点电荷和介质球系统的镜像电荷分布

汪映海　　杨双强

（兰州大学物理系）

用镜像法处理介质中的静电问题，一般书刊上只论及到两种情形：一是两均匀电介质交界面为一无限大平面，在其中一种介质中有一点电荷；二是无限长均匀电介质圆柱置于另一均匀介质之中，在圆柱内或圆柱外有一与其轴线平行的无限长线电荷．在这两种情形中，电势都可以用简单的镜像系表示．至于介质球附近的点电荷的类似问题，朗道等人指出，对于这种情况"不能在有限形式下解出"[1]，"电势不能由一个简单的电像系描述"[2]． 李政道在讨论夸克禁闭问题时，考虑了球形边界内置一点电荷的问题，令边界内介质的介电常数为 $\kappa=1$．边界外的为 $\kappa=\kappa_\infty\to 0$，并将电势以 κ_∞ 的幂次展开，得到用电像系描述的格林函数的近似表达式，提出其电像是连续线分布的概念[3]．

对于点电荷和介质球系统，我们将对点电荷位于球外和球内的两种情况，分别推导用电像系描述的电势的严格表达式，并且通过讨论极限情形对所得结果进行了验证．

一、球内外电势及其电像系的表示

1. 点电荷位于介质球外

设介电常数为 ε_1、半径为 R 的均匀介质球在介电常数为 ε_2 的均匀无限介质之中，在球外距球心为 $\boldsymbol{a}$ 处放置一个点电荷 q．

选用球坐标系，取球心为原点，极轴沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向．利用分离变量法，可以求得球外、球内的电势为[4]

$$\phi_{out}=\frac{q}{\varepsilon_2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+q\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\times\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}},\tag{1}$$

$$\phi_{in}=\frac{q}{\varepsilon_2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+q\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\times\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta).\tag{2}$$

此二式中第一项为点电荷 q 及其附近极化电荷的贡献，第二项为球面上极化电荷的贡献．下面我们将球面极化电荷的势 ϕ' 表示为等效的镜像电荷产生的势．

令

$$\alpha=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\tag{3}$$

$$\beta=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\tag{4}$$

则 (1) 式中球面上极化电荷在球外产生的势可写作

$$\phi'_{out}=\frac{\alpha q}{\varepsilon_2}\frac{R}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}\right)^l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)-\frac{\alpha\beta q}{\varepsilon_2}\frac{R}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+\beta}\left(\frac{R^2}{a}\right)^l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta).\tag{5}$$

利用参数积分

$$\frac{1}{l+\beta}=\int_0^\infty e^{-(l+\beta)t}dt,\tag{6}$$

再作变量代换

$$e^{-t}=x,\tag{7}$$

可将 (5) 式变成

$$\phi'_{out}=\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\alpha q\frac{R}{a}\right)\sum_{l=0}^{\infty}$$

$$\times \left(\frac{R^2}{a}\right)^l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\alpha q \frac{R}{a}\right)\beta \int_0^1 dx x^{\beta-1}$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}x\right)^l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta). \qquad (8)$$

当 $\boldsymbol{r}$ 沿极轴方向时,球函数的展开式简化为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\quad (r>r'). \qquad (9)$$

设 $\boldsymbol{e}_z$ 为 z 轴方向的单位向量,引入

$$q_1=\alpha q\frac{R}{a}, \qquad (10)$$

$$q_2(x)=q_1\beta x^{-(1-\beta)}, \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{R^2}{a}\boldsymbol{e}_z, \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{a}_2(x)=\frac{R^2}{a}x\boldsymbol{e}_z, \qquad (13)$$

并利用 (9) 式,可将 (8) 式写成

$$\phi'_{\text{out}}=\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_1|}-\int_0^1 dx\frac{q_2(x)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_2(x)|}\right]. \qquad (14)$$

于是球外电势可以表示为

$$\phi_{\text{out}}=\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_1|}-\int_0^1 dx\frac{q_2(x)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_2(x)|}\right]. \qquad (15)$$

将 (2) 式作类似的处理，在利用参数积分后作变量代换

$$e^t=y, \qquad (16)$$

并引入

$$q'_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\alpha q, \qquad (17)$$

$$q'_2(y)=q'_1\beta y^{-\beta}, \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{a}'_2(y)=ay\boldsymbol{e}_z, \qquad (19)$$

