叶变换的关系, 得

$$\mathcal{F} \mathcal{R}[d]u(\rho) = e^{-j \frac{k d}{2} \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \mathcal{F} u(\rho) \\ = \mathcal{Q}[-d] \mathcal{F} u(\rho),$$

因此

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q}[-d] \mathcal{F}, \quad (7)$$

式中 \mathcal{F}^{-1} 是 \mathcal{F} 的逆算符。

$\mathcal{R}[d]$ 的这两种表示式(5)和(7)非常重要, 下面将多次用到。

三、算符的基本性质和运算规则

首先, 四个基本算符都是线性的, 这从定义(1)–(4)式看很清楚。这反映了通常的(非强光的)光学系统的线性性质。

实际的光学系统由多个光学元件串接而成, 各个元件相继作用于光场上。因此, 我们关心的算符运算是算符的相乘。作为线性算符, 它们的乘法服从结合律, 但一般不满足交换律。表1给出了基本算符两两相乘的乘法表, 它们的证明是很容易的, 直接用定义即可。下面我们分别列出后面要用到的一些关系式。

$$1. \quad \mathcal{V}[b_1] \mathcal{V}[b_2] = \mathcal{V}[b_1 b_2], \quad (8)$$

$$2. \quad \mathcal{Q}[c_1] \mathcal{Q}[c_2] = \mathcal{Q}[c_1 + c_2], \quad (9)$$

$$3. \quad \mathcal{F} \mathcal{F} = \mathcal{V}[-1], \quad (10)$$

实际上, 这就是熟知的傅里叶变换性质

$$FF\{u(\rho)\} = u(-\rho)$$

在 \mathcal{F} 算符下的表现。

$$4. \quad \mathcal{R}[d_1] \mathcal{R}[d_2] = \mathcal{R}[d_1 + d_2]. \quad (11)$$

此式从定义(4)式出发来证明很麻烦。我们用(7)式, 则

$$\mathcal{R}[d_1] \mathcal{R}[d_2] u(\rho) \\ = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q}[-d_1] \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q}[-d_2] \\ \times \mathcal{F} u(\rho) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q}[-(d_1 + d_2)] \\ \times \mathcal{F} u(\rho) = \mathcal{R}[d_1 + d_2] u(\rho).$$

实际上, 由 $\mathcal{R}[d]$ 的物理意义, 这个性质是很明显的。 $\mathcal{R}[d]$ 代表单色光在自由空间的传播, $\mathcal{R}[d_1] \mathcal{R}[d_2]$ 表示接连传播 d_1 和 d_2 两段距离, 当然可以用传播总距离 $d_1 + d_2$ 的一个算符 $\mathcal{R}[d_1 + d_2]$ 来表示。

显然有 $\mathcal{R}[0] = 1$, $\mathcal{R}[-d] = \mathcal{R}[d]^{-1}$ 。 $\mathcal{R}[-d]$ 代表沿相反方向传播距离 d 。光场 $u(x, y)$ 沿 z 方向传播一段距离 d 到达第二平面后, 若又反向传播到原来平面, 则光场仍为 $u(x, y)$ 不变。这反映了自由空间中光场传播的倒易关系。

$$5. \quad \mathcal{V}[b] \mathcal{Q}[c] = \mathcal{Q}[cb^2] \mathcal{V}[b], \quad (12)$$

$$6. \quad \mathcal{F} \mathcal{V}[b] = \mathcal{V}\left[\frac{1}{b}\right] \mathcal{F}, \quad (13)$$

