

光学矩阵运算 (II)

陈岩松 张东生 朱伟利
(中国科学院物理研究所) (中央民族学院物理系)

在前一篇文章里,我们介绍了内乘矩阵运算的掩膜光学系统、外乘运算系统和双光路电光调制系统。本文将介绍矩阵运算的声光调制系统和带有反馈回路的矩阵运算系统。

一、矩阵运算的声光调制系统

在矩阵运算的掩膜系统中,矩阵元可以完全并行地输入,因此这种系统的矩阵运算是一次性并行进行的。但是,掩膜调制器的可变性较差,变化频率还达不到每秒30帧^[1]。为此,在1981年 Caulfield 发展了矩阵运算的声光调制系统^[2],这种系统以它的实时可变性和高度的可靠性而倍受重视。声光调制器是利用超声波使声光材料的折射率发生周期性变化,形成由超声波调制的位相型光栅,这个光栅的衍射效率与超声波强度成正比^[3]。将强度为 a 的超声波输入超声池,同时用强度为 b 的光束照射它,则其一级衍射光强与 $a \cdot b$ 成正比,这就实现了数-数的相乘运算。

在声光调制器中,由于数据不能完全并行地输入,而使运算速度受到限制。为尽可能地提高不同类型矩阵的运算速度, Caulfield^[2] 和 Speiser^[4] 分别采用“脉动”和“啮合”方式输入数据。用脉动方式输入数据的方法称为脉动算法;用啮合方式输入数据的方法称为啮合算法。后来, Casasent 提出了频率复合技术^[5],使运算速度进一步提高,同时又节省了空间信道。

1. 矩阵-矢量相乘的脉动算法^[2]

以二阶矩阵-矢量相乘为例,设

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中各元素均规定为正实数(复数情况可利用

文献[6]给出的复数的正实数表示法)。其运算过程参见光学系统示意图1。图1中 LED 是发光二极管, AO 是声光调制器, CCD 是带有电荷耦合移动记录仪的探测器阵列。矩阵 A 以脉动形式从 LED 输入,矢量 B 各元素依次从 AO 输入, L_1 和 L_2 是成像透镜, M 是滤光板。

从 LED 发射的光经准直后通过声光调制器,再经 L_1 和 L_2 成像在探测器上。当衍射效率与 x_1 成正比的元光栅经过 2 号 LED 前面时,从 2 号 LED 输出一个强度为 a_{11} 的光脉冲,它通过光栅后的一级衍射光成象在 2 号探测器上,得到一个与 $a_{11}x_1$ 成正比的光信号;当与 x_2 成正比的元光栅经过一号 LED 前时,第一个元光栅已运动到 3 号 LED 前,此时 1, 3 号 LED 分别输出强度为 a_{21} 和 a_{12} 的光脉冲,它们各自的衍射光将分别成象到 3 和 1 探测器上。由于移位记录仪同步移位,使得 $a_{11}x_1$ 与 $a_{12}x_2$ 记录在同一记录器中,得到 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$; 当 x_2 元光栅运动到 2 号 LED 前,又有一个强度为 a_{22} 的光脉冲从 2 号 LED 输出,通过元光栅后成象在 2 号探测器上。随着记录仪的同步移位,使得

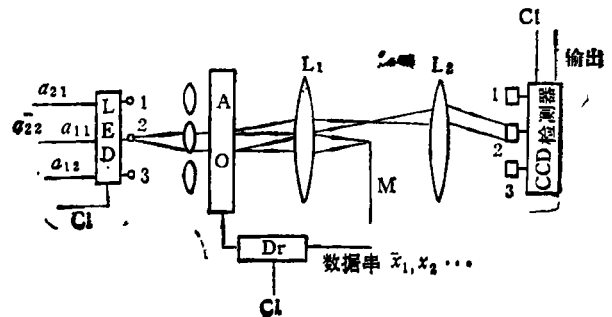


图1 矩阵-矢量相乘的声光脉动系统
LED——发光二极管; AO——声光池; Dr——驱动器;
Cl——时钟信号;

$a_{21}x_1$ 和 $a_{22}x_2$ 依次记录在另一记录器中, 得到 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ 。在输出端得到运算结果。

