

超导磁体的分层设计

曹效文

(中国科学院等离子体物理研究所)

超导强磁场技术在实验室范围内已得到了广泛应用，例如用 Nb-Ti 和 Nb₃Sn 材料绕制的、场强分别为 8T 和 15T 以下的中小型超导磁体已成为实验室的通用设备。

目前，实用超导材料仍然十分昂贵，国产 Nb-Ti 线每公斤一千元，Nb₃Sn 带(或线)每公斤约三千元。实验室用超导磁体重一般在十到数百公斤，那么建造一个超导磁体就需要一万到几十万元的投资。所以，任何旨在减小绕组体积(或重量)的设计方法的改进都将产生明显的经济效果。这一直是人们十分关注的一项研究课题。

一、实用超导材料的 $j_c(B)$ 特性

实用超导材料的临界电流密度 j_c 与磁场 B 之间的关系如图 1 所示。 $j_c(B)$ 曲线可以分成三个区域：低场 j_c 剧变区(I)； j_c 缓变区(II)在这个区域内， j_c 随磁场 B 的变化较缓慢，这一区域是超导磁体设计和运行所选择的主要范围；高场 j_c 剧变区(III)。在区域(I)和(III)范围内，磁场的较小变化会导致临界电流密度的

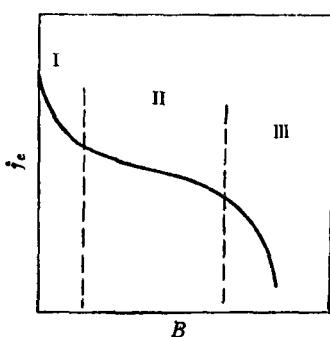


图 1 实用超导材料的 $j_c(B)$ 特性

较大改变。

实用超导材料的上述 $j_c(B)$ 特性曲线是超导磁体设计的主要依据。这一特性发挥得好坏直接影响到超导磁体的投资和运行费用。按照实用超导材料的 $j_c(B)$ 特性，最理想的设计是，磁体的各处绕组分别携带着所在磁场值所允许的临界电流密度。但是这样的结构太复杂了，在技术上是无法实现的。实际设计表明，如果把磁体绕组沿径向分成二或三等分，使每一部分携带着它的内层所处最高场决定的临界电流密度，则也可以产生可观的经济效果，技术上也可行。

二、磁体绕组体积与电流密度 j 的关系

为了讨论方便，以下讨论一个无限长的圆筒形螺线管。假定螺线管绕组内径为 $2a_1$ ，绕组厚度为 D 。当绕组的均一电流密度为 j 时，可以产生一个场强为 B_0 的磁场。如果要产生场强为 $2B_0$ 的磁场，则有两种可能的方法：一是电流密度 j 保持不变，而绕组厚度增加到 $2D$ ；另一方法是原绕组厚度不变，电流密度增加到 $2j$ 。可以看到，为了产生一定强度的磁场，其绕组厚度与它所承载的电流密度 j 成反比，因此从绕组内径到外径之间的圆环面积与电流密度的平方 j^2 成反比。如果考虑一个均匀电流密度分布的有限长度的螺线管，从内层到外层的绕组对中心磁场的贡献是逐渐减小的，则上述 j 的指数实际上要大于 2。另一方面，如果绕组的电流密度 j 提高了，为了产生相同的磁场，绕组厚度也可相应减小，继而磁场均匀度也得到改善。因此，在保证一定的磁场均匀度要求的

情况下，磁体绕组的长度 $2b$ 也可以适当减小。综上所述，对于给定内径和场强的情况，超导绕组电流密度的提高，不仅可以减小绕组厚度，而且还可以减小绕组的长度。实际上，绕组体积与电流密度 j 之间大约成二次到三次方关系。

Martin^[1] 对一个 10T 超导磁体的设计计算表明，当绕组电流密度 j 从 10^4 A/cm^2 提高到 10^5 A/cm^2 时，绕组体积减小了 500 倍，如图 2 所示。和上述估计结果近似一致。