(13)式实际上就是傅里叶变换的标度定理: 函数宽度越窄, 则其傅里叶变换式的宽度越宽。

表 1

	\mathcal{V}	\mathcal{F}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}
\mathcal{V}	$\mathcal{V}[b_2] \mathcal{V}[b_1] = \mathcal{V}[b_1 b_2]$	$\mathcal{V}[b] \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{V}\left[\frac{1}{b}\right]$	$\mathcal{V}[b] \mathcal{Q}[c] = \mathcal{Q}[b^2 c] \mathcal{V}[b]$	$\mathcal{V}[b] \mathcal{R}[d] = \mathcal{R}\left[\frac{d}{b^2}\right] \mathcal{V}[b]$
\mathcal{F}	$\mathcal{F} \mathcal{V}[b] = \mathcal{V}\left[\frac{1}{b}\right] \mathcal{F}$	$\mathcal{F} \mathcal{F} = \mathcal{V}[-1]$	$\mathcal{F} \mathcal{Q}[c] = \mathcal{R}[-c] \mathcal{F}$	$\mathcal{F} \mathcal{R}[d] = \mathcal{Q}[-d] \mathcal{F}$
\mathcal{Q}	$\mathcal{Q}[c] \mathcal{V}[b] = \mathcal{V}[b] \mathcal{Q}\left[\frac{c}{b^2}\right]$	$\mathcal{Q}[c] \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{R}[-c]$	$\mathcal{Q}[c_2] \mathcal{Q}[c_1] = \mathcal{Q}[c_2 + c_1]$	$\mathcal{Q}[c] \mathcal{R}[d] = \mathcal{R}\left[\frac{d^{-1}}{c + c^{-1}}\right] \mathcal{V}[1 + cd] \cdot \mathcal{Q}[(c^{-1} + d)^{-1}]$
\mathcal{R}	$\mathcal{R}[d] \mathcal{V}[b] = \mathcal{V}[b] \mathcal{R}[b^2 d]$	$\mathcal{R}[d] \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{Q}[-d]$	$\mathcal{R}[d] \mathcal{Q}[c] = \mathcal{Q}[(c^{-1} + d)^{-1}] \mathcal{V}[(1 + cd)^{-1}] \cdot \mathcal{R}[d^{-1} + c^{-1}]$	$\mathcal{R}[d_2] \mathcal{R}[d_1] = \mathcal{R}[d_2 + d_1]$

四、透镜系统产生傅里叶变换

一个透镜系统由有限个透镜和它们之间的自由空间构成,因此可用 \mathcal{Q} 算符和 \mathcal{R} 算符的连乘描述,简称为 \mathcal{Q} - \mathcal{R} 系统。

由(5)式,

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{F}\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right],$$

即算符 \mathcal{R} 中本来就包含有光学傅里叶变换 $(\mathcal{F}\left[\frac{1}{d}\right]\mathcal{F})$, 但左右两端各加上一个二次位相因子算符, 也就是说, 自由空间传播实质上是一个完善的光学傅里叶变换被左右两个二次位相因子干扰的结果。要使一个自由空间传播过程转换为傅里叶变换, 只需设法消去 \mathcal{R} 中的两个 \mathcal{Q} 算符。若同时消去了左右两个 \mathcal{Q} 算符, 就得到完善的傅里叶变换; 若只去掉右 \mathcal{Q} 算符, 结果是傅里叶变换附加一个二次位相因子。若只去掉左 \mathcal{Q} 算符, 则所得到的不是傅里叶变换而是非涅耳变换。

由于透镜相当于一个二次位相因子透明片, 所以只要在适当位置上插入透镜, 就可以设法消去二次位相因子, 得到各种实现傅里叶变换的光路。下面讨论一些能实现傅里叶变换的透镜系统的例子。

1. 平行光照明, 紧贴输入平面放置一个焦距为 f 的正透镜[图 1(a)]。可以求出, 在距离透镜为 f 的平面(透镜的焦平面)上, 光场复振幅为

$$\begin{aligned} u'(\rho') &= \mathcal{R}[f] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] u(\rho) \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{f}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{f}\right] \mathcal{F} u(\rho). \end{aligned}$$

上面用了 \mathcal{R} 算符的展开式(5)式。受 $u(\rho)$ 调制的光场在自由传播距离 f 之前先经过焦距为 f 的透镜, 透镜抵消了 \mathcal{R} 中的右二次位相因子, 因此得到带二次位相因子的光学傅里叶变换。

