光在双轴晶体中的传播

谢 建 平
(中国科学技术大学物理系)

单轴晶体中光的传播情况已为人们所熟知．它的物理图象简单清晰，也便于定量计算．双轴晶体中光的传播要复杂得多[1]，且不便于定量计算．本文的分析表明，单色平面波在双轴晶体中传播时，相应的两光振动是处在这样两个平面内，即由波法线分别和两个晶体光轴所成平面的两个平分平面内．与单轴晶体相类似，我们定义这两个平分平面为两光的主平面，相应的两光线也分别处在这两个主平面内，其方向与波法线方向之间有明确的关系．在晶体界面上的双折射中，两光波法线都满足折射定律，两光线方向也可随之确定．

一、一般描述

若单色平面波在晶体中的波法线为 $\boldsymbol{S}$，两个相互垂直的振动 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$(即电位移矢量)都垂直于 $\boldsymbol{S}$ 方向．通过折射率椭球原点作 $\boldsymbol{S}$ 的垂直平面，该平面与椭球相截得到的椭圆长短半轴即为两光的振动方向，其长度为两光的折射率．取 xyz 为双轴晶体的主轴系统，$x'y'z'$ 为新坐标系，z' 与波法线 $\boldsymbol{S}$ 重合，它们之间的变换为

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ y & \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ z & \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{array}. \qquad (1)$$

那么，光振动 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 就在 $x'y'$ 平面内．令 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 与 x' 轴的夹角分别为 p 和 $p+90°$ 角，$\boldsymbol{D}$ 的长度为 R，应满足折射率椭球方程

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1.$$

在 $z'=0$ 的平面上所截得的椭圆为

$$R^2\left[\cos^2 p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{n_i^2}+\sin^2 p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\beta_i}{n_i^2}+\sin 2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\alpha_i\cos\beta_i}{n_i^2}\right]=1, \qquad (2)$$

其中 n_i 分别为 $n_1=n_x$, $n_2=n_y$, $n_3=n_z$，是晶体的主轴折射率．由 $\frac{dR}{dp}=0$，可给出椭圆长短半轴的方向即 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的方向为

$$\operatorname{tg}2p=\frac{2\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\alpha_i\cos\beta_i}{n_i^2}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{n_i^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\beta_i}{n_i^2}}=\frac{c}{a-b}, \qquad (3)$$

这里

$$c=2\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\alpha_i\cos\beta_i}{n_i^2},$$

$$a=\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{n_i^2},$$

$$b=\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\beta_i}{n_i^2}.$$

相应的折射率为

$$n_1(\text{和 } n_2)=\left\{\frac{1}{2}\left[(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2+c^2}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

显然当波法线 z' 在两光轴上时，$n_1=n_2$，可得到光轴的方向为

$$\sin\Omega=\pm\frac{n_z\sqrt{n_y^2-n_x^2}}{n_y\sqrt{n_z^2-n_x^2}}, \qquad (5)$$

式中 Ω 为光轴与 x 轴的夹角．

我们把波法线 $\boldsymbol{S}$ 和光轴 I, II 所成平面的平分面定义为两光的主平面．可以证明 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$

分别处于这两个主平面内．为了简便，采用图1的坐标关系，y' 轴在 zz' 平面内，x' 轴在 xy 平面内，这样(1)式中的余弦因子可方便得到．z' 轴和光轴 I, II 所成的平面与 $x'y'$ 面的交线 OA 和 OA' 都垂直于 z' 轴．若它们与 x' 轴分别成 α_1 和 α_2 角，其分角线就与 x' 轴成 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ 和 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+90^\circ$ 角，如图2所示．

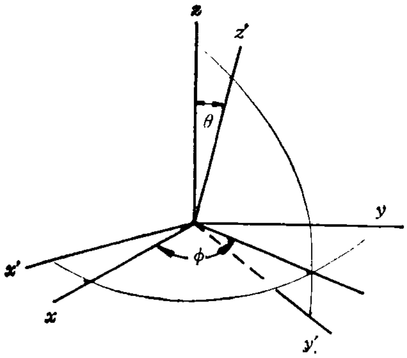

图1　坐标关系

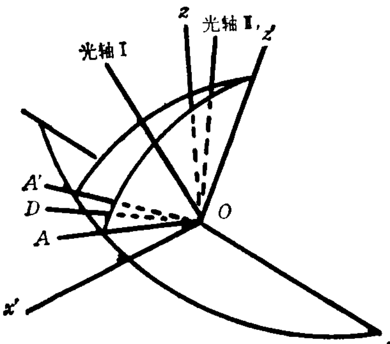

图2　主平面示意图

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y'}{x'}$$

$$=\frac{\sin\Omega\cos\theta\sin\phi-\cos\Omega\sin\theta}{\sin\Omega\cos\phi},$$

同理

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{y'}{x'}$$

$$=\frac{\sin\Omega\cos\theta\sin\phi+\cos\Omega\sin\theta}{\sin\Omega\cos\phi}. \quad (6)$$

由(3)式和(6)式可得

$$\operatorname{tg}2p=\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2). \quad (7)$$

$\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 就处在 z' 与光轴 I 和 II 所成平面的两个平分平面上．

由光线的几何理论知道，光线及其振动 E 也处在 $\boldsymbol{DS}$ 组成的两个主平面上[2]，光线和波法线的夹角由下式给出：

$$\cos\mu=\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{E}|}=\left[\cos^2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{n_i^2}+\sin^2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\beta_i}{n_i^2}+\sin2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\alpha_i\cos\beta_i}{n_i^2}\right]\cdot\left[\cos^2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{n_i^4}+\sin^2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\beta_i}{n_i^4}+\sin2p\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\alpha_i\cos\beta_i}{n_i^4}\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

E 在主平面内向折射率小的方向偏转，光线方向向折射率大的方向偏转．

二、晶体界面上的双折射

光在双轴晶体界面上产生双折射，要确定晶体中折射光的传播方向是复杂的[3]，在此我们给出折射光方向的计算表示式．

取入射和折射平面分别为 $y'z'$ 和 $x'z'$ 面，它们和晶体主轴坐标 xyz 的关系由晶体切制时所决定的，其方向余弦可由(1)式表示．令 z'' 轴为折射光法线，处在入射面内与 y' 成 θ 角，x'' 与 x' 重合．

当光线以 $\theta_入$ 入射时，两折射光的折射角为 θ_1 和 θ_2，则有

$$\sin\theta_入=n_1\sin\theta_1,\quad \sin\theta_入=n_2\sin\theta_2, \quad (9)$$

这里入射空间取为空气，$n_入\approx1$，n_1 和 n_2 是(4)

(下转第549页)