可得球面上极化电荷在球内产生的势

$$\phi'_{\text{in}}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{q'_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}-\int_1^{\infty}dy\frac{q'_2(y)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}'_2(y)|}\right]. \qquad (20)$$

如将此式第一项与 (2) 式第一项合并，则球内电势可以表示为

$$\phi_{\text{in}}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}-\int_1^{\infty}dy\frac{q'_2(y)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}'_2(y)|}\right], \qquad (21)$$

其中

$$q_0=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q. \qquad (22)$$

以上所得 (15) 式和 (21) 式就是球外、球内电势的电像系表达式.(15)式表明,球外电势是由球外的点电荷及球内的等效电荷产生的.第一项是位于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$ 处的点电荷 q/ε_2 的势；第二项可以看作位于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1$ 处、大小为 q_1/ε_2 的镜像电荷的势；第三项可以看作分布于原点到 a_1 点的线段上，线密度为 $aq_2(x)/\varepsilon_2R^2$ 的镜像电荷的势. 可见对于球外电势来说，点电荷的镜像电荷是一个点电荷加上一条线电荷. 同理，(21) 式表示的球内电势全是由球外电荷产生的. 第一项是位于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$ 处的电荷 q_0/ε_1 的势，第二项为镜像线电荷的势. 根据 (19) 和 (18) 式，当 y 从 1 变到∞时，$\boldsymbol{a}'_2$ 从 $\boldsymbol{a}$ 变到∞，而 $q'_2(y)$ 从 $q'_1\beta$ 变到零.

2. 点电荷位于介质球内

若在上述问题中，将点电荷 q 置于球内距球心为 $\boldsymbol{a}$ 处，则用分离变量法可解出球外、球内的电势:

$$\phi_{\text{out}}=\frac{q}{\varepsilon_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+q\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\times\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), \qquad (23)$$

$$\phi_{\text{in}}=\frac{q}{\varepsilon_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+q\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\times\frac{(ar)^l}{R^{2l+1}}P_l(\cos\theta). \qquad (24)$$

仍然运用前述参数积分等处理方法，对于(23)式作变量代换 $e^{-t}=x$，并引入

$$Q_1=-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha q, \tag{25}$$

$$Q_2(x)=Q_1(1-\beta)x^{-(1-\beta)}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A}_2(x)=ax\boldsymbol{e}_z, \tag{27}$$

可得

$$\begin{aligned}\phi_{\text{out}}&=\frac{q}{\varepsilon_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\int_0^1 dx\frac{Q_2(x)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{A}_2(x)|}\right]\\&=\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{Q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\int_0^1 dx\frac{Q_2(x)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{A}_2(x)|}\right]\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$Q_0=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \tag{29}$$

对于(24)式，利用参数积分后作变量代换

$$\frac{R^2}{a}e^t=u, \tag{30}$$

并引入

$$Q_1'=-\frac{R}{a}\alpha q, \tag{31}$$

$$Q_2'(u)=-\frac{\alpha q}{R}(1-\beta)\left(\frac{a}{R^2}u\right)^{-\beta}, \tag{32}$$

$$A_2'(u)=u\boldsymbol{e}_z, \tag{33}$$

可得

$$\phi_{\text{in}}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\frac{Q_1'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_1|}+\int_{R^2/a}^{\infty}du\frac{Q_2'(u)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{A}_2'(u)|}\right], \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{a}_1$ 的定义和(12)式相同.

所得结果表明，当点电荷位于球内时，对球外电势来说，q 的像电荷为其所在点的一个点电荷再加上从球心到 q 所在点的一条线电荷. 对球内电势来说，q 的像电荷为其共轭点上的一个点电荷再加上沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向，从 q 的共轭点到∞的一条线电荷.

二、极 限 情 形

1. 点电荷位于介质球外

在静电学中，当介质的介电常数趋于无穷大时，该介质对外电场的影响和相同形状的导体所产生的影响相同[1]. 将(9)—(13)式代入(15)式，求 $\varepsilon_1\to\infty$ 时 ϕ_{out} 的极限值. 注意第三项的极限值在 $l=0$ 时不为零，对 $l\neq 0$ 均为零，于是

$$\phi_{\text{out}}|_{\varepsilon_1\to\infty}\to\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\frac{-R/a\,q}{|\boldsymbol{r}-R^2/a\,\boldsymbol{e}_z|}+\frac{R/a\,q}{r}\right]. \tag{35}$$

对球内电势，利用同样的方法求极限，得

$$\phi_{\text{in}}|_{\varepsilon_1\to\infty}\to\frac{q}{\varepsilon_2 a}. \tag{36}$$

(35)和(36)式就是未带电的导体球外置一点电荷时的镜像法结果.

