

凝聚态物理中的分形、分维与分形子

姚凯伦

(华中工学院)

近年来,凝聚态物理出现了一个新的领域:分形与分维. 1984年,在美国一年一度的物理学年会上宣读分形与分维论文的演讲时,厅内外挤满了听众,有人甚至在过道里踮起脚,聚精会神地听着报告. 两年多时间里,关于分形与分维的研究,引起越来越多的凝聚态物理学家的重视和关注.

分形,作为一个崭新的物理和数学名词,最早由 Mandelbrot 博士于 1975 年提出^[1]. 英文 fractal 取自拉丁形容词 fractus, 对应的动词是 frangere, 意为打碎成不规则的部分. 分形与代数 (algebra) 从语源学上讲, 是意义相反的两个词.

从数学发展的角度看, 分形将经典数学和现代数学区分开来, 因此它是数学发展中的一个新世界. 我们知道, 十九世纪的经典数学讨论的对象是欧几里得的有规则的几何结构以及牛顿的连续动力学系统. 现代数学则以 Cantor 集合及 Peano 曲线为起点. 这些数学结构不能用欧几里得几何及牛顿动力学来描写. 早在 1875 年, Reymond 首先指出存在一类连续但不可微的函数, 这使经典数学陷入了“危机”. 于是“分形几何”应运而生. 在这方面, 除了 Cantor 和 Peano 外, Lebesgue, 豪斯道夫 (Hausdorff, Koch 和谢尔宾斯基 (Sierpinski) 等人都作出过重要的贡献.

然而, 分形进入物理学, 特别是凝聚态物理, 还是七十年代以后的事情. 在研究相变理论的过程中, 人们感到分形结构和非整数维 (分维) 的空间有一定的物理意义. 例如, 在连续对称情形下, 二维空间里不会发生相变, 只有当 $d = 2 + \varepsilon$ 时才存在长程序和不同的相. 处理

相变的平均场理论也只在四维以上的空间里才正确. 重正化群理论在 $d > 4$ 时与平均场理论一致. 对于略低于四维的 $4 - \varepsilon$ 维空间, Wilson 和 Fisher 以 $\varepsilon = 4 - d$ 为小参量, 作了重正化群的计算, 得到了一套临界指数. 这里 $2 + \varepsilon$ 和 $4 - \varepsilon$ 已经都不是整数维数而是分数维数了.

一、拓扑维数与豪斯道夫维数

通常我们讨论问题都在欧几里得空间, 其维数都是整数 d . 例如, 一个球是三维的, 镜面是二维的, 一根长直导线是一维的. 除欧几里得空间维数外, 还有拓扑维数和豪斯道夫维数 (即分维).

首先我们介绍豪斯道夫维数^[2]. 这是数学家豪斯道夫于 1919 年引进的. 如果把一个 d 维几何对象的每一边放大 l 倍, 那么这个几何对象就会相应地得到放大, 设放大倍数为 k . 显然, l , d 和 k 三者之间存在关系式:

$$l^d = k,$$

所以

$$d = \frac{\ln k}{\ln l}. \quad (1)$$

对于分形, 空间维数不一定为整数, 可以是分数, 记为 D , 则有

$$D = \frac{\ln k}{\ln l}, \quad (2)$$

D 便称为豪斯道夫维数. 这里必须指出, 豪斯道夫维数与数学中豪斯道夫空间的维数是两回事. 为了明确起见, Mandelbrot 就把豪斯道夫维数称为分维, 反映其维数的分数性质.

再来讨论拓扑维数。设想有两个带两个把手的水壶，均用任意可塑的橡皮泥做成。不需弄碎水壶，就可以将一个水壶连续地形变为另一个水壶，从拓扑学角度讲，它们具有相同的拓扑维数。同样地，任何海洋岛的海岸线，在拓扑上都等价于一个圆，即它们的拓扑维数 D_T 都等于 1。于是，对远离海岸的一群卫星岛，它们的海岸线在拓扑上都等价于圆，就是说，不同的海岸线在拓扑学上是相同的。拓扑维数 D_T 总为整数。

然而，从分形的角度看，不同海岛的海岸线，它们的分维是不同的。只是在欧几里得空间里，拓扑维数才等于豪斯道夫维数（即分维）。对于分形来说，其豪斯道夫维数总是大于拓扑维数，所以，分形也可以这样来定义：它是豪斯道夫维数大于拓扑维数的集合。分维的不同，从非拓扑方面反映了对象间的差别。这也是研究分形和分维的原因之一。

