J. J. 汤姆孙——波导理论的先驱

黄 志 洵

（中国计量科学研究院）

约瑟夫·约翰·汤姆孙爵士 (Sir Joseph John Thomson, 1856—1940)[1], 1906 年因发现电子而荣获诺贝尔奖金物理学奖. 1911 年他解释了正射线(positive rays),成为 F. W. Aston (1877—1945)关于质谱研究工作的先导，并促进了同位素的发现. 他一生发表过许多著作，并曾任英国皇家学会会长，是科学史上一位卓越的科学家.

1893 年，J. J. 汤姆孙发表了一部著作:《关于电磁学新研究的笔记——克拉克·麦克斯韦教授"论电学与磁学"的续篇》[2]. 鉴于这部著作的重要性，我们从美国威斯康星大学物理系获得了该书内容的部分复印体. 本文是根据这些第一手材料进行研究的结果.

1893 年,英国物理学家 O.Heaviside(1850—1925) 发表了他写的新书《电磁理论》[3]. 在该书第 I 卷第 IV 章中,他对导波传输发表了一些意见. 该章的题目是"平面电磁波理论"，在 § 206 中他写道:

"……波在没有导体的以太中,不断地离开自己向外扩展，并使自己衰减. ……我们可以在很大的程度上停止其扩展,并造成一个行波,向我们希望它去的方向行进. 实际上，用两根导体(平行双导线). 也可用一根导线，但还有大地,后者等效于另一根导线. ……

(上述情况是)发生在导体之外;现在,发生了这样的问题: 我们能象光线那样，使电磁波通过管子(译注: 金属管子)吗 ?无疑，当管内有第二导体时,我们可以做到这点,因这在实质上与平行双导线没有什么区别. 但是，没有内导体就不行，因为我们如果取掉它，则位移管(tubes of displacement)在内部就无处落脚，也没有可以沿着跑动的扶手". (着重点为本文作者所加.)

因此，Heaviside 一方面对平行双导线传输发表了正确的观点，即认为沿导线传输的电磁波是在介质中传输的，导线的作用仅为引导电磁能的运动，电磁波动过程并非在导线内部发生. 另一方面,他认为如把导体内部挖空(即成为金属管子),亦不可能有电磁波传播，必须放入内导体才行. 这就是说，Heaviside 肯定了同轴线，否定了波导的可实现性. 这当然是错误的!

然而，在同一年出版的 J. J. 汤姆孙的著作，却完全肯定了圆金属壁管子(即圆波导)传输电磁波的可实现性. 为什么汤姆孙能得出正确的结论?这主要是因为他的数学出发点正确，即首先去分析"导体内部的圆柱形空腔的电振动",即求解二维波方程. 这就使他走上了正确的道路,并得出可信的结果,成为历史上第一位预言波导的科学家!

现在，我们先来弄清楚 J. J. 汤姆孙的著作是采用什么物理量进行研究的 ? 1897 年,瑞利勋爵(Lord Rayleigh, 1842—1919)的著作[4,5],与汤姆孙的著作所用的物理量相似. 他们所用的"电动强度" (electromotive intensity) 就是今天的电场强度 ($\boldsymbol{E}$),"磁感应" (magnetic induction)就是今天的磁感应强度 ($\boldsymbol{B}$),也可理解为磁场强度($\boldsymbol{H}$). 因此，我们在阅读上世纪文献时，可参考表 1.

为了读者便于理解，我们在介绍汤姆孙的分析时,一律采用今天的习惯的符号,并改变其单位制为 SI 制.

设有一介质圆柱 (ε, μ) 埋在均匀的无限导体空间 (ε_c, μ_c) 之内，如图 1 所示. 汤姆孙指出,在介质内,下述偏微分方程成立:

表 1

汤姆孙和瑞利使用的符号		P	Q	R	a	b	c
现在使用的符号	直角坐标	E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
	圆柱坐标	E_r	E_ϕ	E_z	H_r	H_ϕ	H_z

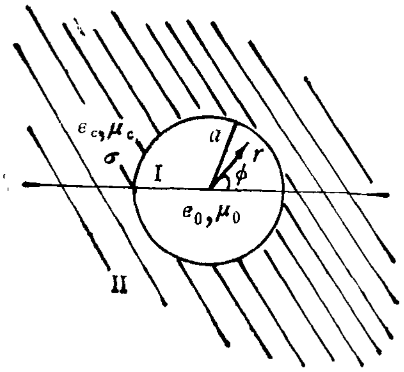

图 1

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

汤姆孙称 V 是"电动作用"(electrodynamic action)通过介质传播的速度，其实就是电磁波的速度．在导体内有下述偏微分方程成立：

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \sigma\mu_c \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad (2)$$

