傅里叶光学中的等效源光场分析方法

丁剑平　　叶权书

（南京大学物理系）

在相干光处理系统中，任一平面上的光场分布可由其前一平面上的光场计算得到．两平面间是自由空间时，为菲涅耳积分运算；如是透镜或透射掩模，则为乘积运算．为简化运算，A. Vander Lugt 于1966年提出 q 函数法[1]，它已被目前通用教科书[2,3]采用．1980年后，J. Shamir 等人提出算子法[4,5]，对前法作了改进．但计算仍需逐面进行，繁冗的数学运算往往使物理概念被忽视了．本文提出的等效源光场分析方法，物理概念清晰，从物理图像分析物理结果，有助于简化运算．

一、等效源光场

当两平面 S_1，S_2 之间为自由空间时，后一平面光场 S_2 可由前一平面光场 S_1 通过非涅耳积分计算给出，我们称 S_1 为 S_2 的源光场．由于菲涅耳积分可以逆溯，因此从 S_2 亦可逆溯得到 S_1．在此意义上，S_2 可称为 S_1 的源光场．因而，S_1，S_2 互为源光场．

当 S_1，S_2 间还有其它物（例如透镜、掩模）时，由 S_2 按自由空间逆溯所得的不再是原有的 S_1 光场，而是另一光场 S_1'．S_1' 是 S_1 的等效光场，即假定 S_1 与 S_2 之间为自由空间时，S_1 处所应有的光场．我们称 S_1'，S_2 互为等效源光场．显然当 S_1，S_2 间为自由空间时，S_1' 即 S_1．

用波长为 λ 的相干会聚光 q_{-d} 照明 S_1 平面上的掩模 t（图1），在会聚点所在平面 S_2 上所得的光场分布，将是 t 的傅里叶变换 $T_{\lambda d}$ 与发散光 q_d 的乘积［见本文附录中的(4)，(8)式］．略去常数因子后，简写为

$$S_1 = q_{-d}\cdot t = e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)}\cdot t(x, y), \quad (1)$$

$$S_2 = q_d \circledast S_1 = q_d\cdot T_{\lambda d} = e^{i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \cdot T\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right), \quad (2)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$，$\circledast$ 为卷积符号．

这一对等效源光场间具有以下关系：(1) 以二次位相因子 q_{-d}，q_d 分别表示的近轴会聚、发散球面波，曲率半径为 d，凹面相对．(2) $T_{\lambda d}$ 为 t 定标傅氏变换，定标因子为 $\frac{1}{\lambda d}$．我们称满足以上条件的光场分布 S_1，S_2 为一对等效 FT 源光场（FT 表示傅氏变换）．

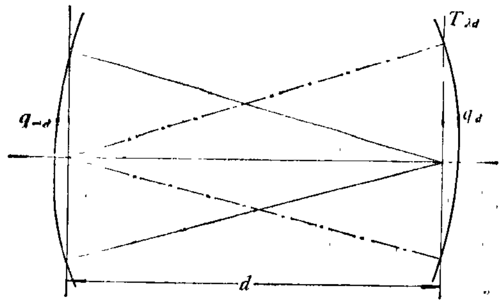


图1　会聚波照明下的等效 FT 源光场

图2是等效 FT 源光场的另一情形．S_1 面上的点光源 δ，照明距离 d 处的 S_2 面上掩模 t［图2(a)］，这时，

$$S_1 = \delta(x, y), \quad (3)$$

$$S_2 = q_d\cdot t = e^{i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)}\cdot t(x, y). \quad (4)$$

由 S_2 逆溯到 S_1 面上的等效光场 S_1'［见附录中的(8)式］

$$S_1' = q_{-d}\circledast S_2 = q_{-d}\cdot T_{-\lambda d} = e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \cdot T\left(\frac{x}{-\lambda d}, \frac{y}{-\lambda d}\right). \quad (5)$$

