

晶体中光传播的几个问题

肖旭东

(中国科学技术大学物理系)

一、晶体中的平面电磁波

1. D^0, E^0, H^0, k^0, S^0 的几何关系

在本文中,我们只讨论电各向异性和磁各向同性的晶体,并且认为 $\mu \approx 1$, 从而不考虑 μ 的影响。

众所周知,若晶体中传播着一平面单色波,令 k^0 是波法线方向上的单位矢量,则由 Maxwell 方程可得

$$\begin{cases} k^0 \times H = -\frac{1}{n} D \\ k^0 \times E = \frac{\mu}{n} H, \\ k^0 \cdot D = 0, \\ k^0 \cdot H = 0. \end{cases} \quad (1)$$

它表明 D, H, k^0 构成右手螺旋正交三矢量: $H \times k^0 \propto D$. 如果注意到能流密度的定义 $S = \frac{c}{4\pi} E \times H$, 则 E, H, S^0 (以后用 S^0 表示 S 的方向上的单位矢量) 也构成右手螺旋正交三矢量。

由于 D, E 由介电张量 ϵ 联系, $D = \epsilon E$, 这里 ϵ 为 3×3 矩阵, 所以一般说来, D 与 E 不平行, 从而 k^0 与 S^0 也不平行。但是, 由于 D, k^0, E, S^0 都与 H 垂直, 所以 D, k^0, E, S^0 共面, 因而有如图 1 所示的几何关系^[1]。

关于光振动与折射率椭球的关系, 只列出文献[1]中有关的结果。为方便, 将坐标系选为主介电轴系, 即笛卡尔坐标各轴与介电椭球(折射率椭球)各主轴重合。过原点作与 k^0 垂直的平面, 它与折射率椭球相截, 截面为椭圆, 记为 $\Pi(k^0)$ 。椭圆的长短轴是椭圆矢径的两个极值。

玻恩导出这两个极值点 (x, y, z) 为

$$x = \frac{D_x}{D} n, \quad y = \frac{D_y}{D} n, \quad z = \frac{D_z}{D} n, \quad (2)$$

其中 D 满足下列矢量方程:

$$D = \frac{n^2}{\mu} [E - k^0(E \cdot k^0)]. \quad (3)$$

这也就是(1)式中的 D , 因为消去其中 H 后即得(3)式。于是得到结论: 给定波法线 k^0 , 晶体中每一点存在两个可能的互相垂直的光振动模式 D^0 和 D'' , 它们与 $\Pi(k^0)$ 椭圆的两个半轴平行, 并且折射率为相应的半轴长度。

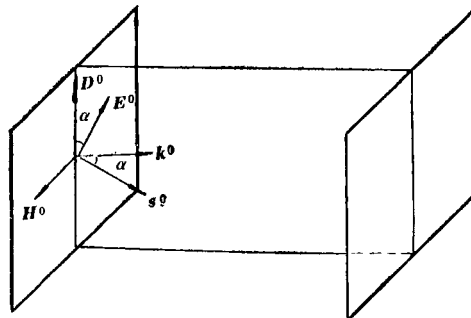


图 1

2. 晶体的折射率的解析表达式

(1) 单轴晶体, 即 $n_x = n_y \neq n_z$ 情形

与波法线 k^0 相应的折射率 n 已在文献[2]中给出。对单轴晶体, $\Pi(k^0)$ 必有一个半轴在 xy 平面内, 与它相应的光振动(o光)的折射率为 n_o 。另一个光振动(e光)的折射率为

$$n'_e = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4)$$

为后面需要, 这里将 o 光和 e 光的光振动方向给出。当 k^0 方向为 (θ, φ) 时, 有

$$D_o^0 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad (5)$$

$$D_e^0 = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), \quad (6)$$

这里上角标表示它们为该方向的单位矢量，它们是在直角坐标系中表出的。

(2) 一般晶体，即 $n_x \neq n_y \neq n_z$ 情形

这时得不到(1)中的几何关系，必须另找途径求折射率 n 。办法是旋转折射率椭球，使得椭圆 $\Pi(\mathbf{k}^0)$ 为 xy 平面内的正椭圆。为此，写出椭圆 $\Pi(\mathbf{k}^0)$ 的方程：

