

# 光学信息处理讲座

## 第十讲 相干光 Hough 变换

董 碧 珍

(中国科学院物理研究所)

### 一、引 言

在一幅图象中, 图象边界的形状通常包含物体的某些具体特征, 它对人的视觉系统是很重要的。在许多场合下, 人的视觉系统在接收图象边界形状的信息后就足以识别物体了。从一幅图象中提取边沿象的方法是借助各种边沿运算器, 例如梯度运算器、Hueckel 运算器, 它们是分别根据图象中局域灰度的斜波式或阶跃式的改变来提取边沿信息的, 所得到的边沿象称作形状函数。Hough 变换在处理由线段元组成的形状函数方面, 特别奏效。它实质上是一种图象形状描述器。

Hough 变换将  $x-y$  平面上的点, 通过关系式  $p = x \cos \theta + y \sin \theta$ , 变换到  $p-\theta$  平面上的正弦式曲线, 而  $x-y$  平面上的直线在变换平面  $p-\theta$  上成了一个点。因此, 组成一幅图象的边界的诸线段将对应于变换平面上的同一点。任何一幅只包含边沿基元的图形, 即所谓形状函数, 总是可以用一组十分逼近它的线段元集合来表示。Hough 变换将此线段元集合变换到更少的特征空间中, 在这个小小的空间内, 已经包含边缘图形的全部信息, 这就构成 Hough 变换形状描述器。在图象分析和特征识别中, Hough 变换形状描述器是一种十分有效的图象边界形状描述器<sup>[1]</sup>, 因而引起人们的很大兴趣。

最近, Deans 指出二维图形的 Hough 变换等价于正 Radon 变换 (FRT)<sup>[2]</sup>。实际上, 可以证明, 应用于检测图形 (诸如矩形、椭圆, 或抛物线) 的 Hough 变换的广义形式是等价于广义形

式的 FRT。广义的 FRT 将二维的形状函数变换到一个多维的特征空间中。Radon 变换理论不仅可应用于特征识别, 而且还可以应用于核医学、核磁共振成象、固体中电子动量分布的确定、散射理论以及等离子体诊断等诸领域。当用数字方法构成和重现 Radon 变换已经成熟到切实可行时, 用光学模拟方法重现 Radon 变换, 自然而然地被提到日程上, 成为很有意义和有实用价值的研究课题了。近来, 人们已开展相干光和非相干光的 Radon 变换的重现技术方面的研究, 并获得较大进展。Barrett 利用非相干光 FRT 处理器来实现多维的卷积、相关运算和频谱分析<sup>[3]</sup>。这个处理器是由一系列一维的光学 Radon 变换处理器构成的。

本文将讨论相干光实现 FRT 的各种方法。

### 二、Radon 变换

FRT 可以在一组空间中和任意维数下定义, 如果  $f(x, y)$  是二维的输入分布函数, 它的 FRT 在矢量记号下可写成

$$\hat{f}(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{X}) \delta(p - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{X}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{X} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y,$$

$$\boldsymbol{\xi} = \cos \theta \mathbf{a}_x + \sin \theta \mathbf{a}_y = \xi_1 \mathbf{a}_x + \xi_2 \mathbf{a}_y.$$

$\hat{f}(p, \theta)$  是输入函数  $f(\mathbf{X})$  受到 Delta 函数形式的、空间可变的、脉冲响应函数的光学系统变换后的输出信号。可以认为变换参数  $p, \theta$  是定义在  $p-\theta$  平面上的一个矩形栅格。变换平面上的一点  $(p, \theta)$  对应于  $x-y$  平面上的一条线。这

