朱载堉及其平均律

——纪念朱载堉诞生450周年

戴念祖

(中国科学院自然科学史研究所)

今年是明代杰出的科学家和艺术家朱载堉诞生450周年. 他对音乐理论的贡献标志着中国两千年封建社会中声学实验和研究成就的最高峰. 王子载堉的名字早在一、二百年前就传遍了欧洲学术界, 他学识渊博、多才多艺, 李约瑟博士曾称颂他为"文艺复兴时代的人."

一、朱载堉的生平概略

朱载堉是明仁宗朱高炽的第六代孙, 生于嘉靖十五年(公元1536年), 卒于万历三十五年十二月(公元1612年1月). 他的父亲朱厚烷嗣郑王, 因此, 有人称他为"王子载堉".

据顺治年间编修的《河南通志》卷五十八载: "载堉儿时……无师授, 辄能累黍定黄钟, 演为象法、算经、审律、制器, 音协节和, 妙有神鲜."他从小喜欢音乐、数学, 《明史》称他"笃学有至性". 他自述道: "余少嗜音律, 长而益得其趣, 是以乐学之说, 颇异于众."[1]"(余)弱冠之时, 读《性理大全》、……、《律吕新书》……等而悦之, 口不绝诵, 手不停披, 研究既久, 数学之旨颇得其要."[2]

嘉靖二十九年(公元1550年), 因朱厚烷上书规谏好道教、奢侈至极的世宗帝, 语词恳切、直率, 世宗帝为此恼怒异常. 同时, 朱厚烷的伯父祐橏夺爵心切, 竟诬告厚烷有四十条叛逆罪. 朱厚烷因此被削爵, 并被禁锢于祖籍安徽凤阳. 是年, 朱载堉刚十五岁, 他"痛父非罪见系, 筑土室宫门外, 席藁独处者十九年."[3]在这些年月, 朱载堉布衣蔬食, 发奋攻读, 写下了大量的著作.

世宗朱厚熜卒后, 穆宗朱载垕嗣位. 在新皇登基、大赦天下之时, 朱厚烷得以平反, 朱载堉也于隆庆二年(公元1568年)结束了"席藁独处"的生活, 重入王府.

万历十九年(公元1591年), 朱厚烷卒. 朱载堉理当承父王位, 但他累疏恳辞、执意让爵. 从他父亲卒年起, 直到万历三十四年(公元1606年), 经十五年七疏之后, 神宗帝才予以允准. 在他父亲被诬告受害五十六年之后, 朱载堉终于将爵位让给了当年诬告他父亲的祐橏之孙载玺. 这件事, 真是非同小可. 为此事, 他又受到他的三代内的兄弟载墩之孙常漎的谩骂. 常漎上疏, 执意不肯让爵, 还"诋载堉为大奸"[4]. 让出国爵, 意味着每年要少收入一笔可观的赋税财产. 载堉不仅将郑王所有全部让与载玺, 而且将其郡王所有全部让与常漎. 为此, 神宗帝表彰"载堉恳辞王爵, 让国高风, 千古罕见"[5], 并敕建玉音坊. 一个封建时代的王子, 仅凭这点精神, 即使没有学术贡献, 也令后人敬佩.

在朱载堉让爵的岁月中, 大概因为是非过多, 加上他雕版、印书劳累, 使他"宿疾举发, 连年未瘳"[6]. 让爵后, 他自称道人, 迁居怀庆府城外, 安度晚年, 并务益著书. 他与朋友"面讲古今历事, 夜深忘倦", "散步中庭, 仰窥玄象"[7], 过着纯粹学者式生活.

朱载堉一生著作甚丰. 从嘉靖三十九年

---

1) 朱载堉《瑟谱》卷二.
2) 朱载堉《进历书奏疏》.
3) 《明史·诸王列传》.
4) 5) 《明神宗实录》卷四百二十一.
6) 朱载堉《进律书奏疏》.
7) 邢云路《古今律历考》, 朱载堉《序》.

