

分形维数和分形凝聚

黄 昀

(北京大学物理系)

在自然界中存在着许多研究对象,它们具有标度不变的性质.所谓标度不变性是指,当我们用不同倍数的照相机拍摄这个研究对象时,不管放大倍数如何改变,我们看到的相片都是相似的(从统计意义上说),而且从相片上也无法判断所用相机的倍数.天上的云团、地上的海岸线以及灰尘微粒的凝聚集团等均属于这一类研究对象.这种结构的物体在几何性质上具有重要的特征,即可以用一个有效的空间维数来表示,这个维数可以不是一个整数,而是一个可以连续变化的数,称为豪斯道夫维数.我们首先介绍豪斯道夫维数的概念.

一、豪斯道夫维数^[1-4]

长期来人们对空间维数只有非常简单直观的概念,即欧几里德维数.我们把一条直线称为一维,一个圆定义为二维,一个立方体定义为三维.如果取一个立方体,将它的每一个边长放大二倍,放大后的图形正好是原来立方体的八倍,则用数学公式表达为

$$2^3 = 8.$$

同样,对于一个 D 维的物体,若将它每一维的尺寸放大 L 倍,则就会得到 K 个原来的物体,这时有

$$L^D = K.$$

对它取对数,得到

$$D = \frac{\ln K}{\ln L}. \quad (1)$$

这个体积与长度的关系式可以作为空间维数的定义.(1)式能毫无困难地推广到非整数的范围.这就是1919年数学家豪斯道夫引入的空间维数概念.

从测度学的角度来看,要测出一个面积 S ,可以用半径为 R 的小圆去覆盖它,则所需小圆的数目是

$$N = \frac{S}{\pi R^2} \propto \frac{S}{R^2}.$$

可见, R 愈小, N 就愈大.同理,要测定一个体积 V ,可用半径为 R 的小球去填充,所需小球的数目是

$$N = \frac{V}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3} \propto \frac{V}{R^3}.$$

推广到高维情况:对于一个 D 维的物体 A ,所需的小球数是

$$N \propto \frac{A}{R^D}. \quad (2)$$

我们从两方面来讨论.首先,保持小球半径 R 不变,让物体每一维的尺寸放大 L 倍,这时物体放大 K 倍,显然小球数变成

$$N' \propto \frac{KA}{R^D}. \quad (3)$$

其次我们保持 A 不变,而把小球的半径缩小 L 倍,这时所需的小球数必然也是 N' ,

$$N' \propto \frac{A}{\left(\frac{R}{L}\right)^D}. \quad (4)$$

将(3)式和(4)式进行比较,得到

$$K = L^D.$$

取对数,得

$$D = \frac{\ln K}{\ln L}. \quad (5)$$

可见,(5)式与(1)式完全相同,所以(2)式也可以作为豪斯道夫维数的定义.现在我们用豪斯道夫维数的概念来考察三类不同的几何对

象。

1. 正规的几何图形

这种图形也就是普通的点、线、面和体等。按上面的讨论，它们的豪斯道夫维数分别为 $D = 0, 1, 2$ 和 3 。这与常用的欧几里得维数 D_E 完全一致。这类几何对象的特征是：用低一维的尺度来测量，得到无穷大；用高一维的尺度来测量，得到零；只有用合适维数的尺度去测量才能得到有限的数值。而且这个维数一定可以用正整数来表示。