对于一般的 $M \times N$ 矩阵和 N 维矢量的相乘运算, 需要由 $M + N - 1$ 个 LED 组成的列阵和 $M + N - 1$ 个探测器。矩阵 A 及矢量 x 的输入形式如图 2 所示。完成运算所用的时间, 即是从矢量输入开始到矢量输出为止所用的时间, 为 $(M + 2N - 1)T_1$ (T_1 为每个光栅经过一个 LED 窗口所用的时间)。

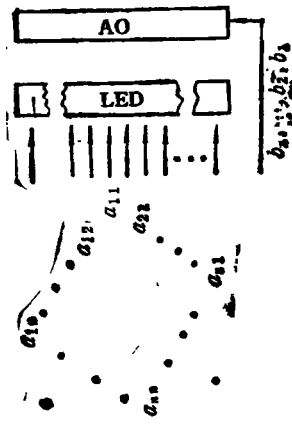


图 2 矩阵和矢量的脉动输入形式^[4]
AO——声光池; LED——发光二极管

2. 矩阵-矢量相乘的啮合算法^[4,7]

矩阵-矢量相乘的啮合算法系统参见图 3。啮合算法系统除了接收仪器用时间积分探测器外, 其它组成部分与图 1 相同。对于 3×3 矩阵 A 与三维矢量 B 相乘的啮合输入形式如图 3 所示。

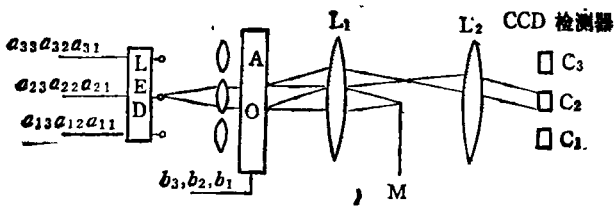


图 3 矩阵-矢量相乘的啮合系统^[4]
LED——发光二极管; AO——声光池

3. 矩阵-矩阵相乘的啮合算法^[3]

图 4 是两个 3×3 矩阵相乘的啮合算法系统, 其中 AO_1 和 AO_2 是相互垂直放置的三极声光调制器, 两者之间放置成像系统, 使得 AO_1

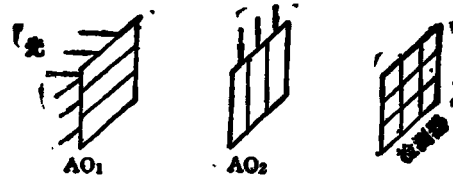


图 4 矩阵-矩阵相乘啮合系统^[3]
AO——声光池

与 AO_2 互为物、象关系。 AO_2 与探测器列阵 D 之间也放置成像系统, 使得 AO_2 成象在积分探测器点阵 D 上。矩阵 A 从 AO_1 沿水平方向输入, 矩阵 B 从 AO_2 沿垂直方向输入。输入、输出形式如图 5 所示。在时间积分探测器点阵上得到运算的结果矩阵 C 。

4. 脉动算法系统与啮合算法系统的比较^[6]

为便于比较, 以 3×3 矩阵与三维矢量相乘为例, 列表说明。

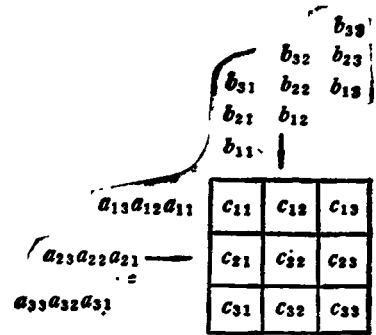


图 5 矩阵-矩阵相乘的啮合输入形式^[6]

表 1

算法	LED 数	AO 的时间宽度	运算时间	探测器
脉动	5	$5T_1$	$8T_1$	电荷耦合移位记录仪探测器
啮合	3	$3T_1$	$5T_1$	时间积分探测器

从表 1 可见, 对于一般的矩阵-矢量相乘, 脉动算法不仅需要较长的计算时间, 而且占用较多的空间信道。但是对于只有主、次对角线上的元素为非零的有界矩阵来说, 脉动算法有其自己的优越之处, 因为它是沿着矩阵的主、次对角线输入的^[1]。

5. 频率复合的矩阵-矢量相乘系统^[2]

频率复合的矩阵-矢量相乘系统如图 6 所示。图 6 中,输入处放置发光二极管 LED 或激光二极管 LD, P₁ 处放置只能容纳单个声脉冲的点声光调制器 AO, 在凸透镜 L 的后焦面处放置探测器列阵 D。 矢量元素 b_n 表示为时间的函数, 并从 LED 输入, 即 $b_n = b(t_n)$, 其中 $n = 1, 2, \dots, N$ 。 矩阵元素 a_{mn} 表示为时间和频率的函数从声光池输入, 即 $a_{mn} = a(f_m, t_n)$, 其中 $m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$ 。