图2(b) 说明了 S_1' 和 S_2 之间的关系．定标因子

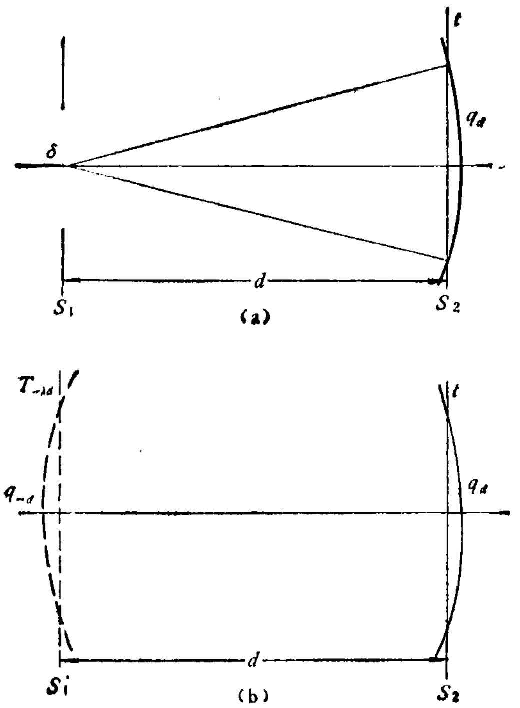


图 2

(a) 发散球面波照明;
(b) 对应于图 2(a) 的等效 FT 源光场

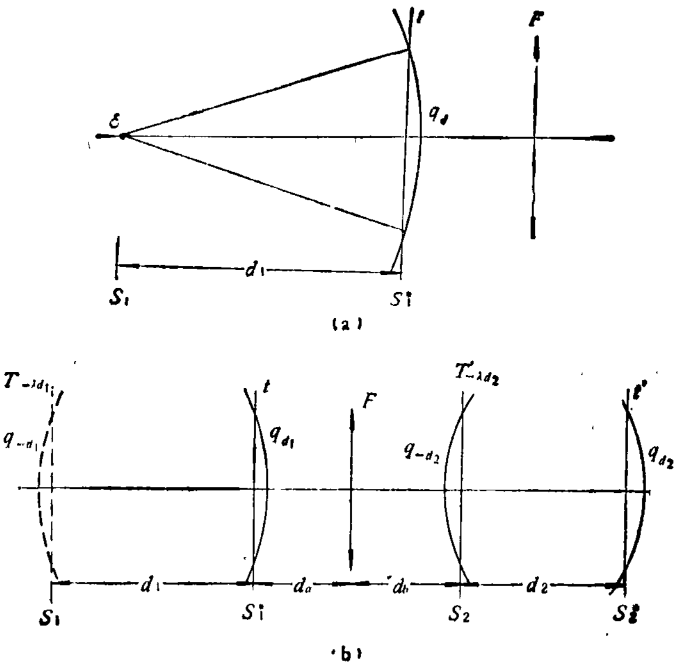


图 3

(a) 发散球面波照明的单透镜系统;
(b) 透镜对等效源光场的作用

为 $\frac{1}{-\lambda d}$, 负号来自逆溯. S_1' 并非真实光场, 在图 2(b) 中以虚线表示. S_1' 和 S_2 满足等效 FT 源光场的条件, 因它们也是一对等效 FT 源光场.

二、透镜对等效源光场的作用

图 3(a) 中透镜(焦距为 F) 前 S_1 面上有点光源 δ, 其后 d_1 处 S_1^* 面上有透射掩模 t. 图 3(b) 中以 S_1' 代替图 3(a)中的 S_1, 参照 (4), (5) 两式, 有

$$S_1' = q_{-d_1} \cdot T\left(-\frac{x}{\lambda d_1}, -\frac{y}{\lambda d_1}\right), \tag{6}$$

$$S_1^* = q_{d_1} \cdot t(x, y). \tag{7}$$

透镜后 S_2', S_2^* 分别与 S_1', S_1^* 共轭, 可以证明[见附录中的 (15) 式], S_2', S_2^* 分别为

$$S_2' = q_{-d_2} T'\left(-\frac{x}{\lambda d_2}, -\frac{y}{\lambda d_2}\right), \tag{8}$$

$$S_2^* = q_{d_2} t'(x, y). \tag{9}$$

以上各式均略去了常数因子. t', T' 分别是 t 的像, 可按几何光学求得. T' 是 t' 的傅里叶变换, 显然 S_2' 与 S_2^* 构成一对等效 FT 源光场. 图 3 给出的是光源 δ, 物 t 在正透镜前的情况. 实际上对负透镜以及 δ, t 在其它位置时, 均能证明以上关系仍然成立.