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}^0 = 0, \\ \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \end{cases} \quad (7)$$

\mathbf{k}^0 方向在球坐标中为 (θ, φ) 。先将椭球绕 xy 平面内垂直于 \mathbf{k}^0 的轴旋转 θ 角，这个旋转算符

$$R^{-1} = R_\varphi^{-1} R_z^{-1}(-\delta) = R_z^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot R_x(-\theta) R_z \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_\delta(\delta)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \sin \varphi, & \cos \varphi, & 0 \\ -\cos \varphi, & \sin \varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \theta, & \sin \theta \\ 0, & -\sin \theta, & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi, & -\cos \varphi, & 0 \\ \cos \varphi, & \sin \varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta, & -\sin \delta, & 0 \\ \sin \delta, & \cos \delta, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin(\varphi - \delta) + \cos \theta \cos \varphi \cos(\varphi - \delta), \\ -\cos \varphi \sin(\varphi - \delta) + \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi - \delta), \\ -\sin \theta \cos(\varphi - \delta), \\ -\sin \varphi \cos(\varphi - \delta) + \cos \theta \cos \varphi \sin(\varphi - \delta), & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin(\varphi - \delta), & \cos \theta \\ \cos \varphi \cos(\varphi - \delta) + \cos \theta \sin \varphi \sin(\varphi - \delta), & \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

作用后的椭圆方程记为

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} = 1, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1^2} &= \frac{1}{n_x^2} [\sin \varphi \sin(\varphi - \delta) \\ &+ \cos \theta \cos \varphi \cos(\varphi - \delta)]^2 \\ &+ \frac{1}{n_y^2} [-\cos \varphi \sin(\varphi - \delta) \\ &+ \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi - \delta)]^2 \\ &+ \frac{1}{n_z^2} [\sin \theta \cos(\varphi - \delta)]^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_2^2} &= \frac{1}{n_x^2} [-\sin \varphi \cos(\varphi - \delta) \\ &+ \cos \theta \cos \varphi \sin(\varphi - \delta)]^2 \end{aligned}$$

为

$$R_\varphi = R_z^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_x(\theta) R_z \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

椭圆 $\Pi(\mathbf{k}^0)$ 的轴这时与 x 轴夹 δ 角， δ 的范围可取为 $-\frac{\pi}{4} < \delta \leq \frac{\pi}{4}$ 。如果将椭球绕 x 轴旋转 $-\delta$ 角，则椭圆 $\Pi(\mathbf{k}^0)$ 就摆正了，与这一旋转相应的算符为 $R_\delta(-\delta)$ 。

上述一系列操作对(7)式的影响是作 $\mathbf{r} \rightarrow R^{-1}\mathbf{r}$ 的代换，这里 $R = R_\delta(-\delta)R_\varphi$ 。经过旋转作用后的(7)式必定是标准的椭圆方程。在迪卡尔坐标系中有

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{n_y^2} [\cos \varphi \cos(\varphi - \delta) \\ &+ \cos \theta \sin \varphi \sin(\varphi - \delta)]^2 \\ &+ \frac{1}{n_z^2} [\sin \theta \sin(\varphi - \delta)]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

而参量 δ 则有下列式确定：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{n_x^2} [(\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin 2(\varphi - \delta) \\ &- \cos \theta \sin 2\varphi \cos 2(\varphi - \delta)] \\ &+ \frac{1}{n_y^2} [(\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin 2(\varphi \\ &- \delta) + \cos \theta \sin 2\varphi \cos 2(\varphi - \delta)] \\ &+ \frac{1}{n_z^2} \sin^2 \theta \sin 2(\varphi - \delta). \end{aligned} \quad (12)$$

