

数字图象处理技术讲座

第二讲 图象恢复

刘政凯

(中国科技大学无线电系)

一、图象变质的原因及模型

我们知道,在图象的产生、传输、记录过程中,不可避免地会带来某些失真和程度不同的变质。对于这些变了质的图象,进行一定的加工处理,使其恢复真实的景物,这就是图象恢复^[1],也叫做图象复原。

造成图象变质的原因很多,大致可分以下几方面:

(1) 成像系统的象差、畸变和有限的带宽等造成的图象失真;

(2) 太阳辐射经过大气层以后所造成的辐射畸变,以及大气湍流等造成的遥感照片的失真;

(3) 携带遥感仪器的飞机或卫星运动的不稳定,以及地球自转等造成的照片的几何失真;

(4) 数字图象在采样、量化以及模一数数和数一模转换时造成的失真;

(5) 拍摄时相机与景物之间存在相对运动所造成的运动模糊;

(6) 由于镜头聚焦不良而造成的散焦模糊;

(7) 在底片感光 and 图象显示时造成的记录显示失真;

(8) 在图象系统中始终存在的噪声干扰。

这里我们举一个图象变质的例子。图 1(a) 为一幅具有严重的胡椒面式噪声的变质图象,图 1(b) 为采用数字图象恢复技术所恢复出的结果。

为了进行图象恢复首先必须建立图象变质

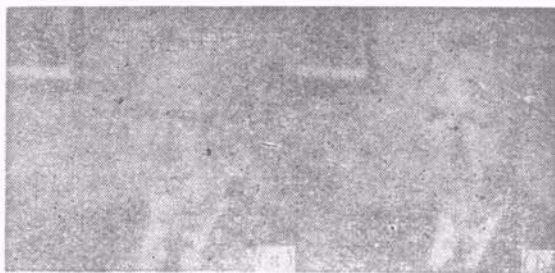


图 1 变质图象(a)及其恢复结果(b)

模型,也就是说首先必须了解和分析图象变质的机理并用数学模型表示出来。由于图象变质原因很多,变质的机理比较复杂,因此,要提供一个完善的数学模型是非常复杂和困难的。幸运的是在很多通常遇到的实例中,变质系统能够用线性系统模型近似地进行描述^[2]。

假设 $f(\xi, \eta)$ 和 $g(x, y)$ 分别代表真实景物和变质图象的二维函数,那么,图象变质模型如图 2 所示,并可用下式表示:

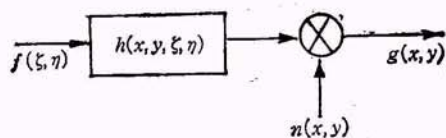


图 2 图象变质的一种模型

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + n(x, y). \quad (1)$$

这里系统变质用点扩展函数 $h(x, y, \xi, \eta)$ 表示,它也是通常所说的系统的二维冲激响应函数。 $n(x, y)$ 表示系统中的噪声干扰,它以相加形式出现在(1)式中,我们称之为加性噪声。如果 $n(x, y)$ 是以相乘形式出现,我们称之为乘

性噪声。

假设系统的点扩展函数与景物平面上各点的位置无关,那么(1)式可以写成

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + n(x, y). \quad (2)$$

此时, $h(x, y)$ 称为位移不变的点扩展函数, 而(1)式中的 $h(x, y, \xi, \eta)$ 称为位移变化点扩展函数。

因此, 图象恢复的任务就是从已知的变化图象 $g(x, y)$ 出发, 根据 $n(x, y)$, $h(x, y, \xi, \eta)$ 和 $f(\xi, \eta)$ 的某些先验信息, 对 $f(x, y)$ 作出最佳的估值。

二、几何失真的校正

在实际成象系统中存在着程度不同的几何失真, 在利用卫星、飞机和气球所获得的遥感照片中, 由于携带遥感仪器的平台的姿态、高度和飞行速度的变化, 以及地球自转、曲率等等因素的影响, 都会造成遥感照片的几何失真(如图3所示)。