2. “病态”的几何图形

我们举两个简单的例子来说明。

例 1

取一个正三角形，将其分成四等分，然后挖去中间的一个三角形（见图 1），再把剩下的三

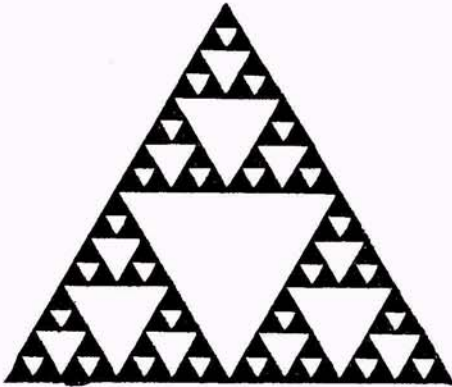


图 1

角形用同样方法进行无限分割，最后剩下部分的维数是多少呢？我们把一个边长为 $1/2$ 的三角形的边长放大二倍，这时有 $L = 2, K = 3$ ，所以

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5849 \dots$$

由此可见，这个几何集合的豪斯道夫维数是介于 1 和 2 之间的分数。

例 2

把一个立方体的每个面等分成九块，挖掉位于中间的一个小方块（见图 2），再对剩下的小立方体作相同的操作（最后剩下的几何体称为谢尔宾斯基海绵），同理可计算出它的豪斯道夫维数是

$$D = \frac{\ln K}{\ln L} = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7768 \dots$$

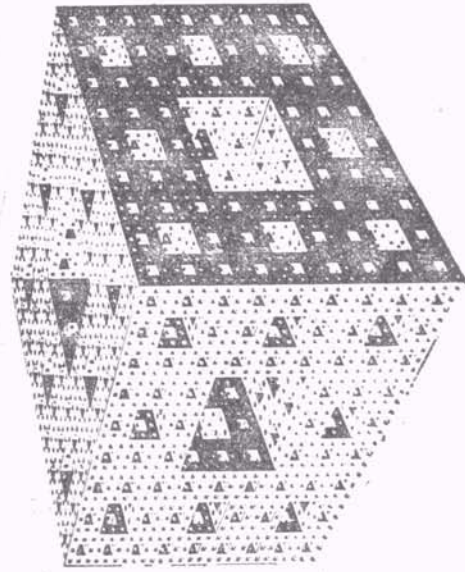


图 2

这一类几何对象的特征是：（1）它们都是经典几何无法描述的图形。例如，第一例中，它的面积趋近于零，而其周长趋于无穷大，因此它的维数只可能介于 1 和 2 之间；第二例，谢尔宾斯基海绵的体积趋近于零，而其表面却趋于无穷大，所以它的维数只能介于 2 和 3 之间。因此，它们是病态的几何图形，是一种“只有皮没有肉”的几何集合。（2）它们都具有无穷多个自相似的内部结构。任何一个分割后的图形都是原来图形的翻版。这种病态的自相似图形就是分形维数产生的原因。

3. 具有自相似分布的随机过程

这类过程的典型例子是布朗运动和高分子结构。法国物理学家皮兰对布朗运动作了详细的观测，他每隔半分钟记录下布朗粒子的坐标，画出的布朗粒子的运动轨迹是一条无规则的多边形折线[图 3(a)]，当他把观测时间改为三秒钟后，发现原来轨迹上的一个直线段被一条新的无规多边形折线取代了[图 3(b)]。新的折线与原来的折线同样复杂，并且在统计意义上具有形状上的相似性。那么布朗运动的轨迹是多少维的几何图形呢？

