孤立带电导体的面电荷密度和曲率的关系

刘 坤 模
(上海机械学院)

孤立导体带电时电荷在表面上如何分布是电磁学中一个很有意义的问题．中外的物理教科书都要讲到，表面曲率越大处，电荷密度也越大，但都未能给出一个正确的定量关系，这未免使人感到不足．

笔者对这个问题的研究结果指出，至少对几种表面形状（二次曲面）的导体来说，面电荷密度和表面曲率之间的确存在一个定量关系，这也许有助于我们对此问题的理解．

一、表面弯曲程度的量度——高斯曲率

按照微分几何[1]，曲面在一点的弯曲程度由曲面在该点的高斯曲率表示．设曲面的方程为 $z=z(x,y)$，则曲面的高斯曲率为

$$K=\frac{\gamma t-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

式中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，$\gamma=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，

$$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

现分别求出椭球面、双叶旋转双曲面、旋转椭圆抛物面的高斯曲率．

1. 椭球面

曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1.1)$$

或

$$z=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2},$$

则

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

$$\gamma=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{z^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}{z^3},$$

$$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\cdot\frac{xy}{z^3},$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{z^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}{z^3},$$

$$\therefore\ K=\frac{\gamma t-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}. \qquad (1.2)$$

在椭球面的三对顶点 $x=\pm a$，$y=z=0$ 处，有

$$K_a=\frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}=\frac{a^2}{b^2c^2}; \qquad (1.3a)$$

同样在 $x=z=0$，$y=\pm b$ 处，有

$$K_b=\frac{b^2}{a^2c^2}; \qquad (1.3b)$$

在 $x=y=0$，$z=\pm c$ 处，有

$$K_c=\frac{c^2}{a^2b^2}. \qquad (1.3c)$$

2. 双叶旋转双曲面

曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1, \qquad (1.4)$$

或

$$z=b\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用同样步骤可得

$$K=\frac{1}{a^2b^4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{b^4}\right)^2}. \qquad (1.5)$$

在双曲面的顶点处，$x=\pm a$，$y=z=0$，

$$K_0 = \frac{1}{a^2b^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2} = \frac{a^2}{b^4}. \tag{1.6}$$

3. 旋转椭圆抛物面

曲面方程为

$$k^2 + 2kz = x^2 + y^2, \tag{1.7}$$

则

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{k},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{k},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{k}.$$

高斯曲率为

$$K = \frac{k^2}{(x^2 + y^2 + k^2)^2} = \frac{1}{4(k + z)^2}. \tag{1.8}$$

在抛物面的顶点 $x = y = 0, z = -k/2$ 处,

$$K_0 = \frac{1}{k^2}. \tag{1.9}$$

我们注意到,高斯曲率的量纲为 $[L]^{-2}$.

二、孤立带电导体表面上的电荷密度

我们先来分析孤立带电导体的电场，再由它求出导体表面的电荷密度.

设导体表面的曲面方程为

$$f(x, y, z) = k,$$

由于导体表面为一个等势面,文献[2]和[3]说明,当 $\frac{\nabla^2 f}{(\nabla f)^2}$ 只是 f 的函数时，导体所产生的电场的电势可由下式求出:

$$\varphi = A\int e^{-\int \frac{\nabla^2 f}{(\nabla f)^2} df} df + B, \tag{2.1}$$

A, B 为积分常数，由所给的边界条件决定.

利用(2.1)式可以求出表面分别为椭球面、双叶旋转双曲面中的一叶1) 和旋转椭球抛物面的导体带电时所产生的电场，并进而求出导体表面电荷密度,现分别说明如下:

1. 椭球面

文献[2]和[4]都已求出其表面电荷密度为

$$\sigma = \frac{q}{abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

式中 σ 为面电荷密度，q 为总电量.