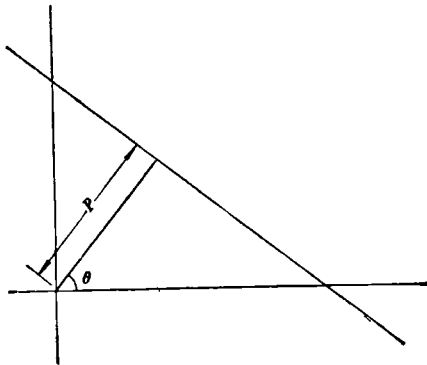


图1 输入平面和 Radon 变换平面上的几何坐标关系

里,  $p$  代表该线上的点与原点之间的最短距离,  $\theta$  是这个最短弦与正向  $x$  轴之间的夹角 (如图 1 所示)。反之, 通过  $x-y$  平面上某一点  $(x, y)$  的直线对应于  $p-\theta$  平面上的正弦曲线:

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (2)$$

由于这些性质, 使得 FRT 具有检测线段的能力。

FRT 的一个重要性质是空域内两个二维输入函数  $f_1(\mathbf{X})$  和  $f_2(\mathbf{X})$  的卷积:

$$f(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathbf{Y}) f_2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}, \quad (3)$$

它的 FRT 是

$$\hat{f}(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\theta, t) \hat{f}_2(\theta, p - t) dt. \quad (4)$$

(4) 式表示空域内两个二维函数卷积的 FRT 是 Radon 变换 (RT) 域内二个相应的输入函数的 FRT 的一维卷积。Radon 变换具有把二维卷积转换为一维卷积的能力, 这个性质可以推广到高维情形。正是由于这个性质, 可以降低多维相关运算、卷积运算和谱分析的维数, 并只需用一维声光信号处理器即可实现诸运算。

### 三、产生 Hough 变换的光学方法<sup>[4]</sup>

相干光实现 FRT 运算的出发点, 是用简单的光学元件的组合去直接实现 (5) 式中的积分运算。

$$\hat{f}(p, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy. \quad (5)$$

这里的积分核是空间可变的 Delta 型函数。要实现这个积分运算, 与处理其他类似积分核函数一样, 通过平动或转动, 设法将空间可变的核函数变换为空间不变的核函数。

如果坐标轴  $(x, y)$  被旋转  $\theta$  角, 那末, 新的坐标轴  $(u, v)$  是

$$\begin{aligned} u &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

在转动后的坐标系中, 输入透明片记作  $f_{\theta}(u, v)$ , 它的 FRT 的输出可以用空间不变的核的运算来表示:

$$\hat{f}(p, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(u, v) \delta(p - u) du dv. \quad (7)$$

这个积分既可在空域内也可在频域内进行运算。

例如, 在空域内, 积分 (7) 式可用下述方式实现: 首先将转动后的函数沿  $v$  轴用电子学方法加以积分, 然后用二维相干光处理器 (象散处理器) 完成第二个积分。或者采用二维的多路全息处理器来直接实现 (5) 式中的空间可变的脉冲响应函数的运算。

在频域内, 由于方程 (7) 式的核函数是空间不变的, 所以可进行滤波运算。设转动后的输入透明片的傅氏变换记作  $F_{\theta}(z, \omega)$ , 那末, 它的 FRT 是

$$\hat{f}(p, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_{\theta}(z, \omega) H_{\theta}(z, \omega; p, \theta) dz d\omega, \quad (8)$$

这里滤波函数是

$$H_{\theta}(z, \omega; p, \theta) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \delta(\omega) \exp(-jz p). \quad (9)$$