(公元 1560 年)完成《瑟谱》处女作起,到万历八年(公元1580年)的整二十年间,他撰写了《律学新说》、《律吕精义》、《乐学新说》、《算学新说》、《律历融通》等初稿,完成了十二平均律的创建工作.他的著作,大部分收集在《乐律全书》中.《乐律全书》从万历二十四年(公元 1596 年)到万历三十四年(公元 1606 年)雕版印刷完毕,费时十年.这是我国科学史和艺术史上的一部灿烂巨著,它的内容涉及音律学(也叫音乐声学,近二十年有人把它列入音乐物理学中的一部分)、数学、天文学、物理学、计量学、乐器制造、音乐、舞蹈、绘画、诗歌、哲学.朱载堉是我国封建社会晚期最有创造性的一个学者.

二、朱载堉的十二平均律

朱载堉创建了十二平均律,是大家所熟知的.上一世纪,德国伟大的物理学家亥姆霍兹(1821—1894)在他的名著《论音感》一书中曾多次提及朱载堉的贡献.他说:"在中国人中,据说有一个王子叫载堉的,他在旧派音乐家的大反对中,倡导七声音阶.把八度分成十二个半音以及变调的方法,也是这个有天才和技巧的国家发明的."

在本世纪、特别是七十年代,某些西方学者没有研读朱载堉的《乐律全书》,仅凭来华传教士向西方介绍的点滴知识,或者只是依据汉学家翻译的只言片语,因而怀疑朱载堉创建十二平均律的数学能力,甚至怀疑明代中国人有开高次方根(如$\sqrt[12]{2}$)的能力;有个别西方学者抱着"西方文化比东方优越"的观点,也拼命地与朱载堉争夺优先权.他们公然声称要"抹去在王子载堉平均律成就上存在的虚幻的光环",至少要"分给斯泰芬(Simon Stevin, 荷兰的数学家和工程师,1548—1620)部分的和有限的优先权,不是'发明'、而是算学定义和一个相关的计算方法的优先权."[1]

以下我们着重介绍朱载堉如何通过求解等比数列而创建十二平均律的.

为叙述方便,我们按音高顺序将一个八度内的十三个律,以及朱载堉计算方法列于表 1 之中.

朱载堉通过大量的比较、研究和声学实验,发现只有在一个八度内取十二律的办法才是明智的.他也在批判地总结前人的研究成果上,才懂得只有运用等比数列的方法才能够作到旋宫转调.当时的数学尚未有求解等比数列的方法,朱载堉谋求解决音乐理论中的旋宫问题,其必然结果是发现十二平均律;而解决十二平均律的数学理论又必然使他攀上了另一个科学高峰.

在已知首项、末项和项数之后,如何求解这个等比数列?朱载堉是在其《算学新说》中阐述当时的这个难题的.

首项即倍黄钟,其数值为 2;末项即正黄钟,其数值为 1,项数为 13.朱载堉首先求取第 7 项.他以正黄钟值 1 为勾和股,用勾股求弦术得第 7 项值为$\sqrt{2}$.他这样做的目的,是为了将他的十二平均律(朱载堉当时称为"新法密率")假托是从《周礼·㮚氏为量》中推导出来的.因为《周礼》是儒家崇奉的经典,他希望自己的新理论能容易地为士大夫所接受并得到皇上的恩准.其实,朱载堉完全清楚这是在 13 项中求等比中项.因为 $\sqrt{2\times 1}$ 在数值上等于 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,前者表示等比中项的求法,后者是勾股求弦术,所以朱载堉是善于在保守势力中推广新理论和新方法的.但是,当他不能再用勾股术求第 4 和第 10 项时,他就清楚地表述了求解等比中项的方法.

《算学新说》"第四问"写道:"以黄钟正律乘蕤宾正律得平方积……[2],开平方所得,即夹钟正律."这条定律性文字表述了在第一项与第七项之间求等比数列的中项的方法.如果将这条文字的正律改为倍律,其意义是相同的.按照这个说法,在倍律中,倍夹钟$=\sqrt{\text{倍黄}\times\text{倍蕤}}=\sqrt{2\times\sqrt{2}}$.这就是第 5 项的计算方法.

《算学新说》"第五问"写道:"以黄钟正律

1) F. A. Kuttner, *Ethnomusicology*, **19**-2 (1975), 163—201.

2) 笔者省略的是以汉字书写的 25 位数目字,以下皆同.