σ 是电导率(汤姆孙的比电阻的倒数)．这两个公式可以写为

$$\nabla_t^2 H_z = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad (\text{在介质中}),$$

$$\nabla_t^2 H_z = \sigma\mu_c \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{在导体内}),$$

这就是汤姆孙的出发点．在取圆柱坐标系时有

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad (\text{在介质中}),$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} = \sigma\mu_c \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{在导体内}).$$

汤姆孙假定 H_z 按 $\cos m\phi \cdot e^{j\omega t}$ 的规律变化，这其实是引进了 1860 年亥姆霍兹 (H. L. F. Helmholtz, 1821—1894) 提出的稳态、单色简谐波概念[6]．这样，就得到两个常微分方程：

$$\frac{d^2 H_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_z}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{V^2} - \frac{m^2}{r^2}\right) H_z = 0 \quad (\text{在介质中}), \qquad (3)$$

$$\frac{d^2 H_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_z}{dr} - \left(j\omega\sigma\mu_c + \frac{m^2}{r^2}\right) H_z = 0 \quad (\text{在导体内}),$$

式中 m 为正整数．我们令

$$\gamma_c = \sqrt{j\omega\mu_c\sigma},$$

则在导体内的方程是：

$$\frac{d^2 H_z}{d(\gamma_c r)^2} + \frac{1}{\gamma_c r}\frac{dH_z}{d(\gamma_c r)} - \left[1 + \frac{m^2}{(\gamma_c r)^2}\right] H_z = 0. \qquad (4)$$

在介质中的方程是 Bessel 方程，而在导体内的则是虚变数 Bessel 方程．

显然，在介质中的方程，只有下述特解：

$$H_z^{\mathrm{I}} = A\cos m\phi \cdot J_m\left(\frac{\omega}{V} r\right) \cdot e^{j\omega t}, \qquad (5)$$

式中 A 是常数．通解的另一特解(Neumann 函数)不存在，因需确保 $r=0$ 时场为有限值．对于导体内的方程，则可能有的两个特解是 $I_m(\gamma_c r)$ 和 $K_m(\gamma_c r)$，但 r 越大，$I_m(\gamma_c r)$ 越大，这不符合物理实际，故只剩一项特解：

$$H_z^{\mathrm{II}} = B\cos m\phi \cdot K_m(j\gamma_c r) \cdot e^{j\omega t}, \qquad (6)$$

式中 B 是常数．因此，汤姆孙指出，在介质中，场是按 Bessel 函数变化；在导体内，场是按第二类修正 Bessel 函数变化． 后一描述方式正是汤姆孙的独特之处!

汤姆孙曾导出圆波导 $\boldsymbol{H}_{mn}$ 模的特性方程，这项研究工作在上世纪末取得成功是令人惊奇的! 他的方法是用两个边界条件得到两个不同方程，联立它们以消去两个任意常数，最后得到一个超越方程，叫特性方程(这是后人于二十世纪使用的词，汤姆孙并未这样说)．两个边界条件为：

1. 介质与导体界面处，与表面平行的"磁力线"连续．用现在的表述方式可写为

$$H_z^{\mathrm{I}}|_{r=a} = H_z^{\mathrm{II}}|_{r=a}. \qquad (7)$$

2. 介质与导体界面处，与 r 垂直的“电动强度”连续. 用现在的表述方式可写为

$$E_\phi^{\rm I}|_{r=a} = E_\phi^{\rm II}|_{r=a}. \tag{8}$$

第一个边界条件导致

$$AJ_{\rm m}\left(\frac{\omega}{V}a\right) = BK_{\rm m}(j\gamma_{\rm c}a). \tag{9}$$

然而，为运用第二个边界条件，先要写出 E_ϕ 的表达式：

$$E_\phi^{\rm I} \cong -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{dH_z^{\rm I}}{dr} \quad (\text{在介质中}),$$

$$E_\phi^{\rm II} \cong -\frac{1}{\sigma}\frac{dH_z^{\rm II}}{dr} \quad (\text{在导体内}).$$