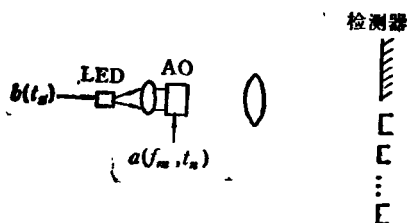


图 6 矩阵-矢量相乘的频率复合系统^[2]
LED——发光二极管; AO——声光池

t_1 时刻 $a(f_m, t_1)$ 从声光调制器输入, $b(t_1)$ 从发光二极管输入, 在透镜焦平面上得到 $(f_1, t_1)b(t_1), a(f_2, t_1)b(t_1), \dots, a(f_m, t_1)b(t_1)$ 。
 t_2 时刻输入 $a(f_m, t_2), b(t_2)$, 经过 N 次输入后, 在输出平面上得到以下排列:

$$\begin{aligned} t_1 \text{ 时刻, } & a(f_1, t_1)b(t_1), a(f_2, t_1)b(t_1), \dots, \\ & a(f_m, t_1)b(t_1); \\ t_2 \text{ 时刻, } & a(f_1, t_2)b(t_2), a(f_2, t_2)b(t_2), \dots, \\ & a(f_m, t_2)b(t_2); \\ & \vdots \\ t_N \text{ 时刻, } & a(f_1, t_N)b(t_N), a(f_2, t_N)b(t_N), \dots, \\ & a(f_m, t_N)b(t_N). \end{aligned}$$

在焦平面 P₃ 上各频率所对应的位置用时间积分器接收, 则得到 A 与 B 乘积 C :

$$C_m = \sum_{n=1}^N a(f_m, t_n)b(t_n).$$

6. 频率复合矩阵-矩阵相乘系统^[5]

频率复合的矩阵-矩阵相乘系统见图 7, 图中仅以两个 3×3 矩阵相乘为例。此系统由五个发光二极管 LED'S, 一个声光调制器 AO 和三个时间积分探测器 D 及透镜 L 组成。数据的输入和输出形式如图 7 所示。设每组光栅 (不

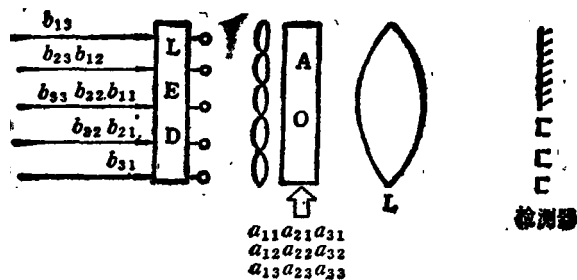


图 7 矩阵-矩阵相乘的频率复合系统^[5]

AO——声光池; LED——发光二极管

同频率光栅的叠加) 经过一个 LED 的时间仍为 T_1 , 则在 $3T_1$ 时刻输出运算结果 c_{11}, c_{21}, c_{31} , $4T_1$ 时刻输出 c_{12}, c_{22}, c_{32} , $5T_1$ 时刻输出 c_{13}, c_{23}, c_{33} 。完成整个运算所需时间为 $5T_1$ 。

上述三种算法中, 脉动算法的运算速度在理论上达到每秒 6.25×10^{10} 次正实数乘法和加法运算^[7], 啮合算法和频率复合方法的运算速度还可进一步提高。尽管声光调制矩阵运算系统不象掩膜系统那样具有完全并行的运算特点, 但由于它具有很好的灵活性和可靠性, 因此仍然是一种很有前途的方法。

二、带有反馈回路的矩阵运算系统

带有反馈回路的矩阵运算系统是在矩阵运算的掩膜系统和声光调制系统的基础上发展起来的。1979 年 Psaltis 在掩膜矩阵-矢量相乘系统的基础上引入了电子反馈回路^[8], 用以求解线性方程组问题, 使矩阵运算系统向应用领域前进了一步。1981 年 Caulfield 等人把此系统应用到确定矩阵的本征矢问题上^[9]。1982 年 Carlotta 利用光纤技术设计了微型迭代光学处理器^[10]。同一年 Casasent 把反馈装置引入声光调制矩阵-矢量相乘系统^[11]; 1983 年他又把反馈回路用于频率复合的声光调制矩阵-矩阵相乘的光学系统^[5], 给出了矩阵求逆的光学迭代方法。