这个滤波器可以用一个狭缝和线性相移劈组成。因此, 我们提出应用图 2 所示的相干光傅氏光学处理器来实现 FRT 运算。

在我们的实验装置中, 输入透明片放在  $P_1$  平面上, 滤波器的一个组元是窄狭缝, 它安放在  $P_2$  变换平面处。滤波器的另一个组元是一维线

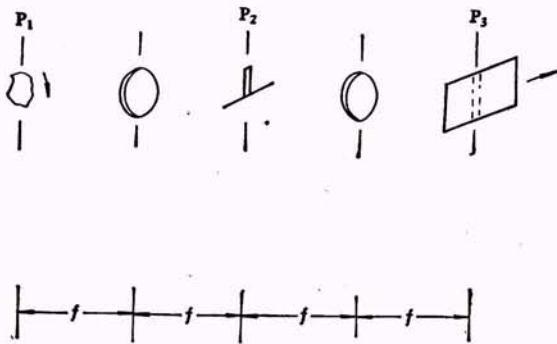


图2 相干光傅里叶变换光学系统用于实现 FRT 运算

性相移器，它是由图 2 中的第二个傅里叶变换透镜和安放在输出平面  $P_3$  上的一个狭缝组成的。记录片位于  $P_3$  平面上。固定某一  $\theta$  值，如  $\theta_0$ ，FRT 的一组结果被记录下来，然后旋转  $P_1$  平面上的输入片，转动到  $\theta_1$  角，同时将记录片线性地平移一距离，对应于这个  $\theta_1$  的输入透明片的一组新的 FRT 的输出又被记录下来。仿此类推，对应于各种  $\theta$  角的输入透明片的 FRT 的输出信号都将按次序记录下来。图 3(a) 是一幅由四条不同倾斜角度的线构成的模型图象，它的实验结果示于图 3(b) 中。FRT 的每组之间的角度间隔为  $45^\circ$ ，从左到右，对应于

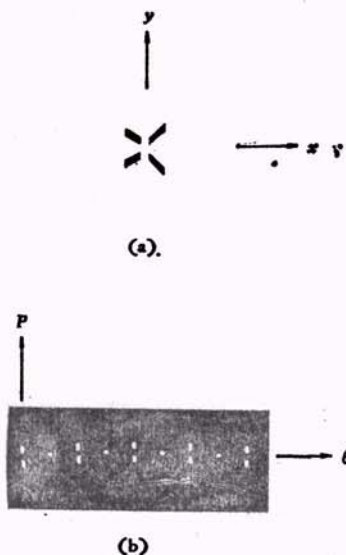


图3 用图2的光学系统产生的实验结果

- (a) 为输入透明片；  
(b) 为 FRT 的实验结果，图中垂直轴为  $p$ ，水平轴为  $\theta$

$0-360^\circ$ 。对图 3(a) 的同一输入透明片，采用计算机计算的 FRT 的结果如图 4 所示。可以看出，计算机产生的 FRT 的结果与实验得到的结果是一致的。

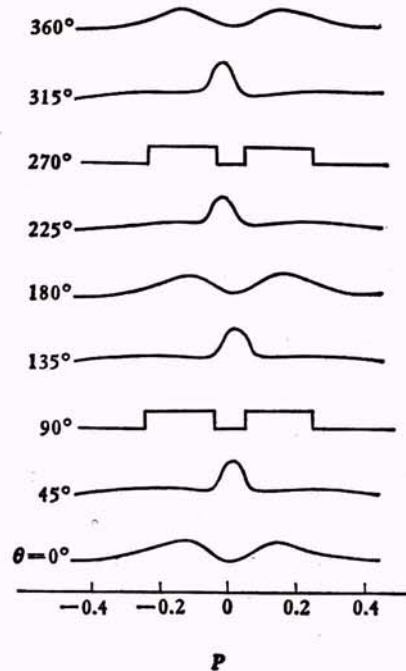


图4 计算机产生的 FRT 的计算结果

应用 Delta 函数的不同表达式可以导出产生 FRT 运算的各种系统。由此可以提出光学模拟 FRT 运算的各种形式。FRT 中的核函数即空间可变的脉冲响应，具有四个变量，我们可以孤立出任何一个特殊变量，然后推导出 FRT 的新的表达式。例如，我们考虑从笛卡尔坐标  $(x, y)$  到圆柱坐标  $(r, \phi)$  的变换：

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi. \quad (10)$$

在圆柱坐标系中，FRT 的核函数是

$$h(r, \phi; p, \theta) = \delta[p - r \cos(\theta - \phi)]. \quad (11)$$

利用 Delta 函数的基本性质，(11) 式可用径向变量表示：

$$h(r, \phi; p, \theta) = \delta[r - p / \cos(\theta - \phi)] / |\cos(\theta - \phi)|. \quad (12)$$