实际上, $u(\rho)$ 不一定紧贴透镜, 它可以放

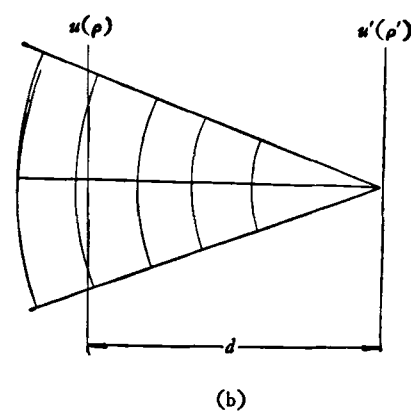
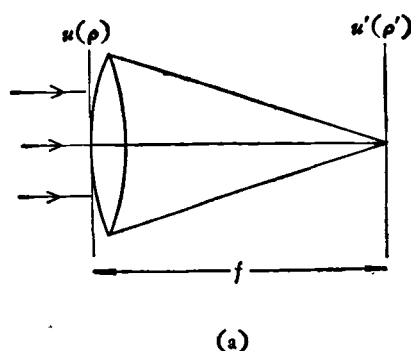


图 1

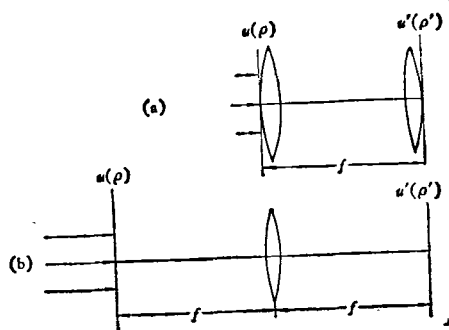


图 2

在透镜之后的任意位置, 只要输出平面是在透镜产生的会聚球面波的会聚点上。或者说, 用一个会聚球面波照明输入函数 $u(\rho)$, 在球面波会聚点所在平面上将得到输入函数的带二次位相因子的傅里叶变换[图 1(b)]。其原因是, 会聚球面波本身带有的二次位相因子抵消了 \mathcal{R} 中的右二次位相因子。

2. 从上例很容易想到, 如果要把 \mathcal{R} 中的

左二次位相因子也消去,以得到一个完善的光学傅里叶变换系统,那只要在输出平面前再加一个焦距也是 f 的正透镜就行了[图 2(a)]. 这时

$$\begin{aligned} u'(\rho') &= \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] \mathcal{R}[f] \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] u(\rho) \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{f}\right] \mathcal{F} u(\rho). \end{aligned}$$

同通常使用的实现完善的傅里叶变换的 f - f 系统[图 2(b)] 相比,本系统以多用一块透镜为代价,使输入-输出平面间的距离缩短为一个焦距. 这不但使光学信息处理系统的结构紧凑,缩短了工作台的尺寸,而且考虑到透镜的孔径为有限大小,这还有效地改善了渐晕效应.

3. 最一般的傅里叶变换光路如图 3 所示. 它不是由平行光而是用一个点光源 S 照明, 输出平面在点光源的象 S' 所在的平面上. 平行光照明系统是本系统当点光源趋于无穷远时的特例. 下面证明, 输出平面上的复振幅分布 $u'(\rho')$ 是输入光场复振幅 $u(\rho)$ 的带二次位相因子的傅里叶变换.

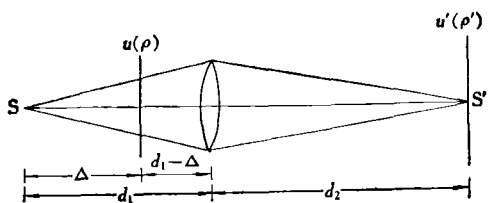


图 3

令 T 代表从 $u(\rho)$ 到 $u'(\rho')$ 的变换, 即

$$\begin{aligned} u'(\rho') &= T u(\rho). \\ T &= \mathcal{R}[d_2] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] \mathcal{R}[d_1 - \Delta] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{\Delta}\right] \\ &= \left(\mathcal{R}[d_2] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] \mathcal{R}[d_1]\right) \\ &\quad \cdot \left(\mathcal{R}[-\Delta] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{\Delta}\right]\right) = T_1 \cdot T_2, \end{aligned}$$

其中 $T_1 = \mathcal{R}[d_2] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] \mathcal{R}[d_1]$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F} \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_1}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_1}\right] \mathcal{F} \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right]. \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$,

所以 $\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_1}\right] = 1$.