(10) 式和 (11) 式给出折射率 n_1 和 n_2 。与之相

应的两个振动模的方向为

$$D_1^0 = [\sin \varphi \sin(\varphi - \delta) + \cos \theta \cos \varphi \cos(\varphi - \delta), -\cos \varphi \sin(\varphi - \delta) + \cos \theta \sin \varphi \cos(\varphi - \delta), -\sin \theta \cos(\varphi - \delta)], \quad (13)$$

$$D_2^0 = [-\sin \varphi \cos(\varphi - \delta) + \cos \theta \cos \varphi \sin(\varphi - \delta), \cos \varphi \cos(\varphi - \delta) + \cos \theta \sin \varphi \sin(\varphi - \delta), -\sin \theta \sin(\varphi - \delta)]. \quad (14)$$

二、晶体中 k^0 , D^0 , E^0 , S^0 矢量关系作图法

1. 已知波法线方向 k^0 , 求作 D^0 , E^0 , S^0 方向

已有的作图法是: 作与 k^0 垂直的中心截面 $\Pi(k^0)$, 找出两个光振动方向。然后, 对每个 D^0 , 作出含 D^0 和 k^0 的椭圆面(图 2)。过端点 R 作椭圆的切线, 再由原点 O 作此切线的垂线即得到 E^0 的方向, 与切线平行的方向即为光线方向 S^0 。

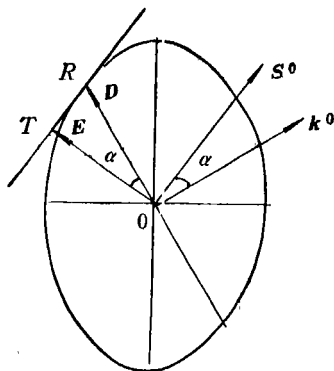


图 2

由于我们只能在平面上作图, 我们期望能用解析法得到图 2 的椭圆。利用(13)式和(14)式, 我们就得出给定波法线 k^0 的两个光振动 D_1^0 和 D_2^0 。对于每个 D_i^0 , 构造矢量为 $k^0 \times D_i^0$, 利用(7)或(9)式就得到所需的椭圆。

对于单轴晶体, o 光的光振动方向 D^0 总在图 2 椭圆的半轴上, 所以 E^0 和 D^0 同向, 从而 S^0 和 k^0 同向。对于 e 光, 图 2 椭圆总与主截面重合, 所以容易画出。

2. 由光振动方向 D^0 求光线方向 S^0 的作图法

如果能够直接作出折射率椭球上 R 点的切面, 则过原点 O 作该切面的垂线就求出了 E^0 方向, 同时图 2 的椭圆也就确定, k^0 和 S^0 的方向容易求出(有两组可能)。

但是, 作椭球切面在平面作图中不可能实现。不过, 利用矢量关系

$$D^0 \propto (x, y, z) \text{ 时, } E^0 \propto \left(\frac{x}{n_x^2}, \frac{y}{n_y^2}, \frac{z}{n_z^2} \right),$$

我们就简单地确定了含 D^0 和 E^0 的椭圆平面, 从而解决了问题。

3. 已知电场方向 E^0 求光线方向 S^0 的作图法

这时, 纯几何方法的困难在于作一平面, 既垂直于 E^0 又与折射率椭球相切。由于当

$$E^0 \propto (x, y, z) \text{ 时, } D^0 \propto (n_x^2 x, n_y^2 y, n_z^2 z).$$

这两个矢量确定了我们所需的椭圆平面。由此我们可以求出 k^0 和 S^0 (有两组可能)。

4. 已知光线方向 S^0 求作其他矢量

由于对应于光线方向 S^0 的电场矢量 E 不是折射率椭球的几何上的特殊方向, 所以无法使用折射率椭球来求其他量。但是, 根据对偶规则^[1], 我们知道光线椭球为

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1, \quad (15)$$

对于 E^0 和 S^0 来说, 它将起折射率椭球对 D^0 和 k^0 所起的作用, 并有以下结论: 给定一个光线方向 S^0 , 过原点作与之垂直的平面, 它与光线椭球[(15)式]相截出一个椭圆 $\Pi'(S^0)$, 其半轴将分别平行于两个电场模式 E_1^0 和 E_2^0 。并且光线椭球面在相应点的法线方向平行于其光振动方向 D^0 。