在椭球面的三对顶点 $x = \pm a,\ y = z = 0$ 处,有

$$\sigma_a = \frac{q}{bc}; \tag{2.3a}$$

$x = z = 0,\ y = \pm b$ 处,有

$$\sigma_b = \frac{q}{ac}; \tag{2.3b}$$

$x = y = 0,\ z = \pm c$ 处,

$$\sigma_c = \frac{q}{ab}. \tag{2.3c}$$

2. 双叶旋转双曲面(取其中的一叶[3])

表面方程改写成

$$f \equiv \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} = k \quad (k > 0),$$

式中 c, k 和(1.4)式中的 a, b 关系如下:

$$k = 2a,\ c^2 = a^2 + b^2.$$

文献[3]给出其在空间各点产生的电场的电势

$$\varphi = \frac{A}{4c}\ln\left[\left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} - 2c\right)\Big/\left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} + 2c\right)\right] + B.$$

为方便起见,令

$$u = (x + c)^2 + y^2 + z^2,$$

$$v = (x - c)^2 + y^2 + z^2,$$

即

1) 双叶旋转双曲面是不连在一起的,作为导体表面，只能取其中的一叶,以下计算的电场、电势和导体表面电荷密度也是指一叶所产生的.

$$\varphi=\frac{A}{4c}\ln\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}-2c}{\sqrt{u}-\sqrt{v}+2c}+B,$$

则

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{A}{4c}\cdot\left[\frac{\frac{x+c}{\sqrt{u}}-\frac{x-c}{\sqrt{v}}}{f-2c}-\frac{\frac{x+c}{\sqrt{u}}-\frac{x-c}{\sqrt{v}}}{f+2c}\right],$$

$$E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{A}{4c}\cdot\left[\frac{\frac{y}{\sqrt{u}}-\frac{y}{\sqrt{v}}}{f-2c}-\frac{\frac{y}{\sqrt{u}}-\frac{y}{\sqrt{v}}}{f+2c}\right],$$

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{A}{4c}\cdot\left[\frac{\frac{z}{\sqrt{u}}-\frac{z}{\sqrt{v}}}{f-2c}-\frac{\frac{z}{\sqrt{u}}-\frac{z}{\sqrt{v}}}{f+2c}\right].$$

当研究导体表面上的点时，$f\equiv\sqrt{u}-\sqrt{v}=k$，$\sqrt{u}+\sqrt{v}=\frac{u-v}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}=\frac{4cx}{k}$，这时可得

$$E_x=\frac{Ax}{k\sqrt{u}\sqrt{v}},$$

$$E_y=\frac{Aky}{(k^2-4c^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}},$$

$$E_z=\frac{Akz}{(k^2-4c^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}},$$

$$E=(E_x^2+E_y^2+E_z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{A}{\sqrt{u}\sqrt{v}}\left(\frac{x^2}{4a^2}+\frac{a^2y^2}{4b^4}+\frac{a^2z^2}{4b^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

但

$$\sqrt{u}\cdot\sqrt{v}=\frac{u+v-(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2}{2}=x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{b^4}\right),$$

$$\therefore\ \sigma=\varepsilon_0E=\varepsilon_0\cdot\frac{A}{2ab^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

在双曲面的顶点，$x=a, y=z=0$，这时可得

$$\sigma_0=\frac{\varepsilon_0A}{2b^2}. \quad (2.5)$$

3. 旋转椭圆抛物面

表面方程写成

$$f(x,y,z)\equiv-z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k. \quad (2.6)$$

文献[3]求出

$$\varphi=A\ln(-z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})+B,$$

则

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-Ax}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z)},$$

$$E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{-Ay}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z)},$$

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

当研究导体表面上的点时，

$$E_x=-\frac{Ax}{k\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$E_y=-\frac{Ay}{k\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$E_z=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$E=(E_x^2+E_y^2+E_z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{k}\sqrt{k+z}},$$

$$\sigma=\varepsilon_0E=\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0A}{\sqrt{k}\sqrt{k+z}}.$$

在抛物面的顶点，$x=y=0, z=-k/2$，这时有

$$\sigma_0=\frac{2\varepsilon_0A}{k}. \quad (2.7)$$

三、结果和讨论

比较(2.2)，(2.3)和(1.2)，(1.3)式可得，对

表面形状为椭球面的带电导体，

$$\sigma:\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c = K^{\frac{1}{4}}:K_a^{\frac{1}{4}}:K_b^{\frac{1}{4}}:K_c^{\frac{1}{4}}.$$

比较 (2.4)，(2.5)，(1.5)，(1.6)，(2.6)，(2.7)，(1.8)，(1.9) 式可得，对于表面为双叶双曲面中的一叶和旋转椭圆抛物面的带电导体，都有

$$\sigma:\sigma_0 = K^{\frac{1}{4}}:K_0^{\frac{1}{4}}. \qquad (2.8)$$

就是说，不论表面为以上三种表面的那一种，孤立导体带电时表面电荷密度都和表面的高斯曲率的四分之一方成正比.