这样，可得

$$\frac{dH_z^{\rm I}}{dr} = A\cos m\phi \cdot J_{\rm m}'\left(\frac{\omega}{V}r\right) \cdot e^{j\omega t}\cdot\frac{\omega}{V},$$

$$\frac{dH_z^{\rm II}}{dr} = B\cos m\phi \cdot K_{\rm m}'(j\gamma_{\rm c}r) \cdot e^{j\omega t}\cdot j\gamma_{\rm c}.$$

由第二个边界条件，可得

$$A\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\omega}{V}J_{\rm m}'\left(\frac{\omega}{V}a\right) = B\frac{1}{\sigma}j\gamma_{\rm c}K_{\rm m}'(j\gamma_{\rm c}a). \tag{10}$$

联立(9)，(10)两式，并设 $\mu=\mu_0, \mu_{\rm c}=\mu_{\rm r}\mu_0$，得

$$\frac{V}{\omega a}\frac{J_{\rm m}'\left(\frac{\omega}{V}a\right)}{J_{\rm m}\left(\frac{\omega}{V}a\right)} = \frac{\mu_{\rm r}}{j\gamma_{\rm c}a}\frac{K_{\rm m}'(j\gamma_{\rm c}a)}{K_{\rm m}(j\gamma_{\rm c}a)}. \tag{11}$$

这就是圆波导在壁电导率为有限值时的特性方程，即汤姆孙著作中的(86)式；但本文的推导在细节上与他有所不同，这是为了便于当代的读者阅读.

汤姆孙指出，当“电振动的波长可与圆柱的直径($2a$)相比拟”，亦即波长很短、频率很高时，$\gamma_{\rm c}a$ 很大，则

$$K_{\rm m}(j\gamma_{\rm c}a) \cong (-1)^m e^{-\gamma_{\rm c}a}\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_{\rm c}a}},$$

于是

$$K_{\rm m}'(j\gamma_{\rm c}a) = jK_{\rm m}(j\gamma_{\rm c}a).$$

此时(11)式的右端成为 $\mu_{\rm r}/\gamma_{\rm c}a$，是小量，故在频率很高(即微波)时，得到下式作为方程的近似解：

$$J_{\rm m}'\left(\frac{\omega}{V}a\right) = 0. \tag{12}$$

这意味着界面处电场强度切向分量为零. 这时，取 $m=1$，得到“电振动的最大周期”的方程：

$$\frac{\omega_{\rm c}}{V}a = 1.841.$$

由此可得主模($\boldsymbol{H}_{11}$)截止波长为

$$\lambda_{\rm c.11} = 2\pi\frac{V}{\omega_{\rm c}} = 0.543\times2\pi a = 3.412a, \tag{13}$$

这比半个圆周长(πa)稍大. 上述概念是完全正确的，但汤姆孙当时并没有“模式”的说法.

汤姆孙指出，如 $\lambda>\lambda_{\rm c}$ (工作波长大于截止波长)，“电振动没有衰减”，这就是电磁波传输. 但如细致地考查特性方程等式右端，则发现有一个小的虚数项存在，“它标志着振动的逐渐减小”. 这就是说，计及壁的有限电导率时，电磁波传播过程中有小的衰减.

汤姆孙所预言的“波长可与圆柱直径相比拟的波”，其实就是后来的微波. 他预言的圆波导，四十三年后(即 1936 年)才由美国贝尔实验室的科学家们实现[7]. 这就说明，科学的预言可以大大早于技术的发展，同时亦证明了应用数学的威力.

可贵的是，他一开始就处理有限导电壁情况，从而使论述接近实际，给人以较深的印象. 在微波条件下，他指出可按理想导电壁来求解他的特性方程，从而求出截止频率与截止波长，误差不会大. 这样，汤姆孙正确解决了主模的 $\lambda_{\rm c}$ 和 $f_{\rm c}$ 的计算问题. 此外，他指出有限导电壁必然引起对导波的小衰减.

他的不足之处在于：(1)未分析矩形结构；(2) 在推导过程中假定导体 σ 非常大，介质 $\sigma=0$； (3) 从一开始就规定了是磁波一类模式. 第(2)，(3)两点决定了他的分析不是很严格，尤以第(3)点为最重要！

汤姆孙一开始就从 H_z 的标量波方程出发. 然而，当电导率为有限时，我们必须把电型场与磁型场叠加，才能满足 $r=a$ 处的边界条件. 因此，合成场既不是横向磁场，也不是横向电场，而是混合模 (hybrid modes). 只有壁电导率 $\sigma=\infty$ 时，TM 或 TE 模才能单独存在.