于是, 已知 S^0 求 E^0 , D^0 和 k^0 的方法完全类似于已知 k^0 求 D^0 , E^0 和 S^0 的作图法。

三、晶体界面的折射问题

在本节中, 我们将讨论光由各向同性介质入射到晶体中的有关光学现象。

1. 折射定律及其作图法

设平面波由各向同性介质向晶体入射, 入射波的波法线为 k_i^0 , 折射波的波法线为 k_r^0 。根

据电磁场在界面 Σ 上的边界条件要求,可得^[4]

$$\mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{k}_i^0}{v_i} - \frac{\mathbf{k}_t^0}{v_t} \right) = 0, \quad (16)$$

这里 $v = \frac{c}{n}$ 为相速度。

根据上式,可以用作图法求出 \mathbf{k}_t^0 : 在界面上任取一点 O 为原点,画出所有波法线方向 \mathbf{k}_i^0 上长度为 $1/v_i$ 的矢量,这样就得到了所谓的波法线的反曲面(实际上只需作出入射面内的曲线即可)。过矢量 \mathbf{k}_i^0/v_i 的端点作 Σ 的垂线,交上述曲线于 Q' 和 Q'' 点,连结 OQ' 和 OQ'' 即得到所需的两个波法线方向,进而可以根据波法线方向及相应的折射率唯一地确定出光线方向。由上面可以看出,一般说来,一束光入射到晶体上将产生两束折射光。

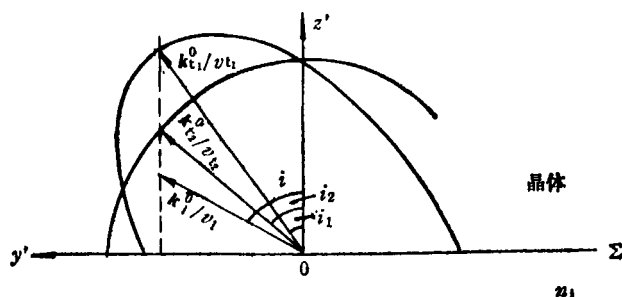


图 3

波法线的折射定律: 图 3 中标出了入射角 i , 折射角 i_1 和 i_2 , 于是(16)式表明折射定律成立:

$$n_1 \sin i = n_{t_1} \sin i_1, \quad n_1 \sin i = n_{t_2} \sin i_2. \quad (17)$$

而 n_{t_1} 和 n_{t_2} 可以这样求得: 用 i_1 和 i_2 可以在图 3 中的坐标系内写出 $\mathbf{k}_{t_1}^0$ 、 $\mathbf{k}_{t_2}^0$ 的坐标, 经过变换就给出它们在主介电轴系中的坐标, 利用(10)式和(11)式就求出

$$n_{t_1} = n_1(i_1), \quad n_{t_2} = n_2(i_2). \quad (18)$$

之所以用两个不同的表式求折射率, 是因为 n_{t_1} 、 n_{t_2} 不对应相同的波法线反曲面。(17)和(18)两式意味着我们可以解析地求出 i_1 和 i_2 , 从而求出波法线的方向。对于单轴晶体, 将给出(18)式的显式表示。

这里应指出, 虽然波法线总是满足折射定

律, 折射波的波法线也总在人射面内, 但是由于晶体中光线方向 \mathbf{S}^0 一般不与其波法线方向 \mathbf{k}^0 重合, 所以光线可以偏离入射面, 其折射定律不成立。

2. 惠更斯作图法的电磁理论基础

对于单轴晶体, o 光的性质就如同光在各向同性介质中, 所以惠更斯原理成立, 即与电磁理论一致。对于 e 光, 惠更斯原理是否成立, 由它出发的作图法与电磁理论是否一致, 就值得讨论。