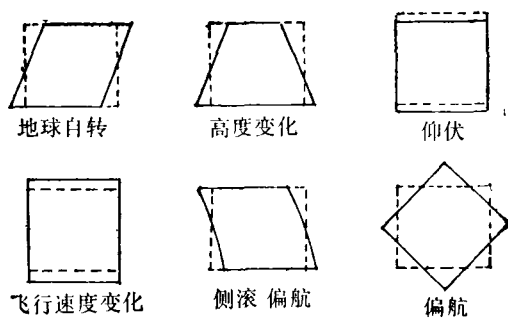


图3 遥感照片的几何失真

没有失真的图象与失真图象之间的几何坐标失真的关系可以用一组坐标变换式来描述。设理想图象坐标为 x, y , 失真图象坐标为 U, V , 则二者之间的坐标变换式的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} U &= f(x, y), \\ V &= g(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

根据几何失真的不同情况, 上述坐标变换式可以是线性仿射变换式、准线性仿射变换式、二次

变换式、高次变换式等。例如, 如果失真是表现在 x 坐标方向的位移, 那么(3)式变为线性仿射, 即

$$\left. \begin{aligned} U &= x + a, \\ V &= y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

遥感照片的几何失真, 大多数可用二次变换式来描述^[2], 即

$$\left. \begin{aligned} U &= a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6, \\ V &= b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 xy + b_4 x + b_5 y + b_6. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

确定了理想图象与失真图象之间的坐标变换式的形式后, 还需确定坐标变换式的系数。通常采用控制点校正法。

所谓控制点是指那些可以在理想图象与失真图象上都明显识别出来的坐标点, 例如在遥感照片上选取可识别的公路、河流、湖泊、水库、海岸线、居民点作为控制点。例如, 某一控制点在理想图象上的坐标为 x_1, y_1 , 该点在失真图象上的坐标为 U_1, V_1 , 则 (x_1, y_1) 和 (U_1, V_1) 构成一个控制点坐标对, 控制点坐标对应当满足(5)式。我们可以选取几个控制点, 根据这些控制点的坐标对, 按照最小误差准则, 便可确定(5)式的系数。用矩阵表示如下:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

其中矩阵 M 为

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

经过坐标变换后, 还应进行灰度值的内插。内插的方法很多, 常用的有最邻近点内插法、双

线性内插法和三次卷积内插法。最邻近点法是用失真图象中最邻近点的灰度值作为校正后图象相应点的灰度值。双线性内插法是利用失真图象中邻近的四点灰度值进行双线性插值。三次卷积内插法是用失真图象中邻近的16点的灰度值进行插值。最邻近点内插法的优点是算法简便,缺点是内插后可能出现灰度的不连续。三次卷积内插法没有最邻近点内插法所具有的灰度不连续的缺点,但计算量大。因此,通常采用双线性内插法。

三、频域恢复方法

对于位移不变线性系统,当噪声干扰忽略不计时,(2)式可改写成

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

并可写成卷积形式:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y). \quad (9)$$

对上式进行傅里叶变换,可得

$$G(U, V) = H(U, V)F(U, V), \quad (10)$$

或者

$$F(U, V) = \frac{G(U, V)}{H(U, V)}. \quad (11)$$

式中 $G(U, V)$, $H(U, V)$ 和 $F(U, V)$ 分别是 $g(x, y)$, $h(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换。 U 和 V 是空间频率。通常称 $H(U, V)$ 为系统传递函数或光学传递函数。

如果已知系统传递函数 $H(U, V)$, 那么根据(11)式,便可得到复原图象的频谱 $F(U, V)$, 再经二维傅里叶反变换,即可得到复原图象 $f(x, y)$ 。这就是逆滤波图象恢复方法。

为了从噪声中恢复出真实景物图象,通常采用维纳滤波恢复方法,其计算公式如下:

$$F(U, V) = \frac{H^*(U, V)G(U, V)}{|H(U, V)|^2 + [P_n(U, V)/P_f(U, V)]}, \quad (12)$$