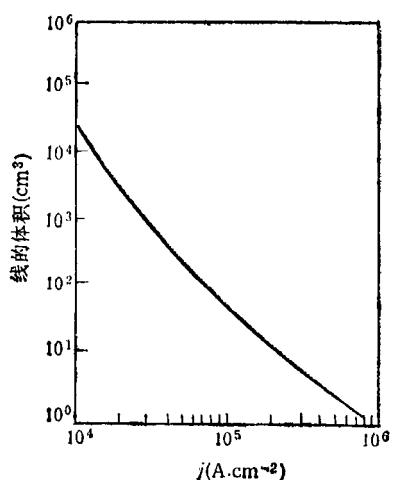


图 2 磁体绕组的体积与电流密度 j 之间的关系

对于一个运行在接近 $j_c(B)$ 特性的、均匀电流密度分布的超导磁体来说，内层绕组的工作状态已接近 $j_c(B)$ 特性，因此不再具有提高电流密度的潜力。但是，若沿径向把绕组分割成二或三部分，那么中外层绕组的运行状态则低于或远低于 $j_c(B)$ 特性值，因此它们具有提高运行电流密度的较大潜力，也就是说，具有较大幅度地减小绕组体积的潜力。

三、超导磁体绕组载流潜力的发挥

对于圆筒形螺线管，其磁场分布是绕组内层的中心部分场强最高，用 B_m 表示。由此沿径向到外层和沿轴向到两端，其场强逐渐减弱。但是对于一个均匀电流密度分布的超导绕组，其运行电流密度是由绕组的最高场 B_m 所决定的，而中外层和两端绕组虽然所处的场强较低，

但却仍然携带着最高场 B_m 所对应的临界电流密度。显然，占有绕组体积较大部分的较低磁场部分的绕组的载流潜力没有得到充分发挥，因而中外层绕组具有提高承载电流密度的潜力。

为了对上述问题进行定量的分析和比较，并且为了讨论方便，我们仍然讨论一个无限长的螺线管。对于一个均匀电流密度分布情况，线圈空间的磁场可表示为

$$B_0 = \mu D n I_1, \quad (1)$$

式中 D 为绕组厚度， n 为绕组密度， I_1 为 $j_c(B)$ 特性线上 B_0 所对应的临界电流 [见图 3(b)]，亦即超导绕组的运行电流。

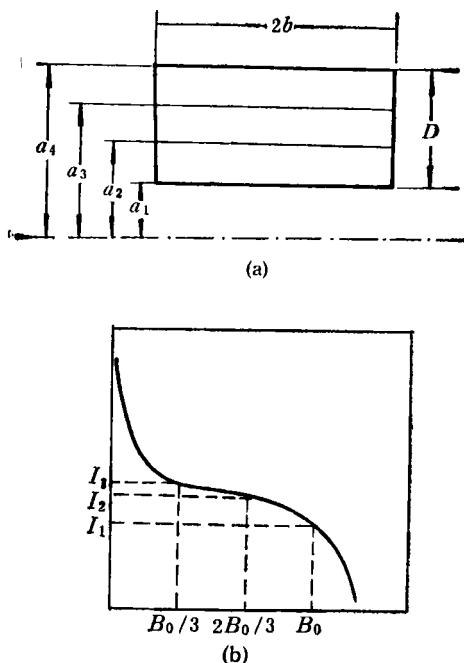


图 3 超导螺线管的径向分层设计

(a) 分层结构；(b) 各分层所处的磁场对应的临界电流

如果把这个无限长螺线管绕组沿径向分成 N 等分 [见图 3(a)]，每等分的厚度为 $d = \frac{D}{N}$ ，且由内到外分别表示为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_N$ ，所承载的电流分别为 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_N$ ，并且这些电流分别由每一部分绕组所处的最高场 B_0 ， $\left(B_0 - \frac{B_0}{N}\right), \left(B_0 - \frac{2B_0}{N}\right), \dots, \frac{B_0}{N}$ 按照 $j_c(B)$