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F} \\ &\quad \times \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_1}\right] \mathcal{F} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{d_1}{d_2}\right] \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{d_1}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{d_1}{d_2^2}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right]. \\ T_2 &= \mathcal{R}[-\Delta] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{\Delta}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{\Delta}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{1}{\Delta}\right] \mathcal{F}. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cdot T_2 = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{d_1}{d_2^2}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right] \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{\Delta}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{1}{\Delta}\right] \mathcal{F} \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{d_1}{d_2^2}\right] \mathcal{Q}\left[-\frac{d_1^2}{\Delta d_2^2}\right] \\ &\quad \times \mathcal{F}\left[\frac{d_1}{d_2 \Delta}\right] \mathcal{F} \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2} + \frac{d_1}{d_2^2} \left(1 - \frac{d_1}{\Delta}\right)\right] \mathcal{F}\left[\frac{d_1}{d_2 \Delta}\right] \mathcal{F}. \end{aligned}$$

因此, 这是一个带二次位相因子的光学傅里叶变换. 如果不用算符方法, 推导将要冗繁得多.

五、透镜系统成象

我们只举两个实物实象的透镜系统为例，来说明算符方法的应用。

1. 两透镜成象系统(如图 4 所示)

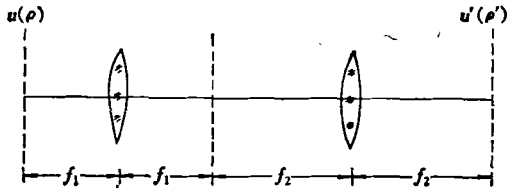


图 4

实际上这是一对完善的光学傅里叶变换系统的串接。

令 $u'(\rho') = Tu(\rho)$ ，则 T 为两个光学傅里叶变换算符的相乘，即

$$\begin{aligned} T &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{f_2}\right] \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{f_1}\right] \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{f_2}\right] \mathcal{F}[f_1] \mathcal{F} \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}\left[-\frac{f_1}{f_2}\right]. \end{aligned}$$

因此，这个成象系统的放大率为 $-\frac{f_2}{f_1}$ ，而且不带二次位相因子。通常所用的 $4f$ 系统就是这个系统当 $f_1 = f_2 = f$ 时的特例。

2. 单透镜成象系统

最简单的透镜成象系统如图 5 所示。

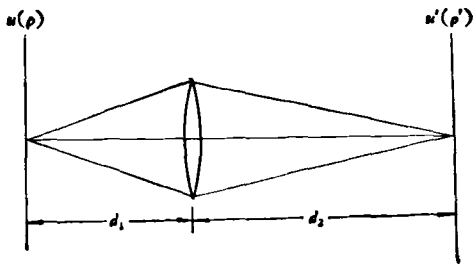


图 5

$$\begin{aligned} T &= \mathcal{R}[d_1] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right] \mathcal{R}[d_1] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F} \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_1}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &\quad \times \mathcal{F} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当} \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} &= \frac{1}{f}, \\ \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_1}\right] &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad T &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F} \mathcal{F}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &\quad \times \mathcal{F} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{d_1}{d_2}\right] \mathcal{F} \mathcal{F} \\ &\quad \times \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right] = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \\ &\quad \times \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_1}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d_2}\right] \mathcal{Q}\left[\frac{d_1}{d_2^2}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right] \\ &= \mathcal{Q}\left[\frac{d_1 + d_2}{d_2^2}\right] \mathcal{F}\left[-\frac{d_1}{d_2}\right]. \end{aligned}$$

因此，这是一个放大率为 $-\frac{d_2}{d_1}$ ，带有位相因子 $\exp\left(-j \frac{k}{2} \frac{d_1 + d_2}{d_2^2} \rho^2\right)$ 的成象系统。

六、用算符方法讨论柱面透镜系统

柱面透镜是光学信息处理系统中另一重要元件。J. Shamir 在 1979 年讨论了任意方位的柱面透镜的算符表示及其性质^[6]。文中还介绍了一些球面透镜-柱面透镜组合系统，并用算符代数证明它们能用来作实时的卷积和相关运算。