以上不仅给出了 S_2' 和 S_2^* 面应与 S_1, S_1^* 面共轭的证明, 即给出了相干光处理系统中频谱面和输出面(成像面)应分别与光源平面和输入面(物平面)共轭的证明, 而且重要的是还证明了频谱面和输出面(像平面)上的光场构成一对等效 FT 源光场. 根据这些特性, 不仅能定出频谱面和输出面的位置, 而且还能定出该两平面光场的 q 因子和傅氏变换定标因子. 也就是说, 只要根据几何光学方法和等效 FT 源光场的特性, 就能直接写出频谱面和输出面的光场分布, 而不需要逐面进行计算. 至于其它平面上的光场, 则可根据等效 FT 源光场自由传播或逆溯获得.

三、用等效源光场分析方法对相干光处理系统作物理分析

等效源光场分析方法的最大特点在于其鲜明的物理性，常能在正式计算前即能预见物理结果，以下举例说明.

相干光处理系统中，通常在频谱面上虽能得到物的傅氏频谱，但与之并存的还有二次位相因子 q. 只有在特定条件下，才能去掉 q 因子. 根据等效源光场特性，当频谱面 S_2' 与输出面 S_2^* 相距无穷远时，与 q 因子对应的近轴球面波将退化为平面波，q 因子变为 1. 可以让光源面 S_1，输出面 S_2^* 分别位于无穷远处. 与其共轭的物平面 S_1^* 和频谱面将分别位于透镜的前后焦平面上. 这就是熟知的以平行光照明位于前焦面上的物，在后焦面上得到严格的傅氏频谱的光路. 也可以用点光源照明位于透镜前焦面上的物，此时与 t 共轭的输出 S_2^* 位于无穷远处，而频谱 S_2' 仍在透镜后有限距离内. 这样，S_2'，S_2^* 间距仍为无穷大，同样能消除频谱面 S_2' 上的 q 因子，得到严格的傅氏变换. 还可以用向薄透镜中心会聚的球面波照明位于透镜前焦面上的物，此时频谱面与透镜面重合，输出面在无穷远，在紧贴透镜的后表面上得到消除 q 因子的严格傅氏变换.

在设计相干光处理系统时，常需要精确计算频谱面所在处的光场. 例如，匹配滤波必须使滤波器的大小与物的频谱相匹配，这里关键参数是傅氏变换的定标因子. 在本文附录中证明了当频谱面光场 S 表示为 t'（输入 t 的像）的傅氏变换时，此定标因子为 $\left(\frac{-1}{\lambda d}\right)$，$d$ 为 S 面到 t' 面的距离；当 S 表示为输入 t 的傅氏变换时，尚须计入 t' 对 t 的放大倍数. 以上均不难由几何光学成像关系确定，不需要如通用教科书[2,3]中介绍的那样逐面进行计算.

以上结论尚可推广到多个透镜情形. 例如，点光源 δ 与其共轭面 S 间可有 $k+l$ 个透镜，物 t 与其共轭面 S^* 间有 k 个透镜（见图 4）.