下面着重介绍带有反馈回路的掩膜矩阵-矢量相乘系统和声光矩阵-矢量相乘系统, 以及它们的应用。

1. 带有反馈回路的掩膜矩阵-矢量相乘系统^[9]

前面叙述的矩阵-矢量相乘运算都是已知矩阵 A 和矢量 B , 求 A 与 B 的乘积 C 的光学矩阵运算。本系统是解决从已知矩阵 A 和矢量 C 如何实现求矢量 B 的运算问题。

图 8 是带有反馈回路的矩阵-矢量相乘系统示意图。它是在掩膜矩阵-矢量相乘系统中加入一个电子反馈回路。

下面谈谈此系统的反馈过程。

其迭代公式为

$$B_{i+1} = (I - A)B_i + C \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

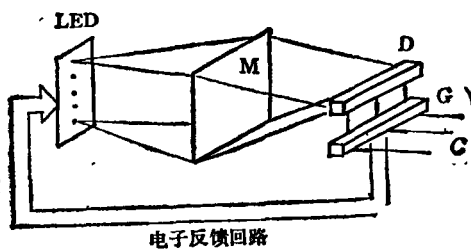


图 8 掩膜矩阵-矢量相乘的反馈系统^[9]

LED——发光二极管

式中 B_i 表示第 i 次迭代结果, A 是输入矩阵, C 是输入矢量, I 为单位矩阵。为利用(2)式求矢量 B , 先任意给定一输入矢量 B_0 , 将 B_0 从 LED'S 输入, 矩阵 $(I - A)$ 从掩膜 M 输入, 在光子探测器 D 上得到矢量 $(I - A)B_0$, 此矢量从探测器输出, 然后在相加器 G 中与已知矢量 C 相加, 得到 $B_1 = (I - A)B_0 + C$, B_1 经反馈回路再从 LED'S 输入, …… 如此反复, 直到 B_{i+1} 与 B_i 之差满足所要求的精度时终止。此时将

$$B_i \approx B_{i+1}$$

代入(2.1)式得到

$$AB_i \approx C$$

其中 B_i 即为所求之矢量 B 。

2. 具有反馈回路的声光矩阵-矢量相乘系统^[11]

图 9 是带有电子反馈回路的声光矩阵-矢量相乘系统示意图。这是在图 1 所示系统基础上加上一个电子反馈回路组成的, 此系统的迭代公式为

$$B_{i+1} = B_i - \omega(C - AB_i), \quad (3)$$

此式比(2)式多一个加速收敛因子 ω 。迭代过程如下: 先从声光调制器任意输入一矢量 B_i , 矩阵 A 从发光二极管阵列 LED'S 输入, 在可移动的电荷耦合探测器上得到 AB_i , 接着在电子减法器中依次实现 $(C - AB_i)$, $(C - AB_i) \cdot \omega$, $B_i - \omega(C - AB_i) = B_{i+1}$, 然后再把 B_{i+1} 送回声光调制器。此过程迭代 i 次后得到 B_{i+1} 。直到 $B_{i+1} - B_i$ 小于或等于给定误差, 迭代终止, 而 B_{i+1} 即为所求之矢量。

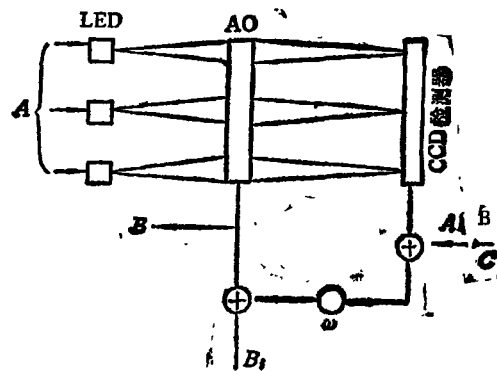


图 9 声光矩阵-矢量相乘的反馈系统^[11]

LED——发光二极管; AO——声光池

3. 应用

(1) 解线性方程组

设有 N 个未知数的 N 个方程构成的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2, \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases} \quad (4)$$

(4)式可改写为矩阵-矢量相乘的形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}. \quad (5)$$

