

若干文献中关于暗场法和相衬法的错误表述应当修正

栾胜奎 薛 跃

(武汉测绘科技大学)

自从1935年 F. Zernike^[1,2] 提出著名的相衬理论以来,在很多光学方面的专著、教材以及学术论文(如文献[3—11])中,常常论及用于观察位相物体的暗场法和相衬法。然而,对于这两种方法的推导和结论却存在某些不容忽视的错误。产生错误的原因是由于人们对位相物体的位相分布函数和零频成分存在认识上的模糊和概念上的错误。这些错误导致了人们对信息光学某些概念的错误理解,从而影响到人们在实际工作中的分析和判断。本文首先对具有任意位相分布函数的位相物体的频谱分布特别是零级频谱分布,进行了定量的研究,以此为基础,推导了对于任意位相物体改变零频分布后得到的输出光场分布,并由此得到对于位相起伏很小的所谓弱位相物体的特例。根据分析得出位相物体的位相分布函数的准确定义。

一、理论推导和分析

1. 具有任意位相分布函数的位相物体的频谱分析

具有任意位相分布函数 $\phi(x, y)$ 的二维无限大位相物体的复振幅透过率为

$$t(x, y) = \exp i\phi(x, y), \quad (1)$$

其傅里叶变换为

$$T(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\phi(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (2)$$

于是有

$$T(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\phi(x, y) dx dy. \quad (3)$$

此外, $t(x, y)$ 的傅里叶变换也可表示为下列形式:

$$T(u, v) = A\delta(u, v) + T_1(u, v), \quad (4)$$

其中首、末两项分别代表 $t(x, y)$ 的零级频谱和

零级频谱以外的其它频谱分布。考虑到末项对 $(0, 0)$ 点的光场分布并无贡献,因而有

$$T(0, 0) = A\delta(0, 0). \quad (5)$$

由(3)式和(5)式可得

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\phi(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy}. \quad (6)$$

A 一般为复数,令 $A = A_0 \exp i\phi_0$, 于是得到

$$A_0 = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\phi(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy} \right|, \quad (7)$$

$$\phi_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy}. \quad (8)$$

由此可知,复振幅透过率为 $t(x, y) = \exp i\phi(x, y)$ 的位相物体的零级频谱成分为

$$T_0(u, v) = (A_0 \exp i\phi_0) \delta(u, v), \quad (9)$$

其中 A_0 和 ϕ_0 与位相分布函数 $\phi(x, y)$ 的关系由(7)式和(8)式确定,任意位相物体的零频成分中 $\delta(u, v)$ 的系数 $A = A_0 \exp i\phi_0$ 等于该物体复振幅透过率的空间平均值,而其幅角 ϕ_0 则等于该物体位相分布函数的空间平均值。

2. 改变零频分布后的输出光场分布

对于暗场法,阻挡零频相当于令(4)式中首项为零,于是其频谱分布变成

$$T'(u, v) = T_1(u, v) = T(u, v) - (A_0 \exp i\phi_0) \delta(u, v). \quad (10)$$

由此得到输出光场的复振幅分布[即 $T'(u, v)$ 的傅里叶变换,取反射坐标]为

$$t'(x, y) = \exp i\phi(x, y) - A_0 \exp i\phi_0, \quad (11)$$

其光强分布为

$$I(x, y) = 1 + A^2 - 2A_0 \cos[\phi(x, y) - \phi_0]. \quad (12)$$

对于相衬法,使零频产生 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 的相移相当于令(4)式中首项乘以 i 或 $-i$, 于是其频谱分布变成

$$\begin{aligned} T'(u, v) &= \pm i(A_0 \exp i\phi_0) \delta(u, v) + T_1(u, v) \\ &= T(u, v) - (1 \mp i)(A_0 \exp i\phi_0) \\ &\quad \times \delta(u, v). \end{aligned} \quad (13)$$

由此得到输出光场的复振幅分布 [即 $T'(u, v)$ 的傅里叶变换,取反射坐标]为

$$i'(x, y) = \exp i\phi(x, y) - (1 \mp i)(A_0 \exp i\phi_0), \quad (14)$$

其光强分布为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= 1 + 2A_0^2 - 2A_0 \cos[\phi(x, y) - \phi_0] \\ &\quad \pm 2A_0 \sin[\phi(x, y) - \phi_0]. \end{aligned} \quad (15)$$