所决定。显然 $I_1 < I_2 < I_3 < \dots < I_N$ 。这时，沿径向由内到外的每一部分绕组产生的磁场分别为

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu d_1 n I_1 \\ &= \frac{1}{N} \mu D n I_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \mu d_2 n I_2 \\ &= \frac{2}{N} \mu D n [I_1 + (I_2 - I_1)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \mu d_3 n I_3 \\ &= \frac{1}{N} \mu D n [I_1 + (I_3 - I_1)], \end{aligned} \quad (4)$$

.....

$$\begin{aligned} B_N &= \mu d_N n I_N \\ &= \frac{1}{N} \mu D n [I_1 + (I_N - I_1)]. \end{aligned} \quad (5)$$

由(2)式到(5)式相加得 N 部分产生磁场的总和：

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_N \\ &= \mu D n I_1 + \frac{1}{N} \mu D n [I_2 + I_3 \\ &\quad + \dots + I_N - (N-1)I_1]. \end{aligned} \quad (6)$$

由(1)式和(6)式的比较可以看出， $B > B_0$ 。

B 和 B_0 之间差别的大小取决于 I_2, I_3, \dots, I_N 高出 I_1 的程度，换句话说，取决于 $j_c(B)$ 曲线的形状。我们用国产 Nb-Ti 超导线绕制一个 7T 磁体。绕组沿径向分成三等分，且 $j_c(B)$ 遵守以下关系式^[2]：

$$\begin{aligned} j_c &= [3.5 - 0.7(B - 5)] \times C \\ &\quad \times 10^4 \text{A/cm}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

我们分别求得 $I_2 = 1.8I_1, I_3 = 2.9I_1$ 。把 I_2 和 I_3 代入(6)式，求得

$$\begin{aligned} B &= \mu D n I_1 + 0.9 \mu D n I_1 \\ &= 1.9 B_0. \end{aligned} \quad (8)$$

结果表明，在绕组总厚度保持不变的情况下，沿径向把绕组分成三等分时所产生的磁场 B 比不分层时的场强增高将近一倍。当然，实际上不可能用这种办法产生 13.3T 的磁场，因为它已远超过了 Nb-Ti 线的临界场。但是，上述定量分析和比较确实表明，超导绕组的径向分层设计可以大幅度地减小绕组的厚度，亦即减小

绕组体积，从而大大降低了建造投资。

如前所述，对于一个有限长度的螺线管磁体，由中部向两端，场强也是逐渐减弱的，尤其是中外层绕组。如果把径向分层绕组再沿轴向分成三部分，则两端部绕组的电流密度也可以适当提高。对于进一步减小绕组体积，改善磁场均匀度都会有一定作用。当然，这种结构仅限于较大磁体才会真正显示出优越性，因为这时线圈骨架和结构材料在绕组总体积中所占比例才比较小，因而才不会导致绕组平均电流密度的明显下降。

四、绕组 β 值的最佳选取

在通常情况下，一定的 α 对 β 的比值对应着一定的磁场均匀度。 β 值（亦即绕组长度）的增加将改善磁场均匀度，所付出的代价是增加了绕组的体积和建造费用，这是一般设计者常注意到并已解决了的问题。但是一个不为人们注意的问题是，Boom 和 Livingston 所提出的简单螺线管的最小体积设计，仅适用于有阻导体，而由于超导体的 $j_c(B)$ 特性，当它用于超导磁体的设计时产生偏离^[3]。产生偏离的问题的实质在于，有阻导体承载电流密度的能力是和磁场无关的（当忽略磁阻效应时），而超导体的载流能力则与磁场有着密切关系；另一方面，当磁体绕组的 β 和 α （即长度 $2b$ 和外径 $2a_2$ ）的比值不够大时，绕组内层所处的最高场 B_m 会明显地高于中心场 B_0 ，即 $\frac{B_m}{B_0} > 1$ 。可是超导磁体的运行电流是由 B_m 而不是由 B_0 所决定的。 $j_c(B_m)$ 会明显地小于 $j_c(B_0)$ ，特别是在 $j_c(B)$ 的低场和高场剧变区。但是，如前所述，绕组的体积与电流密度 j^n (n 约为 2.5) 成正比。因此，按照 Boom 和 Livingston 的方法设计的超导磁体的体积并非最小体积。Boom 等指出，解决的办法是增加 β 值。但是 β 值取多大才是绕组体积最小的设计，一直是一个没有解决的问题。 β 值的增加会使 α 值减小。所以，对超导绕组的几何参数必须加以权衡。