表 1　朱载堉关于等比数列计算方法表*

项数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
律名	倍黄	大　吕	太簇	夹　钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南　吕	无射	应　钟	正黄
计算方法	2	$\sqrt[3]{\sqrt{2\times\sqrt{2}}\times 2^2}$		$\sqrt{2\times\sqrt{2}}$			$\sqrt{2}$			$\sqrt{1\times\sqrt{2}}$		$\sqrt[3]{\sqrt{1\times\sqrt{2}}\times 1^2}$	1

* 从第 2 项到第 12 项皆为倍律，表中省略了"倍"字.

乘蕤宾倍律得平方积……，开平方所得，即南吕倍律."这也是一条定律性文字，它表述了在表 1 中由第 13 项、第 7 项求取第 10 项的方法.这就是，$\text{倍南吕}=\sqrt{\text{正黄}\times\text{倍蕤}}=\sqrt{1\times\sqrt{2}}$.

在已知首项和末项，并求取了第 7，4 和 10 三个项以后，剩下的是在四项中如何求其第 1 和 2 两项的方法.

《算学新说》"第六问"写道："置夹钟正律以黄钟再乘，得立方积……，开立方所得，即大吕正律也."这里的"再乘"，即乘二次. 所以，$\text{正大吕}=\sqrt[3]{\text{正夹}\times\text{正黄}\times\text{正黄}}=\sqrt[3]{\text{正夹}\times(\text{正黄})^2}$. 朱载堉当然清楚，从正律八度内推得的这个公式也适用于倍律八度内. 因此，

$$\text{倍大吕}=\sqrt[3]{\text{倍夹}\times(\text{倍黄})^2}=\sqrt[3]{\sqrt{2\times\sqrt{2}}\times 2^2}.$$

实际上，这就是在由四项构成的等比数列中，由首项、末项而求第二项的方法.

《算学新说》"第七问"写道："置南吕倍律以黄钟再乘，得立方积……，开立方所得，即应钟倍律也."由此可知，

$$\text{倍应钟}=\sqrt[3]{\text{倍南吕}\times(\text{黄钟})^2}=\sqrt[3]{\sqrt{1\times\sqrt{2}}\times 1^2}.$$

实际上，这是在由四项构成的等比数列中，由首项、末项而求第三项的方法.

在表 1 的 13 项构成的等比数列中，朱载堉例举了以上几项的求解方法. 这几项解法是求解任一个等比数列的典型例子. 其它各项可以依此类推. 朱载堉虽然没有将他们全部算出，但他举的这些例子已经完备无遗了，再举其它项的求法是多余的. 正是在《算学新说》的影响下，清代音律学家陈沣（1810—1882）对等比数列求解法作了如下总结：

"连比例三率，有首率、末率求中率之法：以首率、末率相乘，开平方得中率.""连比例四率，有一率、四率求二率、三率. 其法以一率自乘，又以四率乘之，开立方得二率；以四率自乘，又以首率乘之，开立方得三率也."[1]

由上可见，朱载堉完满地解答了等比数列的求解问题，他在攀登上十二平均律高峰的同时，又攀上了一个数学高峰. 朱载堉是在公元 1581 年之前完成这两大发现的，荷兰的数学家斯泰芬是在公元 1585—1600 年之间完成的.朱载堉比斯泰芬至少早五至二十年，要从朱载堉著作中剥夺丝毫优先权的作法，都是对他著作不求甚解造成的. 我们应当好好读读朱载堉在完成十二平均律之日写下的这一段话：

"是以新法不用三分损益、不拘隔八相生，然而相生有序，循环无端，十二律吕一以贯之. 此盖二千余年之所未有，自我圣朝始也. 学者宜尽心焉."[2]

朱载堉是非常重视数学的人. 他把数学看作是完成新理论的"羽翼"[3]，即一种有力的辅助工具. 他在《律学新说》、《律吕精义·内篇》中是以另一种数学方式叙述十二平均律计算方法的：将八度音程比值 2 进行 12 次方根运算，那么，$\sqrt[12]{2}$ 即是十二平均律的半音音程，他把这个数值称为"密率"；既求得密率，只要将起始音高以密率累除 12 次，就得到了十二平均律的各律音高. 实际上，这就是以"密率"（即 $\sqrt[12]{2}$）为公比的、由十三项构成的等比数列. 由此出发，朱

1）陈沣《声律通考》卷二.
2）朱载堉《律吕精义·内篇》卷一.
3）朱载堉《算学新说》(前言).