3. 弱位相物体情况下的近似

对于 $\phi(x, y) \ll 1$ 的弱位相物体,由(7)式和(8)式可知, $A_0 \approx 1$, $\phi - \phi_0 \ll 1$, 因而有 $\sin(\phi - \phi_0) \approx \phi - \phi_0$, 于是对于暗场法,由(12)式可得

$$I(x, y) = [\phi(x, y) - \phi_0]^2; \quad (16)$$

对于相衬法,由(15)可得[除了上述近似外,并对 $(\phi - \phi_0)$ 的一次项略去二次项]

$$I(x, y) = 1 \pm 2[\phi(x, y) - \phi_0]. \quad (17)$$

4. 文献 [1]~[11] 关于暗场法和相衬法的推导和结论之错误所在

文献 [1]—[11] 对于暗场法和相衬法的推导方法不尽相同,有的是用一般的衍射和干涉原理来论证,有的是用频谱分析和空间滤波的方法来推演,但是这两种推导在本质上是统一的,得到的结论也是完全一致的. 本文针对后一种推导方法指出上述文献的错误实质.

在上述文献中,考虑到 $\phi(x, y) \ll 1$ 的弱位相情况,都是以 $\exp i\phi(x, y)$ 的级数表达式的前两项来近似 $\exp i\phi(x, y)$ 的,即认为

$$i(x, y) = \exp i\phi(x, y) = 1 + i\phi(x, y). \quad (18)$$

因此,对于 $\phi(x, y)$ 足够小的情况,毋庸置疑,上述近似具有足够的精度,因而是完全可以接受的. 由此近似出发而得到的 $i(x, y)$ 的傅里叶变换的近似式

$$T(u, v) = \delta(u, v) + i\Phi(u, v) \quad (19)$$

所产生的误差当然也是完全可以接受的 [其中

$\Phi(u, v)$ 是 $\phi(x, y)$ 的傅里叶变换]. 问题在于对零频分布的臆断,即认为 $i(x, y)$ 的零频成分仅是(19)式中的第一项,即认为

$$T_0(u, v) = \delta(u, v). \quad (20)$$

正是由于这一主观臆断,导致了最终结论上的错误.

现在我们分别定性和定量地分析一下(20)式的错误. 该式与(9)式的区别仅在于 $\delta(u, v)$ 的系数的不同,前者为 1, 后者为 $(A_0 \exp i\phi_0)$. 从干涉观点出发定性地看,零频成分可以认为是直射光(非衍射光)在焦点处相干叠加造成的. 显然,由于位相分布函数的调制,通过位相物体各点的直射光在焦点处并非同相叠加,因而 $\delta(u, v)$ 的各数必然小于 1. 定量地看,由(19)式可知, $i\Phi(u, v)$ 对零级频谱一般亦有贡献,即 $i\Phi(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 点具有非零值. 例如,当 $\phi(x, y) = m(1 + \cos 2\pi u_0 x)$ ($m \ll 1$) 时,可得 $i\Phi(u, v) = im\delta(u, v) + i(m/2)[\delta(u - u_0, v) + \delta(u + u_0, v)]$, 其中 $im\delta(u, v)$ 即为 $i\Phi(u, v)$ 对零级频谱的贡献. 所以,若将 $\Phi(u, v)$ 写成

$$\Phi(u, v) = \Phi_0\delta(u, v) + \Phi_1(u, v), \quad (21)$$

其中首、末两项分别代表 $\phi(x, y)$ 的零频分布和零频以外的频谱成分,则(19)式变成

$$T(u, v) = (1 + i\Phi_0)\delta(u, v) + i\Phi_1(u, v). \quad (22)$$

与(9)式比较可得,此时 $A_0 = (1 + \Phi_0^2)^{1/2}$, $\phi = \tan^{-1}\Phi_0$. 容易证明,此结果与(7), (8)两式计算的结果完全相符. 由此也间接证明了(19)式的推断的错误.

需要指出的是,在 $\phi(x, y) \ll 1$ 的情况下,实际上 Φ_0 也很小,因而有 $A_0 \approx 1$, $\phi_0 \ll 1$, 但是我们在推导中只能用 1 来近似 A_0 , 却不可用零来近似 ϕ_0 , 其原因在下面的推导中可以清楚地看出.