分维也可以用另一种方法来定义。设一个几何对象的分维为 D ，今用半径为 R 的小球来覆盖该几何对象，则所需要的球数 N 为

$$N \sim A/R^D,$$

其中 A 为几何对象的体积。今将 A 的各边放大 l 倍，如果几何对象比原来放大 k 倍，即 A 变为 kA ，那么，用上述半径 R 的小球去覆盖 kA ，所需之球数变为 N_l ，

$$N_l \sim kA/R^D.$$

同理，如把覆盖球的半径 R 缩小 l 倍，几何对象保持不变，那么用缩小了的球去覆盖 A ，所需的球数亦为 N_l ，且

$$N_l \sim \frac{A}{\left(\frac{R}{l}\right)^D} = l^D A/R^D.$$

既然两种方法所需之小球数 N_l 相等，所以立即可得分维

$$D = \frac{\ln k}{\ln l}. \quad (3)$$

此式与(2)式的表示完全一致。

二、凝聚态物理中的分形模型

凝聚态物理中的分形主要是两类：一类是随机分形，如阈值时的无限长渗流集团、线性高分子链和随机行走等；另一类是有规分形模型，研究得较多的是谢尔宾斯基篮子、谢尔宾斯基地毯和谢尔宾斯基海绵等。

我们知道，在欧几里得空间中，如果讨论的是均匀分布的线、面或者体，它们都有两个基本的不变性质：一是位移后物理量不变（即平移不变性）；二是尺度改变后，物理量（如温度和压强等）不变。当我们讨论分形时，这种不变性必须加以修正。

例如布朗运动，它的运动轨迹的不同部分永远不会精确地重合，不象欧几里得空间中的直线，其不同部分在平移后可以完全重合。但是，从统计物理意义上讲，布朗运动的轨迹在位移后可以认为是能重合的。许多随机的分形都具有这种推广的平移不变性。顺便指出，布朗运动的分维 $d_{RW} = 2$ ，正好是力学运动轨迹维数的两倍。

分形最大的特点是具有自相似性 (Selfsimilarity)，即分形在通常的几何变换下具有不变性。自相似性并非是新的概念。早在 1926 年，Richardson 就曾指出，湍流在很大尺度范围内可以分解为许多漩涡。七十年代建立起来的重整化群，就是参数空间中的自相似变换半群。所以分形是重整化群研究的理想对象。

谢尔宾斯基篮子^[2]是具有无限自相似内部层次的有规分形的一个典型。谢尔宾斯基篮子的分支结构是渗流中主干集团的较好近似模型，而渗流理论中，主干集团对相变起了主导作用^[3]，这也就是研究谢尔宾斯基篮子的意义所在。谢尔宾斯基篮子的分维不难求得为 $D = \ln(d+1)/\ln 2$ ，其中 d 是所在欧几里得空间的维数。在二维情况下， $D = \ln 3/\ln 2$ ，与渗流主干集团的维数 1.6 非常接近。

Gefen 等人^[4]研究了一些具有自相似结构的分形的临界性质，发现分形的普适类比具有

平移不变性的系统更为严格。在临界点上，具有平移不变性的系统，其临界行为仅受维数的支配，但分形的临界行为不仅受其维数的影响，而且还同一些几何参数如分叉 (ramification)、空隙 (lacularity) 和连接性 (connectivity) 等有关。Luscombe 等人^[5]采用重正化群方法，研究了谢尔宾斯基篮子的统计力学和动力学性质，计算了临界点附近及远离临界点的顺磁磁化率、比热、近邻间的关联函数和动力学临界指数。他们考虑的分形是每个顶点有一个伊辛 (Ising) 自旋， $\sigma_i = \pm 1$ ，系统的哈密顿量为

$$H[\sigma] = K \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j + BM[\sigma] + K_3 M_3[\sigma], \quad (4)$$

其中

$$M[\sigma] = \sum_i \sigma_i, \quad M_3[\sigma] = \sum_{i,j,k} \sigma_i \sigma_j \sigma_k,$$