从1893年到1936年，形成了波导理论领域的很长的一段空白. 直到 1936 年，J. R. Carson 等三人发表了一个很长的特性方程[8]，才解决了下述问题，即既要假定壁电导率为有限，又要是混合模分析. 这就是著名的Carson-Mead-Schelkunoff 方程，J. A. Stratton[9] 曾更清楚地说明其物理含意. 既然都是有限导电壁分析，从 CMS 方程应能导出 J. J. Thomson 的方程. 由于

$$j\gamma_c a = j\sqrt{j\omega\mu_c\sigma}\,a = \sqrt{-j\omega\mu_c\sigma}\,a$$

$$= a\omega\sqrt{\frac{\mu_c\sigma}{j\omega}},$$

故当 $\sigma \gg \omega\varepsilon$ 时，

$$j\gamma_c a \cong a\omega\sqrt{\mu_c\varepsilon_c} = ak,$$

式中

$$k = \omega\sqrt{\mu_c\varepsilon_c}.$$

令

$$v = a\sqrt{k^2+\gamma^2},$$

故当 $k^2 \gg \gamma^2$ 时，有

$$v \cong j\gamma_c a.$$

故特性方程等式右端为

$$\frac{\mu_r}{ak}\frac{K'_m(ak)}{K_m(ak)} \cong \frac{\mu_r}{v}\frac{K'_m(v)}{K_m(v)}.$$

另一方面，假定介质为真空 (ε_0, μ_0)，则

$$\frac{\omega}{V}a = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,a = k_0 a,$$

式中

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

令

$$u = a\sqrt{k_0^2+\gamma^2},$$

则当 $k_0^2 \gg \gamma^2$ 时，有

$$u \cong \frac{\omega}{V}a,$$

因而汤姆孙的特性方程也可写为

$$\frac{1}{u}\frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = \frac{\mu_r}{v}\frac{K'_m(v)}{K_m(v)}. \qquad (14)$$

然而由数学知

$$K_m(jx) = (-1)^m\left(\frac{\pi}{2}j^{m+1}\right)H_m^{(1)}(x),$$

$H_m^{(1)}$ 是 m 阶 Hankel 函数，故有

$$\frac{K'_m(jx)}{K_m(jx)} = \frac{H_m^{(1)\prime}(x)}{H_m^{(1)}(x)}.$$

由此可得特性方程:

$$\frac{1}{u}\frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = \frac{\mu_r}{v}\frac{H_m^{(1)\prime}(v)}{H_m^{(1)}(v)}. \qquad (15)$$

显然，这正是 Carson-Mead-Schelkunoff (缩写为 CMS) 方程的一部分，或者说它可由 CMS 方程立即推出. 通过我们的推演，还可知道汤姆孙的方程不包含波导传播系数 γ，这无疑会大大降低他的方程的应用价值[10]!

美国威斯康星大学的罗白兰女士(Mrs. BabaraRust)协助寻找及复制早期资料；中国科学院毕德显学部委员协助修改了 Heaviside 文字中的关键语句的译文，谨此一并致谢!

参 考 文 献

[1] A. V. Howard, Dictionary of Scientists, Chambers Ltd. (1961) London & Edinburgh.
[2] J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism, Intended as a Seguel to Professor Clerk-Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism, (1893); 重印本: Dawsons of Pall Mall, London, (1968).
[3] O. Heaviside, Electromagnetic Theory, Vol. I, (1893); 重印本: Chelsea Publishing Co., New York.
[4] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, S. 5, **43**(1897), 125.
[5] 黄志洵，物理，**13**(1984)，250.
[6] H. von Helmholtz, *Jour. für Math.*, **57**(1860), 1.
[7] G. C. Southworth, *Bell. Syst. Tech. Jour.*, **15**(1936), 284.
[8] J. R. Carson, S. P. Mead, S. A. Schelkunoff, *B. S. T. J.*, 15 (1936), 310.
[9] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw Hill, (1941).
[10] 黄志洵，截止波导理论导论，计量出版社，(1981).