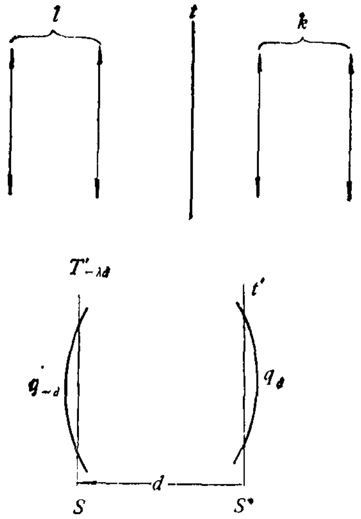


图 4 多透镜系统中的等效 FT 源光场

也可由几何光学成像关系定出 S 面和 S^* 面位置，间距 d 以及 t' 对 t 的放大倍数. 当 S 面表示为 t' 的傅氏变换时，定标因子为 $\frac{-1}{\lambda d}$；当 S 面表示为输入 t 的傅氏变换时，同样亦需计入 t 经 k 个透镜成像 t' 的放大倍数，这样分析可避免用菲涅耳公式逐面进行计算，简化了运算过程.

四、用等效源光场分析太伯效应

以相干光照射平面周期性物，在物后方多处平面上会产生自成像现象，称为太伯效应. 从等效源光场观点来解释太伯效应，物理图像清晰，数学计算简捷.

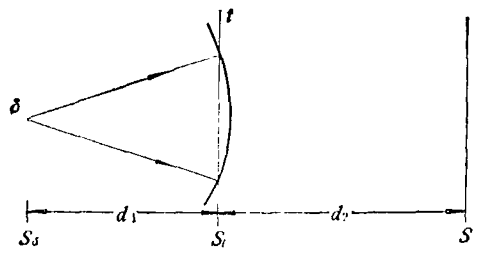
图 5(a) 中，点光源 δ 照明一平面周期性物 t. 为简单起见，设 t 为一维周期性物，周期为 b，则 t 总可展开为傅里叶级数

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j2\pi nx/b). \qquad (10)$$

t 的傅氏变换 $T(\xi, \eta)$ 为

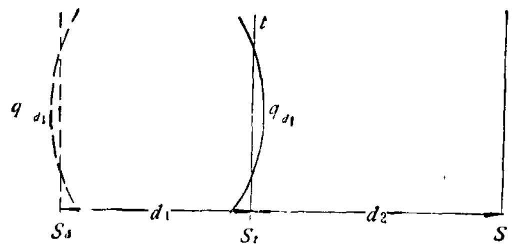
$$T(\zeta, \eta) = \mathscr{F}\{t(x, y)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta\left(\xi - \frac{n}{b}\right)\delta(\eta). \quad (11)$$

由前面的结论可知，δ 平面上的等效源光场为



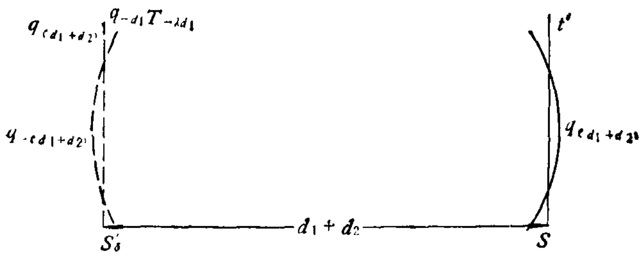
(a)

(a) 点光源照明周期性物体



(b)

(b) 图 5(a) 的等效图



(c)

(c) 人为地构成一对等效 FT 源光场

图 5

[见图 5(b)]

$$S_\delta' = q_{-d_1}\cdot T_{-\lambda d_1}. \tag{12}$$

考虑 t 后任一平面 S，为了计算 S 面上的光场，可以将 S_δ' 人为地提取出一个二次位相因子 $q_{-(d_1+d_2)}$，

$$S_\delta' = q_{-(d_1+d_2)}[q_{(d_1+d_2)}q_{-d_1}T_{-\lambda d_1}]. \tag{13}$$

S_δ' 与 S 构成一对等效 FT 源光场[图 5(c)]，即

$$S = q_{(d_1+d_2)}\mathscr{F}\{q_{(d_1+d_2)}q_{-d_1}\cdot T_{-\lambda d_1}\}\Big|_{\frac{1}{\lambda(d_1+d_2)}}. \tag{14}$$