笔者以为，表面形状各异的导体表面上电荷分布规律竟是如此一致，这应当不是偶然的，应该可以设想它有某种普遍性的意义.

参 考 文 献

[1] 梅向明、黄敬之，微分几何，人民教育出版社，(1981)，133.

[2] W. R. Smyle, Static and Dynamic Electricity, 戴世强译，静电学和电动力学，科学出版社，(1981)，172～176.

[3] 曹国良，物理，**11**(1982)，59～62.

[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, (1960), 240.

拉丝成品模用生长型多晶金刚石

人造多晶金刚石是研制大颗粒人造金刚石的一种重要途径，它制作方便，易于直接成型. 目前在高温高压下有两种研制方法：一是由石墨合成金刚石，再由金刚石微粉烧结成多晶金刚石，即烧结型多晶金刚石(也称烧结型聚晶)；另一就是由石墨直接一次生长成多晶金刚石，即生长型多晶金刚石（也称生长型聚晶).

人造多晶金刚石已在机械、地质、冶金、石油工业中广泛应用. 近几年在电线、电缆行业中，也开始以人造金刚石拉丝模代替天然金刚石拉丝模和硬质合金模。天然金刚石模价格贵，资源少. 硬质合金模耐磨性差，使用寿命短. 所以，人造多晶金刚石拉丝模有着广阔的应用前途. 生长型多晶金刚石由于它特有的显微组织，适于制作对光洁度要求高的拉丝成品模.

中国科学院物理研究所自七十年代以来，开展了超高压、高温下生长多晶金刚石的研究. 自 1977 年以来，我们在对生长多晶金刚石的显微组织、触媒扩散、温度场和压力场对多晶生长的影响等进行应用研究的基础上，于 1980 年底研制成功片状扩散法生长多晶金刚石。从 1981 年开始，先后在上海拉丝模厂、上海中国电工厂、四川西南电工厂、天津金刚石工具厂、天津漆包线厂，用生长型多晶金刚石作模芯，制成拉丝成品模，并进行漆包圆铜线拉丝试验. 1984 年 9 月在北京对“拉丝成品模用生长型多晶金刚石”进行了技术鉴定.

鉴定认为：中国科学院物理研究所用片状扩散法研制的生长型多晶金刚石，应用于成品模，填补了国内空白. 这种生长型多晶金刚石具有结构致密、晶粒细小、交错生长等特点，是用作拉丝成品模的好材料，是多晶金刚石的一个新品种. 用以制作成品模，可拉制直径0.7毫米以下的漆包圆铜线，其质量达到国际电工会议 IEC 技术标准. 拉丝模使用寿命相当或超过天然金刚石拉丝模.

（陈良辰　程月英）

（上接第571页）

讲台旁看他一阵. 我们有机会见到一些名科学家.

英国的学制，每学年划分为三个学期. 在我们所去的学院 (University College) 医科和建筑学科为五个学年毕业，其他系均为三年毕业. 每学年终了，一门课程不及格时可以于第二学年开始时重考. 两门课程不及格则留级. 第三学年末全部课程须进行考试.除在校学生之外，伦敦大学有校外生制度，即注册为校外生(external)可不上课，经过若干次考试后亦可毕业.研究生分硕士和博士生，亦可不作学位注册.

九一八之后，东北被日军占领，形势日益危急. 我们所在的学院物理系，没有日本学生.到了年底，我接到施汝为先生从上海的信，附来两张申请加入中国物理学会的卡片，要我填写，介绍人会的除施老外，还有赵忠尧先生.