或者借助于角度变量来表示：

$$h(r, \phi; p, \theta) = \delta[\phi - \theta + \cos^{-1}(p/r)] / r [1 - (p/r)^2]^{1/2}. \quad (13)$$

Delta 函数的这些表达式将导出 FRT 新的表达式。

输入函数  $f(r, \phi)$  可表示成角度的傅里叶级数形式:

$$f(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) \exp(-jn\phi), \quad (14)$$

其中

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \phi) \exp(jn\phi) d\phi. \quad (15)$$

将(13)和(14)式代入(5)式中,可得到

$$\hat{f}(p, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-jn\theta) \hat{f}_n(p), \quad (16)$$

这里

$$\hat{f}_n = \int_0^{\infty} f_n(r) [1 - (p/r)^2]^{1/2} \cdot \exp[-jn \cos^{-1}(p/r)] dr. \quad (17)$$

这样, FRT 被表达为角度变量的周期傅里叶级数和沿径向是一个正向圆变换。Hansen 和 Goodman 讨论了相干光实现逆圆变换的方法<sup>[5]</sup>。正和逆圆变换的核是十分类似的。因此, 两者变换都可用同样的光学系统来实现。

现在, 利用(12)式的核函数的第二种径向表达式, 导出 FRT 的另一个不同的表达式。设输入函数为

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \cdot j \cdot \int_{Br} G(\omega, \phi) \exp(j\omega r) d\omega, \quad (18)$$

其中

$$G(\omega, \phi) = \int_0^{\infty} f(r, \phi) \exp(-\omega r) dr \quad (19)$$

是输入函数的径向拉普拉斯变换, Br 代表 Bromwich 积分路径, 它是估算逆拉普拉斯变换时所必需采用的。再将(18)和(12)式代入(1)式中, 则可得到 FRT 的新的表达式:

$$\hat{f}(p, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot j \cdot \int_{Br} G_\theta(\omega; p, \theta) d\omega, \quad (20)$$

这里

$$G_\theta(\omega; p, \theta) = p \int_{-e^{-1}}^{e^{-1}} \frac{(1-u^2)^{1/2}}{u G[\omega, \cos^{-1}(1/u) + \theta]} \cdot \exp(-pu\omega) du. \quad (21)$$

此处又一次将二维积分分解为两个一维积分。拉普拉斯变换运算的光学实现方法已为人们所知<sup>[6]</sup>。应用象散处理器可以实现(21)式中的第二个积分<sup>[7]</sup>。

光学实现 FRT 运算的另一个方法是基于坐标形变技术。坐标形变的光学方法也被人们讨论过<sup>[8]</sup>。

我们考虑 Delta 函数作如下展开:

$$\delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j\omega(p - x \cos \theta - y \sin \theta)] d\omega. \quad (22)$$

利用这个式子, FRT 可表示成

$$\hat{f}(p, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \cdot \exp(-j\omega p) d\omega, \quad (23)$$

其中

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] dx dy. \quad (24)$$

同样地可以利用坐标变换和一维傅里叶变换来完成(23)式的积分运算。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] P. V. C. Hough, U. S. Patent 3,069, 654(1962).
- [ 2 ] J. Radon, *Ber. Seachs. Akad. Wiss. Leipzig*, **69** (1917), 262.
- [ 3 ] H. H. Barrett, *Opt. Lett.*, **7**(1982), 248.
- [ 4 ] G. Eichmann and B. Z. Dong, *Appl. Opt.*, **22** (1983), 830.
- [ 5 ] E. W. Hansen and J. W. Goodman, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **231**(1980), 222.
- [ 6 ] J. W. Goodman, *Optical Data Processing* ed. Springer, New York, (1980).
- [ 7 ] R. J. Marks II et al, *Appl. Opt.*, **16**(1977), 739.
- [ 8 ] D. Casasent et al., *Appl. Opt.*, **15**(1976), 1795.