其中

$$H^*(U, V) \text{ 为变质系统传递函数 } H(U, V)$$

的复数共轭;

$P_f(U, V)$ 为景物 $f(x, y)$ 的功率谱密度;

$P_n(U, V)$ 为噪声 $n(x, y)$ 的功率谱密度。

维纳滤波恢复方法是滤除白噪声的有效方法,但需要知道信号功率谱密度 $P_f(U, V)$ 和噪声功率谱密度 $P_n(U, V)$ 。在实际运用时只能根据某些先验知识对 $P_f(U, V)$ 和 $P_n(U, V)$ 进行估计。

在图象恢复中,还经常采用功率谱相等准则滤波方法。根据(2)式可得

$$P_g(U, V) = |H(U, V)|^2 P_f(U, V) + P_n(U, V), \quad (13)$$

其中 $P_g(U, V)$ 为 $g(x, y)$ 的功率谱密度。功率谱相等准则滤波方法是寻找一个滤波器,其传递函数为 $L(U, V)$, 变质图象 $g(x, y)$ 通过这个滤波器后,形成一幅新图象。功率谱相等准则就是要求这个新图象的功率谱与原景物图象的功率谱相等,数学上表示如下:

$$[L(U, V) \cdot G(U, V)]^2 = P_f(U, V) \quad (14)$$

或

$$|L(U, V)|^2 P_g(U, V) = P_f(U, V). \quad (15)$$

把(13)式代入(15)式,可得

$$|L(U, V)| = \left[\frac{P_f(U, V)}{|H(U, V)|^2 P_f(U, V) + P_n(U, V)} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

因而真实景物的频谱为

$$F(U, V) = |L(U, V)| \cdot G(U, V) = \left[\frac{P_f(U, V)}{|H(U, V)|^2 P_f(U, V) + P_n(U, V)} \right]^{1/2} \times G(U, V). \quad (17)$$

功率谱相等准则滤波方法的突出优点是不必精确知道景物功率谱和传递函数。因为在(17)式中只要求知道传递函数的幅度而不要求相位。实验证明,功率谱相等准则滤波方法的效果并不比维纳滤波差多少。这是由于维纳滤波的前提和所需要的先验知识在实际中不能充分满足,而功率谱相等准则所需的先验知识较少,因而可能得到较满意的效果。

四、线性代数恢复方法

把线性代数用到图象恢复中来,这是一种新的探索.它的引入不但能解释和概括现有频域滤波方法,而且可以帮助我们深刻理解图象恢复的内涵,并为研究新的图象恢复方法提供有力的工具.

当 $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ 及 $n(x, y)$ 的尺寸为 $N \times N$ 时, (1) 式可用矢量公式表示如下:

$$\mathbf{g} = [H]\mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad (18)$$

其中 \mathbf{g} , \mathbf{f} 和 \mathbf{n} 均为按行的顺序排列起来的 $N^2 \times 1$ 维矢量(列矢量), $[H]$ 是尺寸为 $N^2 \times N^2$ 的点扩展函数矩阵,由(18)式,可得噪声项为

$$\mathbf{n} = \mathbf{g} - [H]\mathbf{f}. \quad (19)$$

当对 \mathbf{n} 一无所知时,有意义的最佳化准则函数是寻找一个估值 $\hat{\mathbf{f}}$, 使得 $[H]\hat{\mathbf{f}}$ 在最小二乘意义上近似于 \mathbf{g} . 这就要假设噪声项的范数尽可能小. 换言之,我们希望找到一个 $\hat{\mathbf{f}}$, 使

$$\|\mathbf{n}\|^2 = \|\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}}\|^2 \quad (20)$$

为最小. 这等效于把目标函数

$$W(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}}\|^2 \quad (21)$$

对 $\hat{\mathbf{f}}$ 求极小的问题,即

$$\frac{\partial W(\mathbf{f})}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = 0 = -2[H]^T(\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}}), \quad (22)$$

从而可得

$$\hat{\mathbf{f}} = ([H]^T[H])^{-1}H^T\mathbf{g}. \quad (23)$$

当 $[H]$ 为方阵而且其逆存在时,

$$\hat{\mathbf{f}} = [H]^{-1}\mathbf{g}, \quad (24)$$

这就是逆滤波恢复方法的代数表示式.