对于一个绕组内径 $2a_1 = 5\text{cm}$, 中心场 $B_0 = 8\text{T}$ 的 Nb-Ti 超导磁体, 假设 Nb-Ti 线的 $j_c(B)$ 关系可用(7)式来描述, 并设式中 $C = 5$, 那么当 $\alpha/\beta = 1.2$ 时, 有绕组体积的最小值, 详细结果如图 4 所示。上面一条曲线是产生相同的 B_0 (等于 8T)时, 不同的 α/β 值所对应的绕组体积因子 $(\alpha^2 - 1)\beta$ 值, 它与绕组体积成正比。对于不同的场强, 不同的 $j_c(B)$ 特性和绕组内径, $(\alpha^2 - 1)\beta$ 最小值有所不同。如果按文献[3]中的最小体积法设计, 其 $(\alpha^2 - 1)\beta = 4.8$, 比图中最小值大 29%, 而且磁场均匀度也低了一倍多。图 4 中下面的曲线是 B_m/B_0 与 α/β 的关系曲线。这一实际的设计结果表明, 对超导绕组几何因子作合理的修正, 不仅可以节省投资, 而且还可以改善磁场均匀度, 尤其是磁体运行在高、低场 $j_c(B)$ 剧变区时更为显著。

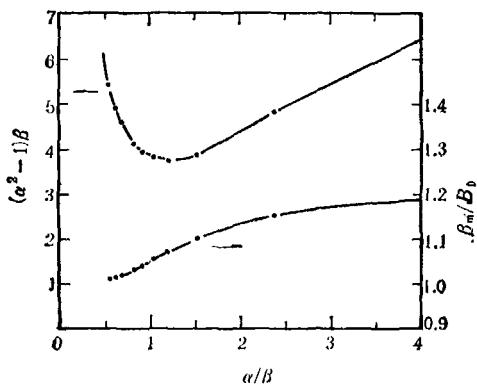


图 4 高场超导磁体绕组体积与 α/β 的关系

五、径向分层设计的主要方法

在这一部分将扼要介绍径向分层设计的主要几种方法, 给出主要结果, 以说明在超导磁体设计中径向分层设计的重要性和优越性。按照超导磁体绕组的几何形态以及产生磁场均匀度的不同, 径向分层设计大致可分为三种情况。

1. 简单螺线管超导磁体

简单螺线管超导磁体在以绕组内径 $2a_1$ 为直径的球体内所产生的磁场均匀度在 1% 以

下。要想提高磁场均匀度就必须增加绕组长度, 其结果是增加了绕组体积。改变绕组几何形状是提高磁场均匀度的更合理的方法。旨在减小绕组体积的简单螺线管的分层设计, 主要包括作图法^[4,5]和最佳化方法^[6]。

(1) 作图法

假设螺线管绕组沿径向分成数等分, 每等分的厚度为 d_i 。为了讨论方便, 假设磁场强度随半径的变化是线性的, 螺管的最高场 B_m 对应 $j_c(B)$ 曲线上的电流为 I_m , 如图 5 所示, 我