当介质球的半径 $R\to\infty$时，可以证明(15)和(21)式中的积分项都趋于零. 选取新坐标系，将球心和 q 的连线与球面的交点取作原点 o_1，q 与其共轭点的位置为 $\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{z}'$，观测点的位置为 $\boldsymbol{r}_1$. 使 o_1 点固定，随着 $R\to\infty$、则球面→平面. 这时

$$\phi_{\text{out}}|_{R\to\infty}\to\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{z}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{z}|}\times\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\right], \tag{37}$$

$$\phi_{\text{in}}|_{R\to\infty}\to\frac{1}{\varepsilon_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{z}|}\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q. \tag{38}$$

这正是介电常数分别为 ε_1，ε_2 的两半无限介质，在介质 ε_2 中距交界平面为 z 处有点电荷 q 时，用镜像法求出的电势表达式.

2. 点电荷位于介质球内

用与上述同样的讨论方法可以得到，当介质球的介电常数趋于无穷大时，有

$$\phi_{\text{in}}|_{\varepsilon_1\to\infty}\to\frac{q}{\varepsilon_2 R}, \tag{39}$$

$$\phi_{\text{out}}|_{\varepsilon_1\to\infty}\to\frac{q}{\varepsilon_2 r}. \tag{40}$$

若 ε_1 有限，而当 $R\to\infty$ 时，则得

$$\phi_{\text{in}}|_{R\to\infty}\to\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{z}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{z}|}\times\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\right], \tag{41}$$

$$\phi_{\text{out}}|_{R\to\infty} \to \frac{1}{\varepsilon_2|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{z}|}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q. \quad (42)$$

(39) 和 (40) 式正是导体球的电势，(41) 和 (42) 式正是两介质交界面为无限大平面，在介质 ε_1 中有点电荷 q 时的镜像法结果.

如果在 (23) 和 (24) 式中令 $\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_2=\kappa_\infty$，当取 $\kappa_\infty\to 0$ 的极限时，将电势以 κ_∞ 的幂次展开，同前面一样利用参数积分，并引入积分变量

$$x=e^{-t},\quad v=\left(\frac{R}{a}\right)^2 e^t,$$

便可得到如下格林函数：

$$G_{out}=\frac{1-2\kappa_\infty}{\kappa_\infty r}+\frac{2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\int_0^1\frac{dx}{x}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-x\boldsymbol{a}|}-\frac{1}{r}\right)+0(\kappa_\infty), \quad (43)$$

$$G_{in}=\frac{1-2\kappa_\infty}{\kappa_\infty R}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}+\frac{Ra}{|a^2\boldsymbol{r}-R^2\boldsymbol{a}|}+\frac{a}{R}\int_{(R/a)^2}^{\infty}dv\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-v\boldsymbol{a}|}-\frac{1}{va}\right)+0(\kappa_\infty). \quad (44)$$

这就是文献 [3] 中的表达式 (B22).

综上所述，对于点电荷和介质球系统，无论点电荷在球外还是在球内，其镜像电荷的分布不再像导电球情形那样是简单的一个点，而是要再加上一条线分布. 李政道所给出的以 κ_∞ 的幂次展开的格林函数，正是与 (28) 和 (34) 式相对应的特例.

因此，对于点电荷与介质球系统，在引入镜像线电荷之后可将它的解用电像系表示. 并且，与分离变量法得到的无穷级数形式的解相比较，这种形式可能对计算会带来一些方便.

致谢：感谢葛墨林副教授的帮助.

参 考 文 献

[1] Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，连续媒质电动力学(上册)，人民教育出版社，(1963)，57—58.
[2] V. V. Batygin, I. N. Toptygin, Problems in Electrodynamics, London, (1978), 248.
[3] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D19** (1979), 1802.
[4] 曹昌祺，电动力学，人民教育出版社，(1962)，80.

（上接封三）