载堉对十二平均律的计算方法和定义作了如下总结:

"创立新法:置一尺为实,以密率除之,凡十二遍."[1]

"盖十二律黄钟为始,应钟为终,终而复始,循环无端. ……是故各律皆以黄钟……为实,皆以应钟倍律 1.059463…为法除之,即得其次律也."[2]

$1.059463 = \sqrt[12]{2}$. 朱载堉将 $\sqrt[12]{2}$ 计算到 25 位数,我们在引文中省略了,并且用阿拉伯数字代替他书中的长长的一串汉字数据,这只不过是为了阅读方便.朱载堉著作中有上千个数据,都是计算到 25 位数,而今天的袖珍电子计算器一般地才十位数字,我们不能不惊讶他作学问的认真! 今天对十二平均律的计算方法概括为:

"这个最简单的方法是要为半音选择一个正确的比例,然后把它运用十二次."[3]

今天的《物理学辞典》将平均律定义为:

"平均律的半音音阶在一个八度内有十三个音,任何相邻两音之间的音程是 $\sqrt[12]{2}$."[4]

四百年前朱载堉的定义和今天的科学定义何其相似乃尔! 在这里,要注意的是,前者在一个八度中从黄钟(相当于C音)算到应钟(相当于 $^{b}C^{1}$),故为十二律;后者从黄钟算到清黄钟(C^{1}),故为十三音.

朱载堉还将他的十二平均律的数值运用到管上,并且作出了极好的适于我国律管的管口校正公式.他使十三支管长和平均律各律数值对应,并使各律管径随音高递增而递减.他的管口校正公式为

$$\frac{d_n}{\sqrt[24]{2}} = d_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, 12),$$

式中,d 为管内径,两个相邻律管的内径之比为 $\sqrt[24]{2}$. 这就是他的闻名的"异径管律". 因为,当管长与弦长一致时,管音决不会与弦音相同,而必须对管口作出校正. 朱载堉冲破历代"同径管律"的束缚,采用缩小管径的方法以达到校正管口的目的. 他采用 $\sqrt[24]{2}$ 作为管径公比数,是否有道理呢? 不妨用现代方法作一次推演证明.

朱载堉说:"律之为用,其积数与声气在内而不在外."[5]"积数"即律管的容积 V,"声气"即律管发音 T. 设管长为 l,管内横截面为 s,管内径为 d,则

$$V = sl, \quad s = \frac{\pi}{4} d^2.$$

按朱载堉的看法,

$$T \propto V \propto sl,$$

在同一律管下,l 不变,则

$$T \propto s \propto d^2,$$

或者

$$d \propto \sqrt{T}. \qquad (1)$$

对 d 所作的校正,必须使管音与弦音依同一律制发出相同的绝对高度的音. 而遵从十二平均律的弦音有如下关系:

$$T_n = \frac{T_{n+1}}{\sqrt[12]{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots 12),$$

即

$$T_n \propto 1/\sqrt[12]{2}. \qquad (2)$$

当管长 l 与弦长完全相同时,为使管音与弦音一致,即要使(1)和(2)式中 T 相同,此时联合(1)、(2)式,则得

$$d_n \propto \sqrt{T_n} \propto 1/\sqrt[24]{2}. \qquad (3)$$

(3)式正是一组律管与十二平均律定律法的发音完全一致时,管径所应遵循的数学变化式.朱载堉在管径计算中采用 $\sqrt[24]{2}$ 这一数,其奥妙就在于此.

上一世纪,比利时声学家、布鲁塞尔乐器博物馆馆长马容(Victor-Charles Mahillon, 1841—1924)根据朱载堉的管口校正数据复制了一套中国律管,并作了测音,然后他惊讶地写道:

(下转第 300 页)

1) 朱载堉《律学新说》卷一.
2) 朱载堉《律吕精义·内篇》卷一.
3) J. M. Barbour, Tuning and Temperament, a Historical Survey. East Lausing, Mich., 1951, 2/1952, R/1973. 本文转引自 The New Grove Dictionary of Music and Musicions. MacMillan, Vol. 18, (1980), 664.
4) A New Dictionary of Physics, Edited by H. J. Gray and A. Isaacs. Longman, (1975), 190.
5) 朱载堉《律学新说》卷一《造律第七》.