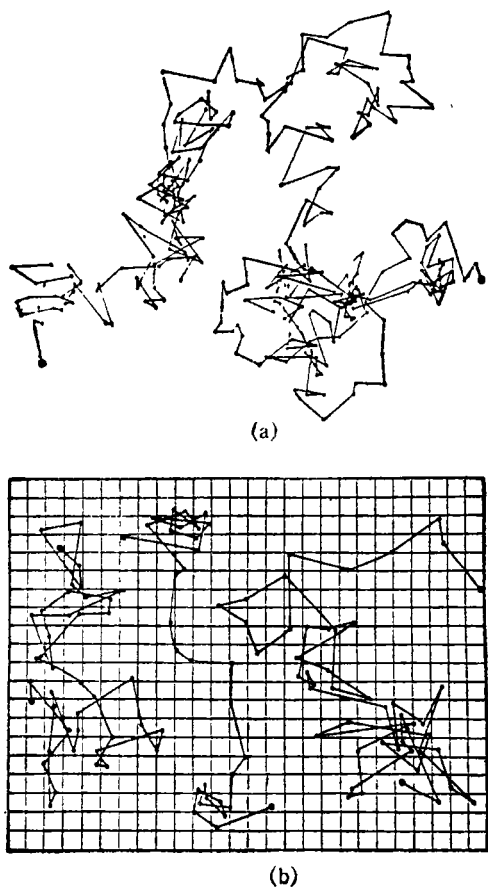


图 3

假定布朗粒子在 D_E 维中运动, 取某一时刻的位置为原点. 当粒子运动 N 步后, 粒子与原点间的距离为 R , 显然

$$R = \sum_{i=1}^N r_i,$$

其中 r_i 表示每步的矢量. 众所周知, 由于对称性 $\langle R \rangle = 0$, 因此我们要用 $\langle R^2 \rangle$ 来量度布朗运动轨迹的大小. $\langle R^2 \rangle$ 可以写为

$$\langle R^2 \rangle = \sum_{i=1}^N r_i \cdot r_i + \sum_{i \neq j} r_i \cdot r_j.$$

由于每步是独立的, 所以上式第二项为零. 如果再假定每步的步长固定为 b , 则有

$$\langle R^2 \rangle = Nb^2,$$

由此得

$$N = \frac{\langle R^2 \rangle}{b^2}, \quad (6)$$

可见 (6) 式与 D_E 无关. 将它与 (2) 式作比

物理

较, 可以看出布朗运动轨迹的豪斯道夫维数 $D = 2$. 数学家曼德波洛特指出: “布朗运动轨迹是大自然本身画下的曲线”.

大自然除了画出稍纵即逝的随机布朗运动曲线外, 它还构造了固定的长期存在的随机分布曲线, 这就是由共价键结合的线型高分子. 实验上已能测量单个高分子链的构象 (见图 4). 理论上对高分子链的分形维数可按两种模

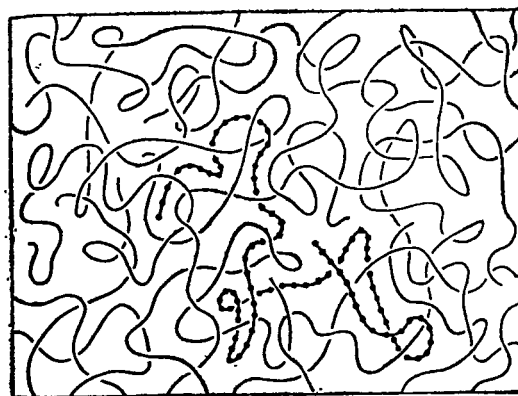


图 4

型进行计算: (1) 假定分子链节间没有相互作用, 彼此是自由的, 则与布朗运动相似, 用无规行走模型计算, 求得 $D = 2$; (2) 假定分子链节间有相互作用, 则用自避免行走模型计算, 求出的结果与高分子的欧几里得维数有关. 当 $D_E = 2$ 时, $D = 4/3 = 1.33$; 当 $D_E = 3$ 时, $D = 5/3 = 1.66$. 显然, 对于欧几里得维数为 3 的高分子链, 用无规行走模型计算时, 它的分形维数是 2, 而用自避免行走模型计算时, 它的分形维数是 1.66. 2 比 1.66 大, 这个结果表明, 有限制的自避免行走要比自由的无规行走驯服一些, 规则一些. 由此可以看出, 物体的某些随机行为是可以利用分形维数的性质来描述的.

二、分形凝聚

在凝聚态物理中, 分形维数可用来描述相变与临界现象中的某些标度不变性质, 它与临界指数有密切的关系. 同时, 它还可描述大分子的无规线团结构和渗流集团阈值等平衡态.