这里我们只介绍任意方位柱面透镜的算符

表示,并推导两个组合柱面透镜系统的性质。

1. 任意方位柱面透镜的透射率算符

同球面透镜相比,柱面透镜只在一个方向上使入射光波的波前变形,即附加一个二次位相因子。因此很自然会想到,任意方位的柱面透镜的透过率,是以方位角为参量的二次位相因子。我们用 $\mathcal{L}[\alpha; f]$ 来表示一个和 y 轴夹角为 α 、焦距为 f 的柱面透镜(图 6)的透射率算符。

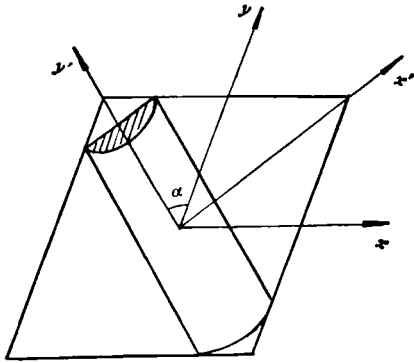


图 6

若柱面透镜紧贴在输入函数 $u(x, y)$ 上。经过柱面透镜后,光场复振幅分布为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha; f]u(x, y) &= e^{-i\frac{k}{2f}x'^2} u(x, y) \\ &= e^{-i\frac{k}{2f}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2} u(x, y) \\ &= e^{-i\frac{k}{2f}(\sin\alpha)xy} \cdot e^{-i\frac{k}{2f}x^2\cos^2\alpha} \\ &\quad \cdot e^{-i\frac{k}{2f}y^2\sin^2\alpha} u(x, y). \end{aligned}$$

引入一个新算符 $\mathcal{C}[a]$, 其定义为

$$\mathcal{C}[a]u(x, y) = e^{i\frac{k}{2}axy} u(x, y);$$

又定义一维的二次位相因子算符如下:

$$\mathcal{Q}_x[d]u(x, y) = e^{i\frac{k}{2}dx^2} u(x, y),$$

$$\mathcal{Q}_y[d]u(x, y) = e^{i\frac{k}{2}dy^2} u(x, y),$$

则

$$\mathcal{L}[\alpha; f] = \mathcal{C}\left[-\frac{\sin 2\alpha}{f}\right]$$

$$\times \mathcal{Q}_x\left[-\frac{\cos^2\alpha}{f}\right] \mathcal{Q}_y\left[-\frac{\sin^2\alpha}{f}\right]. \quad (14)$$

因此,柱面透镜的透射率算符是两个一维位相算符和 \mathcal{C} 算符的乘积。显然当 $\alpha = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\mathcal{L}[0; f] = \mathcal{Q}_x\left[-\frac{1}{f}\right],$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\pi}{2}; f\right] = \mathcal{Q}_y\left[-\frac{1}{f}\right].$$

由(14)式可以看出,若设法消去因子 \mathcal{C} , 则 \mathcal{L} 就简化为两个一维的二次位相因子算符的乘积。进一步调整两个位相因子的参数,可以得到一些有特殊功能的透镜系统。由于算符 \mathcal{C} 具有这样的性质:

$$\mathcal{C}[a_1]\mathcal{C}[a_2] = \mathcal{C}[a_1 + a_2]$$

和

$$\mathcal{C}[0] = 1,$$

所以若用两块不同方位的柱面透镜组合,算符 \mathcal{C} 是可能消去的。

2. 两块柱面透镜的组合

设有两块焦距相同的柱面透镜对称于 y 轴放置,透镜与 y 轴的夹角分别为 α 和 $-\alpha$, 如图 7 所示。这时就能把算符 \mathcal{C} 消去,系统总的透射率算符为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha; f]\mathcal{L}[-\alpha; f] \\ = \mathcal{Q}_x\left[-\frac{2\cos^2\alpha}{f}\right] \mathcal{Q}_y\left[-\frac{2\sin^2\alpha}{f}\right]. \end{aligned}$$

让我们考虑下面两种特殊情况:

(I) 令 $\alpha = 45^\circ$, 此时

$$\mathcal{L}[\alpha; f]\mathcal{L}[-\alpha; f] = \mathcal{Q}_x\left[-\frac{1}{f}\right]$$

$$\times \mathcal{Q}_y\left[-\frac{1}{f}\right] = \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f}\right],$$