其中 K, B 和 K_3 为参量。他们的工作表明，谢尔宾斯基篮子的分形结构导致强烈的临界起伏，关联长度的发散关系为指数形式，使得临界区域变得相当宽，与一维的临界行为显著不同。他们还指出，谢尔宾斯基篮子的比热有明显的极大值，在临界区域按对数关系趋于零，与准线性系统的比热按代数幂次形式趋于零也不相同。比热的峰值是由更高的分叉级所引起的。他们得出动力学临界指数 ν 大于豪斯道夫维数，至少相等，即 $\nu \geq D$ 。在 $K=0$ 平面上的相图见图 1。系统磁化为

$$m = \frac{1}{N} \langle M[\sigma] \rangle,$$

近邻关联函数为

$$\varepsilon = \frac{1}{2N} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle,$$

三自旋关联函数为

$$p = \frac{3}{2N} \sum_{i,j,k} \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle.$$

对于随机分形的渗流系统，它们的电导的临界现象和弹性问题的临界现象是否属同一普适类，目前存在争论，但使很多人感兴趣。de Gennes^[6] 认为，渗流中的弹性指数 T 与电导指数 ν 应该相同。但 Kantor 等人给出的弹性指数

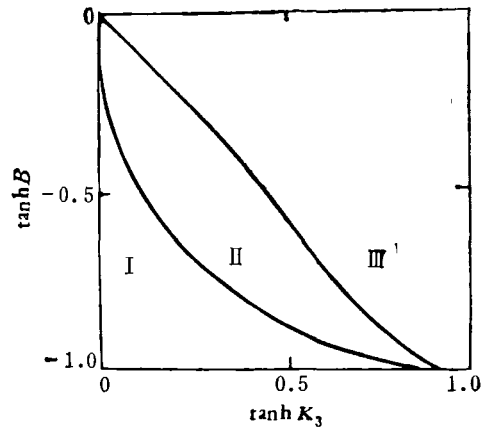


图 1 谢尔宾斯基篮子 $K=0$ 平面相图
I. $\varepsilon > 0, p < 0$; II. $\varepsilon > 0, p > 0$;
III. $\varepsilon < 0, p > 0$

T 比电导指数 ν 要大得多^[7]。Benguigui^[8] 同时测量了二维渗流系统的弹性指数和电导指数，得出 $\nu = 1.2 \pm 0.1$ ，但 $T = 3.5 \pm 0.4$ ，显然弹性指数远大于电导指数。Feng 和 Sen 则采用有限尺寸标度分析和计算机数值计算的方法 (不同于 Kantor 和 Webman 的平均场方法)，考虑了一个比较实际的模型 (包括了中心力和扭曲力)，给出 $\nu = 3.3 \pm 0.5$ ，其结果也说明弹性临界问题和电导临界问题属两个不同的普适类。

最近，Sheng 和 Tao^[9] 等人研究了谢尔宾斯基地毯上的弹性指数。谢尔宾斯基地毯是一种有规分形，二维情况如图 2 所示。将正方形的平面，分成九块，除去中间一块，剩下的小正

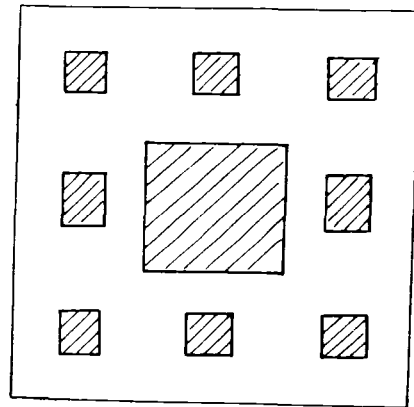


图 2 二维谢尔宾斯基地毯

方形面再各分成九小块,挖去中间一块,如此无穷多次重复下去,便成为一种分形。计算给出这种分形的弹性指数: $K_{11} \sim L^{-0.27}$, $K_{11} - K_{12}/2 \sim L^{-0.25}$, $K_{44} \sim L^{-0.46}$ 。Tao 等人的电导指数的实验测量表明,在 20% 精度范围内,电导指数与弹性指数一致,从而认为 de Gennes 的假定大致正确。目前还没有计算谢尔宾斯基地毯连续模型的电导的方法,这方面还需作进一步的研究。