近年来分形维数被推广到若干远离平衡的不可逆生长过程中，这些过程也显示出自相似的标度不变性质。这个性质首先是在计算机模拟实验中发现的。1981年，T. A. Witter 和 L. M. Sander 对悬浮在溶液或大气中的金属粉末、煤灰和烟尘等微粒的无规扩散凝聚过程提出了一个理论模型^[4]，称为有限扩散凝聚过程，简称 DLA。他们的模拟实验是，取 3600 个半径约为 40 \AA 的微粒，让它们在二维方形点阵和三角形点阵上作无规扩散运动。具体步骤：首先，在点阵中央的格点上放一粒不同的种子微粒，在 $t = t_1$ 时，将一微粒放入点阵内作无规运动。假定这个微粒的运动有两种可能：一种是与种子微粒相碰并附着于种子微粒上，结合成集团；另一种是运动到点阵表面，被表面吸收并消失。然后，在 $t = t_2$ 时刻放入第二个微粒，依此类推，最后在点阵中央形成某种凝聚集团。用计算机按 DLA 模型求出的凝聚团成树枝状（见图 5）。利用密度相关函数求出凝聚结构的分

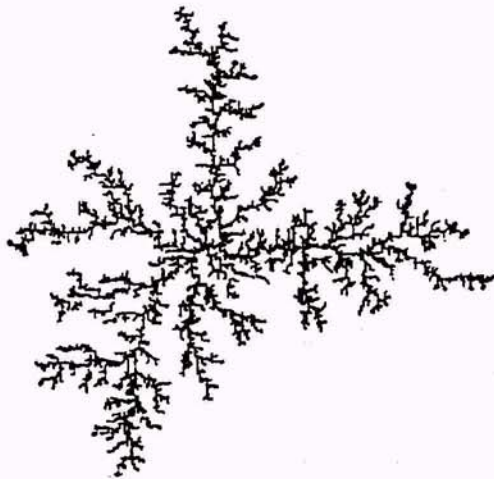


图 5

形维数，与点阵的结构无关，是一个普适常数，它只与欧几里得维数有关，具体数字为 $D = 2.4$ （三维空间）， $D = 1.68$ （二维空间）。

这个理论模型在 1984 年被应用到物理学的许多方面，而且被实验所证实。这里我们只介绍两个实验。第一个实验是研究锌金属粉末的分形结构^[5]。这是一个利用电解沉积法使锌金属微粒在二维空间内生长的实验；在一个直

径为 20 cm 的圆柱形容器内装上 10 cm 高的硫酸锌溶液，然后再注入 n-丁基醋酸盐 $[\text{CH}_3\text{COO}(\text{CH}_2)_3\text{CH}_3]$ ，它与硫酸锌形成一个分界面。在圆柱的中心垂直插入一根碳棒作阴极。棒的尖端正好位于分界面上。阳极由一直径为 17 cm 与圆柱同心的锌板圆筒构成。加上电压后，锌金属就从碳棒尖端开始进行凝聚。通常只要十分钟左右就可形成大小为几个厘米的集团，典型的结构如图 6 所示。实验还给出

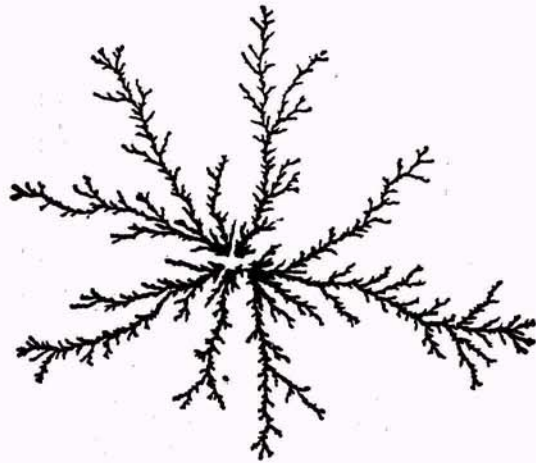


图 6

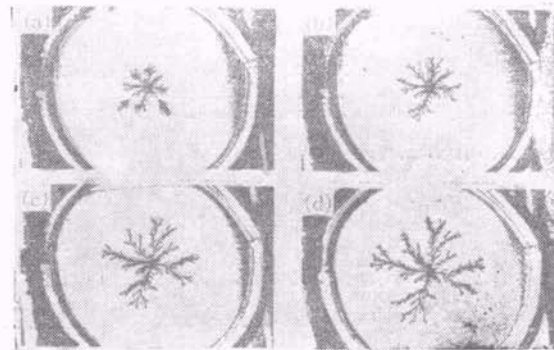


图 7

了不同时刻集团生长的演化图。图 7 中 (a)，(b)，(c) 和 (d) 分别对应于 3, 5, 9 和 15 分钟时的凝聚集团。实验给出它们的分形维数为 $D = 1.63$ ，与 DLA 模型符合得很好。第二个实验是研究在压缩的 SF_6 气体内加上 $30 \text{ kV} \times 1 \mu\text{s}$ 的脉冲电压后发生的二维径向放电^[6]。拍摄下的相片见图 8，它的豪斯道夫维数为 $D = 1.75$ 。