系统相当于一块同样焦距的球面透镜。

(II) 令 $\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$, 即 $\alpha = \text{tg}^{-1}\sqrt{2} = 54^\circ 44'$, 并令 $f' = \frac{f}{2\sin^2\alpha} = \frac{3}{4}f$, 此时

$$\mathcal{L}[a; f] \mathcal{L}[-a; f]$$

$$= \mathcal{Q}_x \left[-\frac{1}{2f'} \right] \times \mathcal{Q}_y \left[-\frac{1}{f'} \right].$$

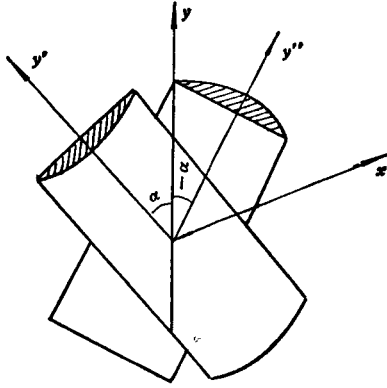


图 7

如果把输入函数透明片放在该系统之前 $2f'$ 处，则在系统后 $2f'$ 处的平面上，沿 x 方向将会成谱（输入函数的傅里叶变换），沿 y 方向则成象。这种元件在许多装置（如彩虹全息）中都有应

用。同人们曾经采用过以达到上述目的的透镜组^[11,12]比较，两个柱面透镜组合的系统在调整和使用上都更简便些。

参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, (1968).
- [2] A. Vander Lugt, Proc. IEEE, 54(1966), 1055—1063.
- [3] H. J. Butterweck, J. Opt. Soc. Am., 67(1977), 60—70.
- [4] H. J. Butterweck, Progress in Optics, V.XIX (1981), 213—280.
- [5] M. Nazarathy et al., J. Opt. Soc. Am., 70(1980), 150—158.
- [6] J. Shamir, Appl. Opt., 18(1979), 4195—4202.
- [7] M. Nazarathy et al., J. Opt. Soc. Am., 71(1981), 529—541.
- [8] M. Nazarathy et al., J. Opt. Soc. Am., 72(1982), 356—364.
- [9] M. Nazarathy et al., J. Opt. Soc. Am., 72(1982), 1398—1408.
- [10] D. Stoler, J. Opt. Soc. Am., 71(1981), 334—341.
- [11] R. J. Marks et al., Appl. Opt., 16(1977), 739.
- [12] J. W. Goodman et al., Appl. Opt., 16(1977), 733.

（上接第127页）

获得分子络合物的生成情况、几何构型以及热力学函数等信息。

由于 MI-FTIR 技术已被公认为研究分子振动光谱的一种有用手段，而分子的基体隔离红外光谱与相应的气相分子光谱之间确实有区别，即作为基体的惰性分子与客体分子之间的相互作用是确实存在的，因此研究基体分子对多类物种振动光谱的影响，已成为一个引人注

目的新领域。这类研究不仅能够进一步解释基体隔离红外光谱，而且还能提供固态分子之间相互作用力的有用的信息。

参 考 文 献

- [1] I. R. Dunkin, Chem. Soc. Rev., 9(1980), 1.
- [2] G. Manimantov et al., Appl. Spectrosc., 36(1982), 339, 348.

专 题 预 告

本刊从第 4 期起将连续刊登《集成电路中的物理问题》专题。专题包括硅中微缺陷及其形成过程；硅中的扩散；金属硅化物的形成；半导体中深能级杂质缺陷；金属半导体接触的电流机制；硅-二氧化硅系统中的电荷；MOS 物理基础；集成电路技术的一些物理限制；光电子与俄歇电子在 X 射线光刻中的影响；电子散射效应对电子束光刻的影响；集成电路对硅材料的要求；硅片表面制备中的损伤问题；吸除工艺；硅中杂质；硅中杂质的物理行为；离子注入的辐照损伤；IC 中的可靠性问题；几种集成电路硅片工艺检测技术简介；直拉单晶中的氧沉淀；调制掺杂高迁移率器件；GaAs-绝缘膜界面和 MIS 结的特性等。这些题目将分别在《讲座》栏、《物理学和经济建设》栏、《知识和进展》栏和《实验技术综述》栏刊出。