由此可见,逆滤波是无约束最小二乘滤波. 我们也可以推导出约束最小二乘滤波.

令矩阵 $[Q]$ 为某一线性算子,约束最小二乘滤波复原的问题就是在满足约束条件

$$\|\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\mathbf{n}\|^2 \quad (25)$$

的情况下,使 $\|[Q]\hat{\mathbf{f}}\|^2$ 为最小的问题.

对于这种约束极值问题,我们可以采用拉格朗日乘数法,把约束极值问题变为无约束极值问题,即求目标函数

$$W(\hat{\mathbf{f}}) = \|[Q]\hat{\mathbf{f}}\|^2 - \lambda(\|\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2) \quad (26)$$

的无约束极小. 其中 λ 为拉格朗日常数. 把(26)式对 $\hat{\mathbf{f}}$ 取偏导数,并令其等于零,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\hat{\mathbf{f}})}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = 0 = & 2[Q]^T[Q]\hat{\mathbf{f}} \\ & + 2\lambda[[H]^T(\mathbf{g} - [H]\hat{\mathbf{f}})], \end{aligned} \quad (27)$$

进一步解出 $\hat{\mathbf{f}}$, 得

$$\hat{\mathbf{f}} = ([H]^T[H] + \gamma[Q]^T[Q])^{-1}[H]^T\mathbf{g}, \quad (28)$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\lambda}$, 为调整系数,可调整其大小直到

满足约束为止.

选择不同的 $[Q]$, 可以得到不同的结果. 例如取 $[Q]$ 为么矩阵,即 $[Q] = [I]$, 则(28)式变为

$$\hat{\mathbf{f}} = ([H]^T[H] + \gamma[I])^{-1}[H]^T\mathbf{g}, \quad (29)$$

这就是伪逆滤波. 如果我们取

$$[Q] = [\phi_t]^{-1/2}[\phi_n]^{1/2}, \quad (30)$$

其中 $[\phi_t]$ 和 $[\phi_n]$ 为真实景物 \mathbf{f} 和噪声 \mathbf{n} 的协方差矩阵. 则把(30)式代入(28)式,可得

$$\hat{\mathbf{f}} = ([H]^T[H] + \gamma[\phi_t]^{-1}[\phi_n])^{-1}[H]^T\mathbf{g}. \quad (31)$$

当 $\gamma = 1$ 时,上式变为

$$\hat{\mathbf{f}} = ([H]^T[H] + [\phi_t]^{-1}[\phi_n])^{-1}[H]^T\mathbf{g}, \quad (32)$$

这就是维纳滤波的代数表示式. 可以证明,当点扩展函数矩阵 $[H]$ 、景物和噪声的协方差矩阵均为 Toeplitz 循环矩阵时,(32)式对应的频率域关系为

$$\begin{aligned} & F(U, V) \\ = & \left[\frac{H^*(U, V)}{|H(U, V)|^2 + [P_n(U, V)]/P_t(U, V)} \right] \\ & \cdot G(U, V). \end{aligned} \quad (33)$$

五、非线性代数恢复方法^[4]

如同上节讨论的图象变质系统可用矢量表示一样,无论是线性还是非线性变质系统,均可以用一代数方程组来描述:

$$\mathbf{g}(x, y) = D[\mathbf{f}(x, y)] + \mathbf{n}(x, y), \quad (34)$$

其中 D 是变质算子,表示对原景物进行某种运

算。

图象恢复的目的就是解(34)式,找出 $f(x, y)$ 的最好估值。

非线性代数恢复方法中的一个有效方法是投影恢复方法,它是迭代法之一。

假设变质算子是线性的,并忽略噪声,则(34)式可写成如下形式:

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1N}f_N &= g_1 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2N}f_N &= g_2 \\ \vdots & \\ a_{M1}f_1 + a_{M2}f_2 + \cdots + a_{MN}f_N &= g_M \end{aligned} \quad (35)$$