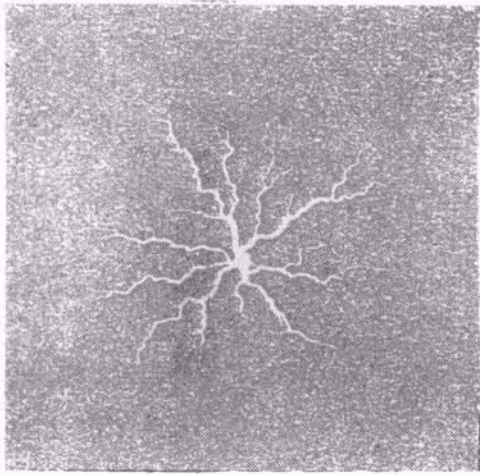


图 8

1983年 P. Meakin 修正了 DLA 模型^[7]。他认为,在 DLA 模型中只有一个不动的核心

是不符合客观实际情况的,因此他提出,让所有微粒都进入点阵进行无规随机运动,当两个微粒相遇后就结成集团,集团也作无规随机运动,因而可以结合成更大的集团。他把这种模型称为集团-集团凝聚模型。他的计算机模拟实验是,在一个 400×400 的方形点阵上放进 $N=10000$ 个微粒(相当于每一格点占有微粒数密度 $\rho=0.0625$), $N=15000$ 个微粒($\rho=0.09375$), $N=20000$ 个微粒($\rho=0.125$)和 $N=25000$ 个微粒($\rho=0.15625$)四种情况进行计算。得到的凝聚结构分别示于图 9 的(a),(b),(c)和(d)上。Meakin 证明,对于这个模型豪斯道夫维数与欧几里得维数间有如下的关系式:

$$D = \frac{5}{6} D_E.$$

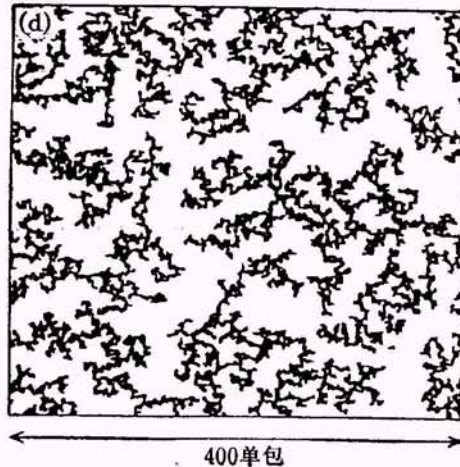
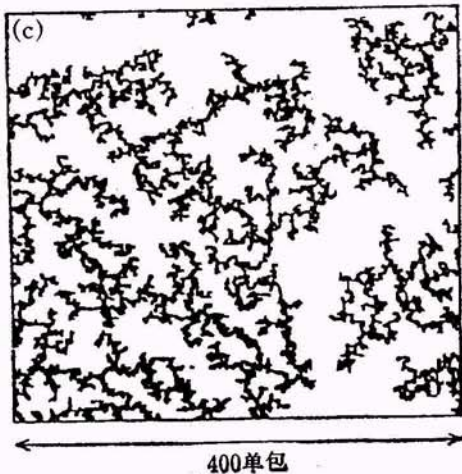
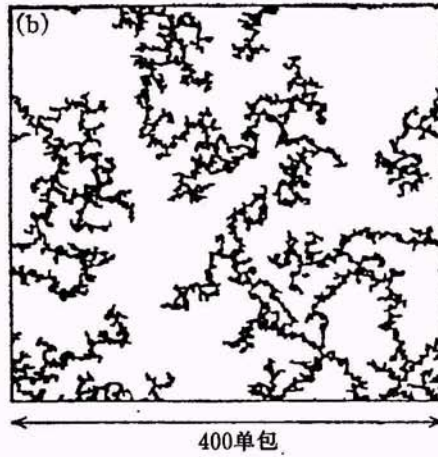
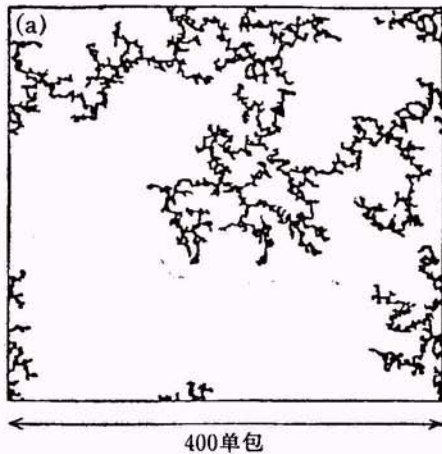