要在 S 面上得到自成像 t，必须让 (14) 式大括号中的 q 因子消失，这一般是不可能的。但是当 t 是周期性物时，其频谱是一系列离散的 δ 函数(见 (11) 式)，当符合一定条件时，该 q 因子在这些 δ 函数所在位置取值为 1，这样即可自成像 ($q_{(d_1+d_2)}$ 对强度无贡献)。自成像条件推导如下：由 (14) 式可写成

$$S = q_{(d_1+d_2)}\mathscr{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta\left(\frac{\xi}{\lambda d_1}-\frac{n}{b}\right)\cdot\delta\left(\frac{n}{\lambda d_1}\right)\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{d_1+d_2}-\frac{1}{d_1}\right)\left(\frac{\lambda d_1 n}{b}\right)^2\right]\right\}\Big|_{\frac{1}{-\lambda(d_1+d_2)}}. \tag{15}$$

显然当 $\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{d_1+d_2}-\frac{1}{d_1}\right)\left(\frac{\lambda n d_1}{b}\right)^2 = 2l\pi$ (l 为整数) 时，上式大括号中的二次位相因子消失，故得自成像条件

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2} = \frac{\lambda}{2lb^2}. \tag{16}$$

注意满足 (16) 式条件的 S 面不止一个，这些 S 面可以分别与 S_δ' 面 (光源 δ 所在平面) 构成等效 FT 源光场。当用平面波照明时，$d_1\to\infty$，$= d_2\,\frac{2lb^2}{\lambda}$，即在周期性物后方周期为 $\frac{2b^2}{\lambda}$ 的距离上自成像。

等效源光场分析方法的特点是能将复杂的菲涅耳衍射问题分解为 q 因子和 FT 变换分别考虑。前者对应于近轴球面波传播，可利用简单的几何光学成像关系，后者则可利用傅氏变换的丰富知识，这样在许多情形下可以不作计算，就可通过物理图像推求物理结果。

对高文琦副教授给予的指导以及周进同志提出的有益建议表示感谢。

附录　等效源光场的数学证明

为简化推导，采用 q 函数、二维定标符号 $\mathscr{V}$ 及二维卷积符号⊛

1. 定义

$$q_d = q\left(x, y; \frac{1}{\lambda d}\right) = e^{j\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} = e^{j\frac{\pi}{\lambda d}(x^2+y^2)}, \tag{1}$$

$$\mathscr{V}(a)f(x, y) = f(ax, ay), \tag{2}$$

$$f(x,y)\circledast g(x,y)=\iint f(x-x',\ y-y')\cdot g(x',y')dx'dy'. \tag{3}$$

菲涅耳积分

$$\frac{\exp(jkd)}{j\lambda d}\iint \exp\left\{j\frac{k}{2d}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]\right\}\cdot f(x,y)dx'dy'=\frac{e^{jkd}}{j\lambda d}\,q_d\circledast f(x,y). \tag{4}$$

2.性质

$$\mathscr{S}(S)q_d=q_{d/S^2}\mathscr{S}(S)=q\left(x,y;\frac{S^2}{d}\right)\mathscr{S}(S), \tag{5}$$

$$q_{d_1}\cdot q_{d_2}=q\left(x,y;\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right), \tag{6}$$

$$q_d\circledast q_{-d}=(\lambda d)^2\delta(x,y), \tag{7}$$

$$q_d\circledast[q_{-d}\circledast f(x,y)]=q_d\mathscr{S}\left(\frac{1}{\lambda d}\right)F(x,y). \tag{8}$$

$F(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 的二维傅氏变换.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}+\dfrac{1}{d_2}=0\\ q_{d_1}\circledast\{q_{d_2}[q_{d_1}\circledast f(x,y)]\}\\ \quad=(\lambda d_1)^2q\left(x,y;\dfrac{d_1+d_3}{d_3^2}\right)\\ \quad\times\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_1}{d_3}\right)f(x,y).\end{cases} \tag{9}$$

3.焦距为 F 的透镜前后的共轭平面光场间的关系

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{F}. \tag{10}$$

略去常数因子,由(4),(9)式得

$$\begin{aligned}S_2&=q_{d_2}[q_{-F}(q_{d_1}\circledast S_1)]\\&=q\left(x,y;\frac{d_1+d_2}{d_2^2}\right)\mathscr{S}\left(-\frac{d_1}{d_2}\right)S_1.\end{aligned} \tag{11}$$