三、分形上的自旋玻璃

自旋玻璃是一种无序磁性系统,自旋间存在随机和彼此竞争的相互作用。自旋玻璃的理论是凝聚态物理中一个重要和基本的问题,但是在正规格子上的自旋玻璃问题至今仍未很好解决。人们希望研究分形上的自旋玻璃,有助于更好地理解自旋玻璃相变。

Cieplak^[10] 等人研究了谢尔宾斯基篮子分形上的自旋玻璃系统。与自旋玻璃中著名的 EA 模型和 SK 模型^[11]不同的是,谢尔宾斯基篮子上 Ising 自旋系统存在所谓“阻挫”现象 (frustration),即体系不能达到真正的基态,只存在许多简并态,或几乎简并的基态。

已经知道,占满三角格子的 Ising 自旋系统,可以有非平庸的相变;谢尔宾斯基篮子上的均匀自旋系统,采用重正化群方法计算(对于有限级分叉),仅在 $T = 0K$ 时才有相变。对于谢尔宾斯基篮子上的自旋玻璃, Cieplak 等人指出,相变仅在 $T = 0K$ 时发生,或者根本无相变,取决于耦合参数的随机分布情况。他们对分形上自旋进行归并,消去了中点的自旋,得到新的有效相互作用 J'_{ij} 。每次归并都将九个交换相互作用由三个有效相互作用及一个常数项替代,这样最后就得到了一组新的耦合参数的分布。结果表明,对于均匀的铁磁耦合,系统的维数为下边界维数 d_c ,在 $T = 0K$ 时经历相变,而对于无序铁磁系统,则略低于下边界维数 d_c 。对于无序反铁磁系统和高斯自旋玻璃,系统总是趋于顺磁相。这两种系统属于同一普适

类,在 $T = 0K$ 时经历相变,维数低于下边界维数 d_c 。

Cieplak 等人还研究了谢尔宾斯基篮子上的自旋玻璃的动力学问题。发现对于铁磁系统,存在一个模,自旋均朝上,其弛豫时间在 $T = 0K$ 时发散;对于高斯自旋玻璃和无序反铁磁系统,对应于每一个局域极小值, $T = 0K$ 时,存在一些非衰减模; $T > 0K$ 时,模的简并消除,但是至少有一个模,即使在有限温度时,其弛豫时间仍然相当长。当然,此时系统为顺磁相。

四、分形的元激发

凝聚态物理中的分形还存在元激发,称为分形子 (fracton)。因此,在自相似空间,至少需要定义三种维数: 欧几里得空间维数 d , 分维即豪斯道夫维数 D 以及分形子维数^[12] (又称光谱维数 \tilde{D})。对于欧几里得空间,这三种维数相等,因此只需要一个空间维数 d 来标志。可以认为,在欧几里得空间,存在着偶然简并,使得三种维数相等。因此,研究自相似空间,不仅使我们进入一个新的世界,而且反过来也能加深我们对普通欧几里得空间的理解。

由固体物理知道,在周期性的欧几里得格子上,频率为 ω 的声子态密度为 $\rho(\omega)$,在低频端存在下列关系:

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d-1},$$

其中 d 是欧几里得空间的维数。对于自相似结构,应用标度变换关系,可得元激发分形子态密度

$$\rho(\omega) \propto \omega^{\tilde{D}-1}, \quad (5)$$

其中 \tilde{D} 为光谱维数。

对于谢尔宾斯基篮子,三种维数间存在不等式:

$$d \geq D \geq \tilde{D}. \quad (6)$$

当 $d = 1$ 时,上式取等号;当 d 增加时,分维 D 单调增加无上限,光谱维数 \tilde{D} 也增加,但是上限为 $\tilde{D} = 2$ 。上述双不等式看来是分形的一个普适关系,至少目前尚未发现反例。但是对

多数分形,其光谱维数 \tilde{D} 并无上限 2。

前面已经指出,在渗流阈值处,无限长渗流集团也是一种随机分形。其分形子维数可表示为

$$\tilde{D} = \frac{2D}{2 - d + D + (t/\nu)}, \quad (7)$$

其中 ν 是关联长度指数, t 是电导指数。从物理上看,分维描写了几何对象的质量如何取决于长度的尺度,而光谱维数描写了分形在低频下的态密度行为。事实上,低频下的态密度也与尺度有关。如果频率足够低,相应的波长比渗流的关联长度还长,那么这时的态密度行为与声子一样,称为声子区;如果频率高于某个临界频率 ω_c ,即相应的波长可与渗流关联长度相比拟,那么这时为分形子区域。从声子区域到分形子区域存在一个过渡 (Crossover)。Southern^[13], Lam^[14] 和我们最近的工作都表明了这一点。关于谢尔宾斯基篮子上的分形子,也有人作了计算,美国的 S. H. Liu 等人^[15]考虑弹性力包括拉伸和扭曲两个分量,他们的结果表明,这时的光谱维数与只有拉伸的中心力模型中的光谱维数相同,说明对于谢尔宾斯基篮子,键的拉伸与键角的扭曲,属于同一普适类。