通常的光学教材都叙述了惠更斯作图法: 平面波 AB 入射到界面 Σ 上, 当波前 B 传播到界面 Σ 上时, A 点在晶体内发出的 e 光已成回旋椭球波面, 过 C 点作这个波面的切面(这一切面应与入射面垂直), 得到切点 E , 连结 AE 即为光线方向。注意, 这个切点不一定在入射面内, 从而光线 \mathbf{S}^0 也不一定在入射面内。

下面讨论惠更斯作图法与电磁理论的一致性。

由图 3 的作图法可以得出 e 光的波法线方向 \mathbf{k}_e^0 , 过界面上 C 点(图 4)作 \mathbf{k}_e^0 的垂直面, 显然这个面将与 A 点发出的某个波面相切于一点 E' , 现在要证明这个波面就是图 4 中的波面(即时间 t 相同的面), 切点 E' 就是 E 。

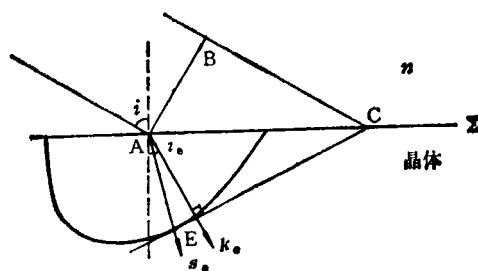


图 4

不妨取 $BC = v_i$ (即 $t = 1$), 则 $AC = v_i / \sin i$, 这样 A 点的子波面与其光线面重合。根据波法线面与光线面的几何关系, 某一光线 \mathbf{S}^0 在光线面对应点的切面总是垂直于相应的波法线, 且垂足在波法线面上。可以过 \mathbf{k}_e^0 上与 A 相距 v_e 的点作与 \mathbf{k}_e^0 垂直的光线面的切面, 交 Σ 于

C' 点。易知 $AC' = v_c / \sin i_c$ 。(16) 式指出： $v_i / \sin i = v_c / \sin i_c$ ，可见 C' 与 C 重合，即我们所作切面与惠更斯作图法中的切面是同一的。于是 E' 与 E 重合，而电磁理论指出 AE' 方向就是相应 k_c^0 的光线方向 S_c^0 ，因此，惠更斯作图法与电磁理论相符。

由上述讨论，可作结论：在晶体中光的传播仍然可以看成是波面上的各点发出的子波面的相干叠加。

3. 入射线偏振光的分解

在普通光学里，总是把入射的线偏光按光轴方向和与光轴垂直方向进行分解，并独立处理这两种光，即 o 光和 e 光。但是，这种分解并不是总能进行的，与界面、晶轴和入射面相对位置有关。当然，在“把线偏光分解为两个分量，其一只激发 o 光，另一只激发 e 光”的意义上，分解原则上是可行的。

在这一小节中，讨论特定条件下偏振光的分解问题。

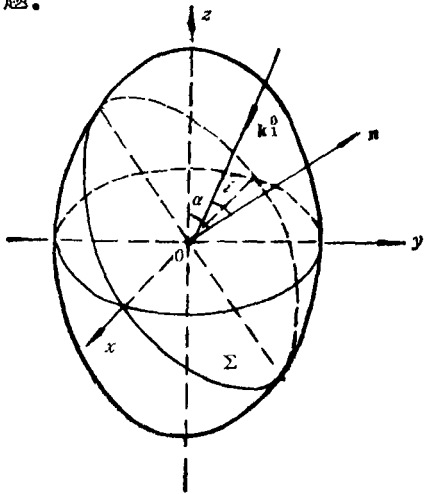


图 5

假定光轴 z 在入射面内，选择图 5 所示的坐标系，即仍为主介电轴系，入射面为 yz 平面。设界面法线 n 与 z 轴夹角为 α ，则入射光和折射光的波法线可表为

$$\begin{aligned} k_i^0 &= [0, -\sin(\alpha - i), -\cos(\alpha - i)], \\ k_o^0 &= [0, -\sin(\alpha - i_o), -\cos(\alpha - i_o)], \\ k_e^0 &= [0, -\sin(\alpha - i_c), -\cos(\alpha - i_c)], \end{aligned} \quad (19)$$