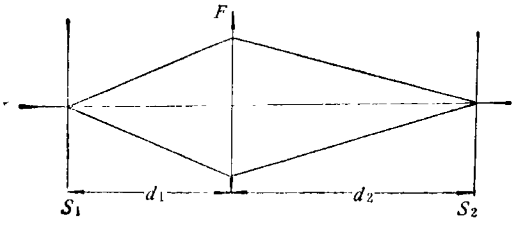


图6 透镜对光场的共轭变换

4.透镜前后等效 FT 源光场间的关系[见图3(b)].

$$\begin{cases}S_1'=q_{-d_1}\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{1}{\lambda d_1}\right)T,\\ S_1^*=q_{d_1}\cdot t,\end{cases} \tag{12}$$

由(5),(11)式可得

$$\begin{cases}S_2'=q\left(x,y;\dfrac{d_1+d_a+d_b}{d_b^2}\right)\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_1+d_a}{d_b}\right)S_1'\\ \quad=q\left(x,y;\dfrac{d_1+d_a+d_b}{d_b^2}\right)q\left(x,y;-\dfrac{(d_1+d_a)^2}{d_1d_b^2}\right)\times\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_1+d_a}{d_b}\right)\\ \quad\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{1}{\lambda d_1}\right)T,\\ S_2^*=q\left(x,y;\dfrac{d_2+d_a+d_b}{(d_b+d_2)^2}\right)\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_a}{d_2+d_b}\right)S_1^*\\ \quad=q\left(x,y;\dfrac{d_2+d_a+d_b}{(d_b+d_2)^2}\right)\\ \quad\cdot q\left(x,y;\dfrac{d_a^2}{d_1(d_2+d_b)^2}\right)\\ \quad\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_a}{d_2+d_b}\right)t.\end{cases} \tag{13}$$

根据几何光学关系,

$$\frac{d_1+d_a}{d_b}=\frac{F}{d_b-F},\quad \frac{d_a}{d_b+d_2}=\frac{F}{d_b+d_2-F},$$

因而

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{F^2}{(d_b-F)(d_b+d_2-F)},$$

$$\frac{d_1+d_a}{d_1d_b}=\frac{d_b+d_2}{d_ad_2}.$$

代人(13)式,得

$$\begin{cases}S_2'=q\left(x,y;-\dfrac{1}{d_2}\right)\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{1}{\lambda d_2}\right)\\ \quad\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_b+d_2}{d_a}\right)T,\\ S_2^*=q\left(x,y;\dfrac{1}{d_2}\right)\cdot\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_a}{d_b+d_2}\right)t.\end{cases} \tag{14}$$

$t'(x,y)=\mathscr{S}\left(-\dfrac{d_a}{d_b+d_2}\right)t(x,y)$, 即 t 的几何像,

则 t' 的傅氏变换为

$$T'=\mathscr{S}\left(-\frac{d_b+d_2}{d_a}\right)T_1(x,y). \tag{15}$$

因此

$$\begin{cases}S_2^*=q_{d_2}\cdot t'(x,y),\\ S_2'=q_{-d_2}\cdot T_2\left(-\dfrac{x}{\lambda d_2},\ -\dfrac{y}{\lambda d_2}\right).\end{cases} \tag{16}$$

可见, S_2^*, S_2' 构成一对等效 FT 源光场.

参 考 文 献

[1] A. Vander Lugt, *Proc. IEEE*, 54(1966), 1055.

[2] J. D. 加斯基尔著,封开印译,线性系统·傅里叶变换·光学,人民教育出版社,(1981), 360, 409, 448—451.

[3] R. J. 科利尔等著,盛尔镇等译,光全息学,机械工业出版社,(1983), 116, 120.

[4] M. Nazarathy, J. Shamir, *J. Opt. Soc. Am*, 70-2, (1980), 150.

[5] D. Stoler, *J. Opt. Soc. Am*, 71-3 (1981), 334.