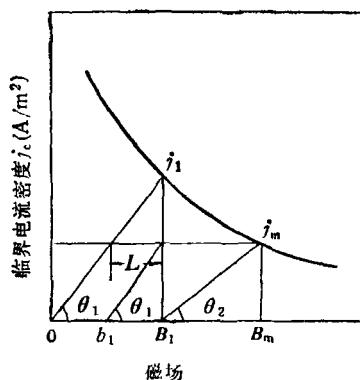


图 5 作图分层设计法

们可以得出如下关系:

$$B_m = \sum_i I_i d_i, \quad (9)$$

$$d_i \propto \frac{\Delta B}{I_i} = \operatorname{ctg} \theta_i, \quad (10)$$

式中 ΔB 为每两部分绕组之间的磁场差。所以螺线管绕组的总厚度为

$$D = \sum_i d_i \propto \sum_i \operatorname{ctg} \theta_i = \frac{B_m}{\sum_i I_i}. \quad (11)$$

可以看出, 分层愈多愈有利于 D 值的减小, 但分层愈多, 在制造技术上的困难也增多。下面主要讨论绕组沿径向分成二层的设计方法和结果, 如图 5 所示。

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{ctg} \theta_i &= \operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_2 \\ &= \frac{1}{I_m} (0B_m - L), \end{aligned} \quad (12)$$

式中 L 值是一个依照 B_1 的选取而变的量。 B_1 为外层绕组产生的场。要减小 D 就必须增加 L

值，这一点用作图法是不难做到的。用类似方法可以把绕组沿径向分成更多部分。

(2) 最优化方法^[5]

最优化方法较作图法更加成熟和趋于完善。

体积最小的螺线管磁体的中心场可以写成

$$B_0 = a_1 \lambda j 10^{-6} F(\alpha, \beta), \quad (13)$$

式中 B_0 单位为 T， λ 为绕组的填充因子， j 为导体电流密度 (A/cm^2)， a_1 为绕组内半径 (m)。

设磁体绕组沿径向分成两部分，内绕组产生的中心场为 B_{01} ，它对中心场的贡献比例为

$\zeta = \frac{B_{01}}{B_0}$ ， B_0 (严格讲应为 B_m) 相应的内绕组的平均电流密度为 $\lambda_1 j_1$ ；外绕组产生中心场 B_{02} ，它对中心场的贡献比例为 $(1 - \zeta) = \frac{B_{02}}{B_0}$ ， B_{02} 相应的外绕组的平均电流密度 $\lambda_2 j_2$ 。内外两个绕组产生的中心场为

$$B_0 = \zeta B_{01} + (1 - \zeta) B_{02}. \quad (14)$$

还可写成

$$B_0 = a_1 \lambda_1 j_1 \times 10^{-6} F_1(\alpha_1, \beta_1) + a_2 \lambda_2 j_2 \times 10^{-6} F_2(\alpha_2, \beta_2). \quad (15)$$

式中的有关量可见图 6。

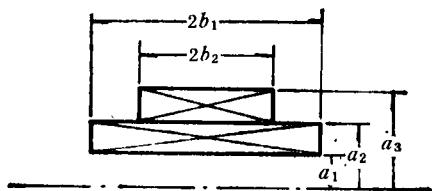


图 6 分层设计的简单螺线管

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a},$$

$$\alpha_2 = \frac{a_3}{a_2}, \quad \beta_2 = \frac{b_2}{a_2}.$$

将(14)式和(15)式的两边同除以 $a_1 \lambda_1 j_1 \times 10^{-6}$ ，并令 $\frac{\lambda_2 j_2}{\lambda_1 j_1} = f$ ，进行比较以后，可得分层设计中内外两绕组几何因子与单一绕组几何因子 $F(\alpha, \beta)$ 的关系：

$$F_1(\alpha_1, \beta_1) = \zeta F(\alpha, \beta), \quad (16)$$

$$F_2(\alpha_2, \beta_2) = (1 - \zeta) F(\alpha, \beta) / \alpha_1 f. \quad (17)$$