可见, 求解线性方程组问题可转化为一个矩阵-矢量相乘问题, 可利用具有反馈回路的系统, 经反复迭代求出符合给定误差要求的矢量 x 。

(2) 求解微分方程

原则上用上述迭代方法可以求解任意阶的

线性微分方程,本文为简明起见,仅以一个简单微分方程为例,说明此过程. 设

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \quad (6)$$

把(6)式改写成如下形式:

$$\frac{-x(t + \Delta t) + 2x(t) - x(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} = f(t), \quad (7)$$

然后将时间取为离散值 t_1, t_2, \dots, t_n , 其间隔为 Δt , 则有

$$\begin{cases} \frac{-x(t_2) + 2x(t_1) - x(t_0)}{(\Delta t)^2} = f(t_1), \\ \frac{-x(t_3) + 2x(t_2) - x(t_1)}{(\Delta t)^2} = f(t_2), \\ \vdots \\ \frac{-x(t_{n+1}) + 2x(t_n) - x(t_{n-1})}{(\Delta t)^2} = f(t_n). \end{cases} \quad (8)$$

把(8)式改写成矩阵-矢量相乘形式,即

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

(上接第 672 页)

60 亿美元, 而国会拨给用于超导研究的经费每年只有 1.5 亿, 十年才能拿到 15 亿, 相比之下人们当然愿意支持在实际应用中已初见端倪的光量子学, 它所需的经费相比于 SCC 就少多了. 因此, 确定基础研究的优先级不仅是研究项目的选择, 也包括对研究规模和周期的考虑. 正如通用汽车公司的 Frosch 所说, 规模宏大的研究题目必须与缩小比例的物质条件(经济力)相适应.

圆桌会议的议题转到了教育上. 人们普遍注意到目前美国工程界的外籍人占有很大比例, 在从事工程技术科学研究的学生中, 非美籍学生占 50%. 通用汽车公司的实验室聚集着来自世界各地的研究生, 象个小联合国. 这些技术人员对美国工业起了明显的推动作用, 他们是美国整个科学资源的一部分. 与会者呼吁为这些外籍人创造方便的条件, 包括就业机会、移

物理

$$= (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

由此可见, 解线性微分方程最终也可归结为求解矩阵-矢量相乘的逆问题, 其中矩阵的非零元素恰恰分布在主、次对角线上, 这种情况正好适合于用带有反馈回路的声光脉动系统求解.

此外, 带有反馈回路的矩阵-矢量(或矩阵)相乘系统还可用于很多方面, 例如确定矩阵的本征矢^[9], 解卷积运算^[1]和矩阵的求逆^[5]等等.

- [1] D. Casasent, *Appl. Opt.*, 21(1982), 1859.
- [2] H. J. Caulfield et al, *Opt. Comm.*, 40(1981), 86.
- [3] W. T. Rhodes et al, *Proc. IEEE*, 72(1984), 820.
- [4] J. M. Speiser, *Proc. SPIE*, 298(1981), 41.
- [5] D. Casasent et al., *Appl. Opt.*, 22(1983), 115.
- [6] J. W. Goodman, L. M. Woody, *Appl. Opt.*, 16(1977), 2611.
- [7] P. S. Guilfoyle, *Opt. Eng.*, 23(1984), 20.
- [8] D. Psaltis et al., *Opt. Lett.*, 4(1979), 348.
- [9] H. J. Caulfield et al., *Appl. Opt.*, 20(1981), 2263.
- [10] M. Carlotto et al., *Appl. Opt.*, 21(1982), 147.

民和加入美国籍, 促使他们成为美国人. Frosch 说, 这正是传统的“生产”美国人的道路. 但是非美籍学生比例之大也正说明了美国青年学习工程的兴趣不高. 事实上他们越来越不愿接受高等教育, 这种情况令人担忧. 人们检讨了美国中小学教育的弊端, 认为根本问题是要改变中等教育的教学法, 使物理变得对学生更有吸引力, 鼓励学生进入理工学院学习高技术. 而目前的中等教育状况似乎倾向于造就更多的律师. 专家们讽刺地说, 减少律师会大大提高美国的办事效率.

初等教育的现状更糟. 美国现有 30% 的公民处于文盲、半文盲状态, 这是个相当严重的问题. 他们不能看书、写信, 当然更谈不上学习物理或工程技术. 从发展上看, 美国的社会文化素质在下降.

(陈康琪根据 *Physics Today* 1988 年第 2 期第 54—67 页的圆桌会议记录 编译)