图 9

当 $D_E = 3$ 时, $D = 2.5$, 即比 DLA 模型稍大一点。这个模型能很好地描述烟灰、胶体和肿瘤等实际的生长过程。有关的实验不一一列举了。

分形凝聚是近几年发展起来的一个新课题。目前人们一方面正在推广它的应用范围, 改善和修正各种计算机模拟实验, 另一方面正企图从理论上解释为什么在远离平衡的生长过程中会具有标度不变的性质。总之, 这里还有许多饶有趣味的问题等待着人们去探索, 去开拓。

参 考 文 献

- [1] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, (1982).
- [2] L. M. Sander, *Phys. Today*, 38-1(1985), *Physics News in 1984*.
- [3] 于泳、郝柏林著, 相变和临界现象, 科学出版社, (1984).
- [4] T. A. Whitten and L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.*, 47(1981), 1400.
- [5] M. Matsushita, *Phys. Rev. Lett.*, 53(1984), 286.
- [6] L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann, *Phys. Rev. Lett.*, 52(1984), 1033.
- [7] P. Meaken, *Phys. Rev. Lett.*, 51(1983), 1119.

第三届全国光散射学术会议简讯

第三届全国光散射学术会议于 1985 年 11 月 7 日至 11 日在武汉大学举行, 出席会议的代表有 60 个单位的 160 人, 会议上宣读的论文近 100 篇。内容包括用光散射方法对离子晶体、有机晶体和半导体非晶态等材料的结构、相变、光折变及离子电导等方面的研究。布里渊散射的研究已从物理领域扩展到化学领域, 从透明材料扩展到非透明材料, 从晶态扩展到非晶态, 从一般的弹性系数测定扩展到效应和机制的研究。表面增强喇曼散射的工作引起了与会代表的很大兴趣, 共有论文 20 余篇, 比上两届会议大大增加。在非线性光散射领域中, 高压气体喇曼频移的研究, 光纤中 SRS 和 SBS 的研究, CARS 光谱术的研究以及利用 SRS 和 SBS 进行激光脉冲压缩等方面的研究取得了可喜的进展。在石油化工和合成氨等多相催化反应中, 利用喇曼光谱的高灵敏度和高分辨率的特性取得了一些

成果, 原位分析方法已受到有关部门的重视。振动光谱的研究, 在理论上有所深入, 同时许多课题来自生产实际。会议报告也反映了我国在生物的光散射研究方面的进展。光的弹性散射研究内容包括高分子溶液、高分子形态、两相体系的结构、反应过程及无机材料。在仪器设备和测试方法方面, 有关于微处理机在喇曼光谱中的应用和单色仪杂散光的测试方法等方面的论文。

会议委托南开大学出版本届会议论文集, 委托安徽大学和中国科学技术大学筹办 1986 年光散射教学研究讨论会。还决定第四届全国光散射学术会议于 1987 年下半年在昆明举行, 由云南大学、四川大学和中国科学院物理研究所共同负责筹备。

(蓝国祥)