由文献 [3] 的图表可分别获得内外绕组的几何参数。

分层设计绕组总体积为

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi a_1^3 (\alpha_1^2 - 1) \beta_1 + 2\pi a_2^3 (\alpha_2^2 - 1) \beta_2. \quad (18)$$

设内绕组单位体积投资为 C_1 ，外绕组为 C_2 ，那么总绕组投资费用为

$$C(\zeta) = V_1 C_1 + V_2 C_2. \quad (19)$$

如果内外绕组由同种导体绕制，则 $R = C_1/C_2 = 1$ ；如果分别由 Nb₃Sn 和 Nb-Ti 绕制，则 $R = 3$ 。

为了和不分层的单一绕组的投资 $C(1)$ 进行比较，我们定义 $\bar{C} = C(\zeta)/C(1)$ 为归一化费用，并对分层设计作 $\bar{C}-\zeta$ 图(见图 7)，可以看出，对于一定的 $f = \frac{\lambda_2 j_2}{\lambda_1 j_1}$ 值， ζ 愈小，则归一化费用愈低；另一方面， f 值愈大，则 \bar{C} 值愈小。但是，一定 f 值下 ζ 值的选取受到材料的 $j_c(B)$ 特性的严格限制。对于每个 f 曲线，都只有一个最佳 ζ (记作 ζ_{min}) 值。它经下列步骤确定，首先 $\lambda_1 j_1$ (由 B 确定) 是个确定值，因此 $\lambda_2 j_2 = f \lambda_1 j_1$ ，其次在 $j_c(B)$ 曲线上找到相应于 $\lambda_2 j_2$ 的 j_c 值，它对应的磁场 B 即是 B_{02} 值，最后根据 $\zeta_{min} = \frac{B_0 - B_{02}}{B_0}$ 求得 ζ_{min} 。所有 f 曲线的 ζ_{min} 点的连线构成最佳设计范围。图 7 给出了 $R = C_1/C_2 = 1$ 情况下归一化费用 \bar{C} 与 ζ 的关系。可以看出，最佳设计点在 $f = 3$ 曲线上，其 $\bar{C} \approx 0.3$ 。这意味着，和不分层设计相比，超导线投资可节省 70%。当 $R = 3$ 时，可节约 75% 以上，经济效果非常明显。

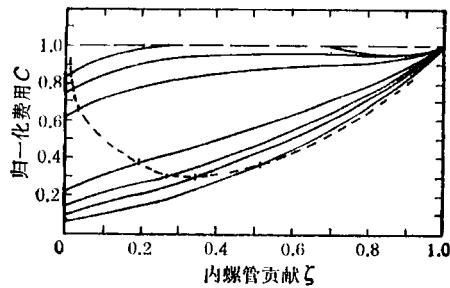


图 7 分层设计的简单超导螺线管的 $\bar{C}-\zeta$ 关系

2. 均匀场超导螺线管磁体

磁场均匀度高于 1% 的场，通常是用四次线圈（其中包括亥姆霍兹线圈）和六次线圈，以及由四次和六次线圈构成的混合结构的磁体产生的。对于四次线圈，在以线圈对的间隙 $2g$ 为直径的球体内，磁场均匀度可达 10^{-2} — 10^{-5} ；对于六次线圈，在以线圈内径 $2a_1$ 为直径的球体内，磁场均匀度可达到 10^{-6} 以上。

四次和六次线圈的径向分层设计，是本文作者^[7,8]利用最佳化方法解决的。混合结构设计是作者及其合作者^[9]提出的。这里仅给出主要结果，详细方法，请读者查阅有关文献。

对于六次线圈的分层设计，我们同样可以作出归一化费用 \bar{C} 与 f 和 ζ 的关系图。当 $C_1/C_2 = 1$ 时，最佳设计时的 $\bar{C} \approx 0.6$ ，即可节省超导材料的 40%； $C_1/C_2 = 3$ 时，可节省投资的 66%^[7]。对于四次线圈，作出的 \bar{C} - f , ζ 图表明，当 $C_1/C_2 = 1$ 时， $\bar{C} = 0.58$ ； $C_1/C_2 = 3$ 时， $\bar{C} = 0.22$ ^[8]。