其中 f_i 和 g_i 分别是景物 $f(x, y)$ 和变质图象 $g(x, y)$ 的采样。 a_{ij} 为常数。 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的采样数目分别为 N 和 M 。

投影恢复方法可以从几何学观点加以解释。 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$ 可看成在 N 维空间中的一个向量或一点。而(35)式中的每一方程式代表一个超平面。我们选取初始估值为 $\mathbf{f}^{(0)} = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \cdots, f_N^{(0)})$, 通常取 $\mathbf{f}^{(0)} = (g_1, g_2, \cdots, g_N)$, 那么下一个推测值 $\mathbf{f}^{(1)}$ 则取 $\mathbf{f}^{(0)}$ 在第一个超平面 $a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1N}f_N = g_1$ 上的投影,即

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(0)} - \frac{(\mathbf{f}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 - g_1)}{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1, \quad (36)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1N})$, 圆点代表向量的点积,即第一个向量的转置与第二个向量之积。然后我们再取 $\mathbf{f}^{(1)}$ 在第二个超平面 $a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2N}f_N = g_2$ 上的投影,并称之为 $\mathbf{f}^{(2)}$ 。依此继续下去,直至得到 $\mathbf{f}^{(M)}$ 满足(35)式中的最后一个方程式。这就实现了迭代的第一个循环。然后再从(35)式中的第一个方程式开始第二次迭代,即取 $\mathbf{f}^{(M)}$ 在 $a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1N}f_N = g_1$ 上的投影,并称之为 $\mathbf{f}^{(M+1)}$ 。如此迭代下去,便可得到一系列向量 $\mathbf{f}^{(0)}, \mathbf{f}^{(M)}, \mathbf{f}^{(2M)}, \cdots$ 。可以证明,对于任何给定的 N, M 和 a_{ij} , 向量 $\mathbf{f}^{(KM)}$ 将收敛于 \mathbf{f} , 即

$$\lim \mathbf{f}^{(KM)} = \mathbf{f}. \quad (37)$$

倘若(35)式有唯一解,那么 \mathbf{f} 就是这个解。假若(35)式有无穷多个解,那么 \mathbf{f} 便是使下式取

最小值的解:

$$\|f - f^{(0)}\|^2 = \sum_{i=1}^N (f_i - f_i^{(0)})^2. \quad (38)$$

由此可见,投影恢复方法要求有一个好的初值,才能获得好的结果。

我们采用投影法成功地恢复了运动模糊图象(见图4)。

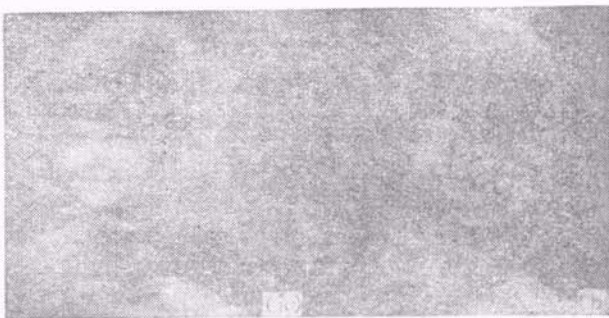


图4 运动模糊的恢复
(a) 实际运动模糊图象;
(b) 采用投影法恢复图象

在非线形代数恢复方法中,另一种常用方法是最大熵恢复方法。

最大熵恢复方法是采用随机颗粒模型。这种模型(为简单起见,这里用一维空间描述图象)是假定景物被划分 n 个单元,第 n 个单元的中心用 x_n 表示,如果颗粒单位强度用 Δ 表示,在第 n 个单元中有 Q_n 个颗粒,那么第 n 个单元景物的强度可表示为