式中 i_o 和 i_c 由折射定律给出：

$$n \sin i = n_o \sin i_o, \quad (20)$$

$$n \sin i = n'_c \sin i_c, \quad (21)$$

$$n'_c = \frac{n_o n_c}{\sqrt{n_c^2 \cos^2(\alpha - i_c) + n_o^2 \sin^2(\alpha - i_c)}}. \quad (22)$$

从这里可导出 k_o^0 和 k_e^0 在球坐标系中的方向角，从而由 (5) 和 (6) 式给出 o 光和 e 光的光振动方向：

$$D_o^0 = (1, 0, 0) \quad (23)$$

$$D_e^0 = [0, -\cos(\alpha - i_c), \sin(\alpha - i_c)], \quad (24)$$

以及相应的电场方向：

$$E_o^0 = (1, 0, 0), \quad (25)$$

$$E_e^0 = N \left(0, -\frac{\cos(\alpha - i_c)}{n_c^2}, \frac{\sin(\alpha - i_c)}{n_c^2} \right), \quad (26)$$

其中 N 为归一系数，

$$N = \sqrt{\frac{\cos^2(\alpha - i_c)}{n_c^4} + \frac{\sin^2(\alpha - i_c)}{n_c^2}}. \quad (27)$$

显然 $E_o^0 \perp E_e^0$ 。正是这一点使得我们能够入射线偏振光“分解”为 o 光和 e 光，下面将看到这种分解与电磁波中的 P 波和 s 波分解一致。

考虑入射波 $E_i = E_i e_x$ (即 s 分量)，如果它只激发 o 光，则 Maxwell 边界条件满足，且振幅比为

$$i_s = \frac{2 \sin i_o \cos i}{\sin(i + i_o)}. \quad (28)$$

如果 E_p 也能激发 o 光，则前面所述的边界条件被破坏。但由于 E_p 不存在 E_o 的分量，所以预计 E_p 将只激发 e 光，下面的讨论证实这一点。

在主介电轴系中把有关量表示为

$$n = (0, \sin \alpha, \cos \alpha),$$

$$k_i^0 = (0, -\sin(\alpha - i), -\cos(\alpha - i)),$$

$$k_o^0 = (0, \sin(\alpha + i), \cos(\alpha + i)),$$

$$k_e^0 = (0, -\sin(\alpha - i_c), -\cos(\alpha - i_c)),$$

$$H_i = n(-E_p, 0, 0),$$

$$H_r = n(-E_{rp}, 0, 0),$$

$$H_c = n'_c \left(-\frac{E_c N}{n_c^2}, 0, 0 \right),$$

$$E_i = (0, -E_p \cos(\alpha - i), E_p \sin(\alpha - i)),$$

$$\mathbf{E}_r = [0, E_{rp} \cos(\alpha + i), -E_{rp} \sin(\alpha + i)],$$

$$\mathbf{E}_e = NE_e \left[0, -\frac{\cos(\alpha - i_c)}{n_0^2}, \frac{\sin(\alpha - i_c)}{n_c^2} \right],$$

$$\mathbf{D}_e = NE_e [0, -\cos(\alpha - i_c), \sin(\alpha - i_c)].$$

由 $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$, 得

$$n(E_p + E_{rp}) = NE_e/n'_c. \quad (29)$$

$$i_c = \frac{E_e}{E_p} = \frac{2nn'_c \cos i \cdot \sqrt{n_c^4 \cos^2(\alpha - i_c) + n_0^4 \sin^2(\alpha - i_c)}}{n_0^2 n_c^2 \cos i + nn'_c [n_c^2 \cos \alpha \cos(\alpha - i_c) + n_0^2 \sin \alpha \sin(\alpha - i_c)]}. \quad (32)$$

这就是 e 光的菲涅耳振幅比公式。

这里指出一点, 当入射波法线与 \mathbf{n} , z 轴所张平面垂直时, 入射波的 s, p 分量将分别激发 e 光和 o 光。但在一般情形下, s, p 分量不再独立, 必须按边界条件解耦合的方程组才行。其物理原因是, 它们不再各自激发晶体的一个光振动模。