3. 混合结构的超导磁体^[9]

所谓混合结构，系指内绕组采用六次线圈，外绕组采用四次线圈的一种分层设计。如前所述，对于四次线圈，在以线圈对的间隙 $2g$ 为直径的球体内，其磁场均匀度为 10^{-2} — 10^{-5} 但 $2g$ 要比绕组内径 $2a_1$ 小得多，即均匀区较小。要增加 $2g$ 也同时应增加 $2a_1$ ，然后再在四次线圈的孔径内嵌进一个六次线圈，既可保证所要求的磁场均匀度和均匀区，又使得绕组空间得到充分利用。在此设计中，若内绕组对总磁场的贡献为 27%（即 $\zeta = 0.27$ ），和产生同样中心场的单一六次线圈相比，则节约投资 59%；和单一四次线圈相比，节约 70%。

六、分层设计的其他优点和问题

从超导磁体的分层设计和计算结果可以看到，径向分层设计的主要优点是可以较大幅度地缩小超导磁体绕组的体积，因而减少了超导线材的投资，产生了十分显著的经济效果。除此之外还有一些其他优点。其一，8T 以上磁场强度的超导磁体通常是由 Nb₃Sn 材料绕制

的，但是 Nb₃Sn 材料（尤其是 Nb₃Sn 带材）有时存在着低场不稳定性。在分层设计的高场超导磁体中，从经济角度考虑，内绕组选用 Nb₃Sn，外绕组选用 Nb-Ti 材料是更合理的。同时，当外绕组先励磁为内绕组提供一个一定场强的背景磁场时，就可以克服 Nb₃Sn 材料可能存在的低场不稳定性。其二，对于由 Nb₃Sn 带和 Nb-Ti 线绕制的混合磁体绕组，在保证某一磁场均匀度要求下，外绕组长度总是大于内绕组，因此和单一几何形状的绕组相比，Nb₃Sn 带内绕组会处于一种更均匀的外场中，从而降低了 Nb₃Sn 带绕组两端部的垂直场分量，因而有助于克服 Nb₃Sn 带因垂直场分量带来的不稳定性。其三，在分层设计中，绕组厚度由于电流密度的提高而变薄，这将有助于磁场均匀度的提高。

在超导磁体的径向分层设计中，由于外绕组电流密度的大幅度提高，超导线圈的储能密度也有了相应提高，因此解决超导磁体的保护问题显得更加重要和迫切。在单一几何形状的超导磁体中，只有内层绕组运行在接近临界态的状态，而占绕组体积的较大部分的中外层绕组则远离临界态，所以保护的重点是绕组的内层部分，在径向分层设计的超导磁体中，绕组的较大部分都运行在接近临界态的状态，所以保护的难度增加了。但是，只要能按照前一种情况下的内层绕组的保护水平对整个磁体进行保护也就行了，所以从这个角度来说，增加的难度是有限的。

参 考 文 献

- [1] D. L. Martin, *Cryogenics*, 3 (1963), 161.
- [2] 曹效文, 低温物理, 2(1980), 297.
- [3] R. W. Boom and R. S. Livingston, *Proc. IRE*, 50 (1962), 274.
- [4] W. F. Gauster and C. E. Parker, *Some concepts for the Design of Superconducting Solenoids, High Magnetic Field*, MIT Press, (1962).
- [5] K. Kaiho, T. Namba, T. Ohara and K. Koyama, *Cryogenics*, 16 (1976), 587.
- [6] Y. M. Eyssa and S. M. Fadilah, *J. Phys. E*, 11 (1978), 820.
- [7] 曹效文, 低温物理, 4(1982), 235.
- [8] 曹效文, 低温物理, 4(1982), 161.
- [9] 曹效文等, 低温物理, 3(1981), 52.