$$f(x_n) = Q_n \Delta. \quad (39)$$

如果景物总的颗粒数为 Q_T ,只要 Q_T 足够大,而且各颗粒随机分布在景物单元上,那么根据大数定律可知每个颗粒落到 x_n 点的单元上的概率 P_n 为

$$P_n = Q_n / Q_T. \quad (40)$$

根据图象能量守恒定律,可以认为景物总颗粒数 Q_T 是已知的。这时,信息熵将是

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{n=1}^N P_n \ln P_n \\ &= - \sum_{n=1}^N (Q_n / Q_T) \ln (Q_n / Q_T) \end{aligned}$$

$$= - \sum_{n=1}^N (f(x_n)/Q_T \Delta) \ln (f(x_n)/Q_T \Delta). \quad (41)$$

由于 Q_T, Δ 均为常数, 则可把上式改写成

$$H = -\alpha \sum_{n=1}^N f(x_n) \ln f(x_n) + \beta,$$

式中 α, β 为与 Q_T, Δ 有关的常数. 熵最大时, 要求

$$H = - \sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) \ln \hat{f}(x_n) = \max. \quad (42)$$

对于噪声也可作同样的定义, 但由于噪声可正可负, 而负值的对数是不存在的, 因此采用

$$N(y_m) = n(y_m) + B \quad (43)$$

来表示噪声, 式中 B 是使任何噪声 $n(y_m)$ 都变为正值 $N(y_m)$ 的一个足够大的正数.

由于景物和噪声是互不相关的, 二者之和的熵等于各自熵之和, 为此熵最大的复原方法要求

$$- \sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) \ln \hat{f}(x_n) - \rho \sum_{m=1}^M \hat{N}(y_m) \ln \hat{N}(y_m) = \max, \quad (44)$$

并且受下列条件的约束:

$$\sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) h(y_m - x_n) + \hat{N}(y_m) - B = g(y_m) \quad (45)$$

和

$$\sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) = I_0, \quad (46)$$

其中 $m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N; I_0$ 为景物的总强度.

上述约束极值问题, 可以用拉格朗日算子法变成下列目标函数的无条件极值问题:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) \ln \hat{f}(x_n) - \rho \sum_{m=1}^M \hat{N}(y_m) \ln \hat{N}(y_m); \\ & - \sum_{m=1}^M \lambda_m \left[\sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) \cdot h(y_m - x_n) \right. \\ & \quad \left. + \hat{N}(y_m) - B - g(y_m) \right]; \\ & - \lambda_{M+1} \left(\sum_{n=1}^N \hat{f}(x_n) - I_0 \right) = \max. \quad (47) \end{aligned}$$

上式中的 ρ 是可供选择的加权因子, 以加重图象信息 $\hat{f}(x_n)$ 或噪声 $\hat{N}(y_m)$ 的熵值, 使有关部分更为平滑. 实验表明, 取 $\rho = 20$ 可以在很大的景物和噪声范围内适用. (47) 式的解可以通过对 m, n 整个范围求偏导数并令其为零而得到. 其解为

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_n) &= \exp \left[-1 - \lambda_{M+1} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m=1}^M \lambda_m h(y_m - x_n) \right], \quad (48) \end{aligned}$$

$$\hat{N}(y_m) = \exp(-1 - \lambda_m / \rho), \quad (49)$$

式中 $\lambda_m (m = 1, 2, \dots, M)$ 及 λ_{M+1} 的求法是把(47)式代入(45)式而得到 $M+1$ 个有关 λ_m 及 λ_{M+1} 为未知数的非线性方程组, 解此方程组可求出 λ_m 和 λ_{M+1} . 当然 λ_m 和 λ_{M+1} 也可以用迭代法求出.

最大熵复原方法, 隐含了正值约束条件, 使复原后的图象较为平滑. Frieden 已用此法成功地恢复了一些图象.

参 考 文 献

- [1] 刘政凯, 百科知识, No. 1(1985).
- [2] H. C. Andrews and B. R. Hunt, Digital Image Restoration, Prentice-Hall, Inc., (1977).
- [3] W. K. Pratt, Digital Image Processing, John Wiley & Sons, Inc., (1978).
- [4] T. S. Huang, Picture Processing and Digital Filtering, Springer, (1979).