有了上述讨论, 我们知道, 用线偏振光入射时, 有可能只产生一束折射光。这与普通的双折射概念有了差别。

4. 全反射与表面波

(1) 全反射条件

从 (22) 式看到, n'_c 最大只能为 $\max(n_o, n_c)$, 于是对于某些折射率 n , 当 i 大到一定程度时, (21) 式就不再存在实数解, 这就产生了 e 光的全反射。

在前节情形下, e 光的折射定律由 (21), (22) 式给出。为了从中解出 $\sin i_c$ 和 $\cos i_c$ 的显式表示, 我们考虑 $\alpha = 0$ 情形 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 只需把其结果的 n_o, n_c 互换), 这时晶轴与界面垂直。

在 (21), (22) 式中取 $\alpha = 0$, 则解出

$$\sin i_c = \frac{nn_c \sin i}{\sqrt{n_0^2 n_c^2 + n^2(n_c^2 - n_0^2) \sin^2 i}}. \quad (33)$$

为了使 (21) 式没有实数解, 必须让 $\sin i_c > 1$ 。如果记 $x = n \sin i$, 则 $\sin i_c$ 是 x 的增函数, 从 (33) 式就可以导出 e 光的全反射临界条件为

$$x_c = n \sin i_c = n_c. \quad (34)$$

由 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0$, 给出

$$n^2(E_p \sin i + E_{rp} \sin i) = NE_e \sin i_c. \quad (30)$$

由 $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ 给出

$$(E_p - E_{rp}) \cos i = NE_e \left[\frac{\cos \alpha \cos(\alpha - i_c)}{n_0^2} + \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - i_c)}{n_c^2} \right]. \quad (31)$$

(29), (30) 式实际上相同。(29), (31) 联立给出

而当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 全反射临界条件为

$$x_c = n \sin i_c = n_o. \quad (35)$$

可见, e 光的全反射条件与界面的取向有关, 这一点与通常情形不一样。临界条件的物理意义是: x 的临界值为 e 光折射角等于 $\frac{\pi}{2}$ 时对应的折射率, 这时光振动 \mathbf{D}_e^0 在界面法线方向。

我们可以把上面的结论推广为更一般情形: x 的临界值相应于这样两个折射率, 它们是垂直于入射面的平面与折射率椭球相截得到的椭圆的两个半轴长。

对于单轴晶体, 其入射面与主截面重合时 e 光全反射条件为

$$n \sin i \geq \frac{n_o n_c}{\sqrt{n_c^2 \sin^2 \alpha + n_0^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (36)$$

(2) 表面波问题

全反射时, 晶体内部仍然存在场, 只是它随深度衰减的, 因而称为表面波。下面我们仍讨论 $\alpha = 0$ 情形, 这时

$$\cos i_c = \pm i \frac{n_o \sqrt{n^2 \sin^2 i - n_c^2}}{\sqrt{n_0^2 n_c^2 + n^2(n_c^2 - n_0^2) \sin^2 i}}, \quad (37)$$

$$n'_c = \sqrt{n_0^2 + n^2 \left(1 - \frac{n_0^2}{n_c^2}\right) \sin^2 i}. \quad (38)$$

于是, 电磁波的指数因子为

$$\begin{aligned} & \exp\left(i \frac{n'_c \omega}{c} \mathbf{k}_c^0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n'_c \omega}{c} |\cos i_c| z' + i \frac{n'_c \omega}{c} \sin i_c y' - i\omega t\right), \end{aligned}$$

这里 $x'y'z'$ 为界面上的坐标系(图 3), z' 为法线方向。可见这是沿界面传播的表面波, 在晶体内很快衰减。这一图象与通常情形一致。

从 (29), (31) 式及 $\alpha = 0$, 可求出

$$r_c = \frac{E_{rp}}{E_p} = \frac{n_0^2 \cos i - n n_c' \cos i_c}{n_0^2 \cos i + n n_c' \cos i_c} \quad (39)$$