总之,关于分形、分维和分形子的研究正方兴未艾。随着时间的推移,在凝聚态物理中将会发现更多的分形及与分形有关的问题。除上面提到的渗流阈值时的主干集团、随机行走和线性高分子链外,现在人们还发现,反常扩散 (anomalous diffusion)、凝聚过程 (aggregation process)、吸附表面 (adsorbent surface) 和奇异

吸引子 (strange attractor) 等均与分形有关。人们还认为,最近发现的准晶体也与分形密切相关。除了凝聚态物理外,在自然界中存在着更多的随机分形,比如海岸线和哺乳动物的大脑及脑电波等。人们还期待着关于分形的研究将促进新一代计算机的研制。在社会科学方面,有人也试图用分维来描写一些现象,比如提出了所谓经济吸引子及其维数等问题。可以相信,关于分形、分维及分形子的研究,在一定程度上也将推动社会科学定量研究的发展。

参 考 文 献

- [1] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, (1977).
- [2] 黄昫, 物理, **15**-5(1986), 269.
- [3] K. L. Yao and J. W. Halley, *Phys. Rev. B*, **29**(1984), 6207.
- [4] Y. Gefen, A. Aharony, Y. Shapir and B. B. Mandelbrot, *J. Phys. A*, **17**(1984), 435.
- [5] J. H. Luscombe and R. C. Desai, *Phys. Rev. B*, **32**(1985), 1614.
- [6] de Gennes, *J. Phys. (Paris)*, **37**(1976), L1.
- [7] Y. Kantor and I. Webman, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1891.
- [8] L. Benguigui, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 2028.
- [9] P. Sheng and R. B. Tao, *Phys. Rev. B*, **31**, (1985), 631.
- [10] J. R. Banavar and M. Cieplak, *Phys. Rev. B*, **28**(1983), 3813.
- [11] 姚凯伦, 物理, **15**(1986), 87.
- [12] S. Alexander and R. Orbach, *J. Phys. (Paris)*, **43**(1982), L 625.
- [13] B. W. Southern and A. R. Douchant, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 966.
- [14] P. M. Lam and W. Bao, *Z. Phys. B*, **59**(1985), 63.
- [15] S. H. Liu and A. J. Liu, *Phys. Rev. B*, **32**(1985), 4753.

(上接第 678 页)

参 考 文 献

- [1] P. Curie and A. C. Laborde, *Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris*, **136**(1903), 673.
- [2] C. D. Ellis and A. Wooster, *Proc. Roy. Soc. A*, **117**(1927), 109.
- [3] H. H. Andersen et al., *Rev. Sci. Instr.*, **38**(1967), 551; H. H. Andersen et al., *Phys. Rev. A*, **16**, (1977), 1929.
- [4] C. V. Cannon et al., *Rev. Sci. Instr.*, **21**(1950), 236.
- [5] J. Dalmazzone, *Rapport CEA-R-4858 (France)*, (1977), 1—39.
- [6] N. Coron et al., *Nature*, **314**(1985), 75.
- [7] J. Leblanc et al. French Patent, No 75 36103, (26. Nov. 1975). US Patent, No. 4, 116, 063, (26. Sept. 1978).
- [8] H. H. Andersen, *Nucl. Instr. and Methods B*, **12**, (1985), 437.
- [9] S. H. Mosley et al., *J. Appl. Phys.*, **56**-5 (1984), 1257.
- [10] J. C. Mather, *Appl. Optics*, **23** (1984), 584.
- [11] J. Sheppard et al., *CERN Courier*, **25** (1985), 182.
- [12] P. G. Hansen, Symposium on Nuclear Structure Precommunications, The Niels Bohr Institute, Denmark, 20—24 May, (1985), 60.