注意到 $\cos i_c$ 为纯虚数, 故而 $|r_c| = 1$ 。这样, 我们就可以进一步得出结论: 在全反射情形下, 能量不进入晶体内部。

为了深入讨论表面波的能量传播问题, 我们来计算坡印亭矢量 S 。

引入记号:

$$\kappa = \frac{n_c' \omega}{c} |\cos i_c|, \quad \tau = \frac{n_c' \omega}{c} \sin i_c y' - \omega t, \quad (40)$$

则表面波的电磁场为

$$\mathbf{E}_c = N t_c E_p e^{-\kappa z'} e^{i\tau} \left(0, -\frac{\cos i_c}{n_0^2}, -\frac{\sin i_c}{n_c^2} \right), \quad (41)$$

$$\mathbf{H}_c = -\frac{1}{n_c'} N t_c E_p e^{-\kappa z'} e^{i\tau} (1, 0, 0). \quad (42)$$

能流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_c^*) \times \frac{1}{2} (\mathbf{H}_c + \mathbf{H}_c^*) \\ &= \frac{c}{16\pi} \frac{\sin i_c}{n_c^2 n_0^2} N^2 E_p^2 e^{-2\kappa z'} [(t_c^2 e^{2i\tau} + t_c^{*2} e^{-2i\tau}) \\ &\quad + 2|t_c|^2] \mathbf{e}_y, \\ &\quad + \frac{c}{16\pi} \frac{\cos i_c}{n_0^2 n_c'} N^2 E_p^2 e^{-2\kappa z'} (t_c^{*2} e^{-2i\tau} \end{aligned}$$

$$- t_c^2 e^{2i\tau}) \mathbf{e}_y. \quad (43)$$

由此可见, \mathbf{e}_y 方向上能流平均值为零, 在稳态时确实没有净能量进入晶体。

(41)–(43) 式还表明, 表面波不是横波, 且有沿界面传播的净能流。考察界面附近的任一封闭区域则知道, 从时间平均看来, 表面波的能量是自我抵消的, 而不是来自于入射波! 这些特征与通常情况下完全一致。而且, e 光的 k^0 与 S_c^0 不同向这一特征, 在表面波看来也给抹煞了(其 k^0 与 S^0 同向!)。在理想稳态情形下, 尽管表面波不接受入射波的净能量, 但它们却无时无刻不在交换能量[(43)式第二项]。从晶体分子角度来看, 入射波使得分子不断振动, 从而产生次波, 次波干涉结果形成了反射波和表面波, 可见表面波有赖于入射波的存在而存在。另外, 由于波在时间, 空间上都不是无限扩展的, 表面波的能量是来自于建立稳态场的初时刻, 那时有一小部分入射波能量进入了晶体, 从而使得稳态时, 表面波虽然不再从入射波获得净能量, 却仍有一沿表面传播的净能流^[1]。

本文是在张永德老师指导下完成的, 得益于和张老师的多次讨论。作者在此致谢。

参 考 文 献

- [1] M. 坡恩, F. 沃耳夫, 光学原理, 科学出版社, (1981).
[2] 赵凯华, 大学物理, No. 12 (1984), 1.

新书出版消息

北京出版社即将出版一套《物理学手册》, 共七本, 其中《电磁学手册》由北京师范大学编写; 《力学手册》和《固体物理手册》由清华大学编写; 《热学手册》由河北大学编写; 《光学手册》由天津大学编写; 《声学手册》和《原子、原子核物理手册》由北京大学编写。

《物理学手册》的内容包括基本概念、定律、定理和公式; 各分支学科的发展简史; 物理实验技术和物理数

据等四部分。内容比较丰富全面, 注意收集近代物理学发展的新资料、新观点及数据, 并且注意实用性。它是一套有一定广度、深度的中等规模的、实用的物理学工具书, 既能配合大专院校的教学, 供教师、学生使用, 也能供非物理专业的科技人员参考。

(曹 超)