由(20)式出发,文献 [1]—[11] 理所当然地认为暗场法和相衬法对零级频谱的改变即是(19)式中第一项的改变,于是得到暗场法和相衬法两种情况下输出光场的复振幅分布分别为

$$i'(x, y) = i\phi(x, y) \quad (\text{暗场法}), \quad (23)$$

$$i'(x, y) = \pm i + i\phi(x, y) \quad (\text{相衬法}), \quad (24)$$

其强度分布分别为

$$I(x, y) = [\phi(x, y)]^2 \quad (\text{暗场法}), \quad (25)$$

$$I(x, y) = 1 \pm 2\phi(x, y) \quad (\text{相衬法}). \quad (26)$$

至此,我们已经清楚地看出,上述文献之所以得出与(16)式和(17)式截然不同的结果,完全是由于忽略了 ϕ_0 所致。而实际上,尽管 ϕ_0 很小,但因 ϕ_0 是 ϕ 的平均值,因而相对于同样很小的 ϕ , ϕ_0 是不容忽略的。

5. (25), (26)式分别与(16), (17)式的区别

以上区别可用一计算实例来说明。设有一正弦位相光栅,其复振幅透过率为

$$t(x, y) = \exp im(1 + \cos 2\pi u_0 x). \quad (27)$$

对于弱位相情况, $m \ll 1$ 。按照(25)式和(26)式,此时输出光场强度为

$$I(x, y) = m^2(1 + \cos 2\pi u_0 x)^2 \quad (\text{暗场法}) \quad (28)$$

和

$$I(x, y) = 1 \pm 2m(1 + \cos 2\pi u_0 x) \quad (\text{相衬法}), \quad (29)$$

而由(16)和(17)得到的输出光场强度分布为

$$I(x, y) = (m^2/2)(1 + \cos 4\pi u_0 x) \quad (\text{暗场法}) \quad (30)$$

和

$$I(x, y) = 1 \pm 2m \cos 2\pi u_0 x \quad (\text{相衬法}). \quad (31)$$

由此可见,对于暗场法,由(30)式表示的光强分布的空间频率比由(28)式表示的光强分布的空间频率提高了一倍,说明此时暗场法并不能正确地反映位相物体本来的位相分布情况。对于相衬法,当使零级频谱分别产生 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 相移[分别对应于(29)式中的正号和负号]时,由(29)式可知,相对于平均背景光强而言,分别得到所谓亮相衬和暗相衬,其中平均背景光强(即无位相物体存在时输出光场的光强)分布,在我们讨论的情况下,其值为1。

二、实验结果及分析

实验所用的两种位相物体分别是正弦型和矩形的位相光栅。两者都是用天津 I 型全息干物理

板制作的振幅光栅经漂白处理,其空间频率均为 5/mm,漂白后最大光学厚度与最小光学厚度处的位相变化小于 0.05。实验所用的光学系统为放大率为 1 的 4f 系统,如图 1 所示。

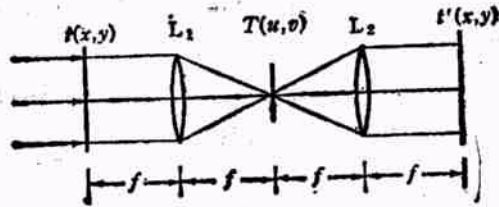


图 1

图 2(a) 为正弦振幅光栅未经任何滤波处理,经图 1 所示光学系统所成的象;图 2(b) 为该光栅经漂白处理得到的正弦位相光栅,经阻挡零频处理后经同一系统所成的象。按照文献

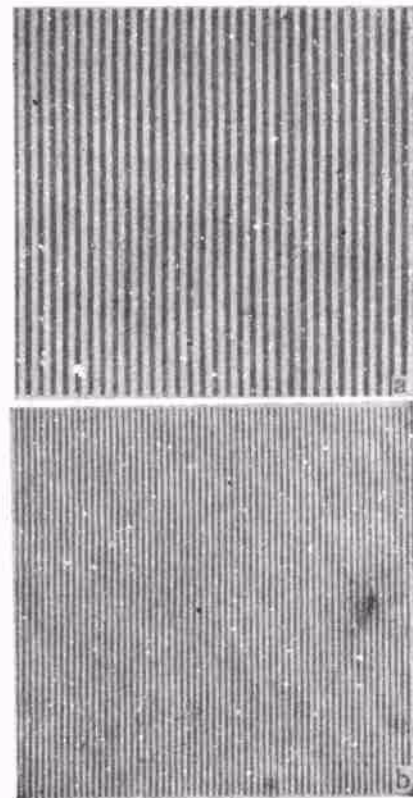


图 2

[1]~[11]的预言,两者空间频率应相等,但是

实验结果证明,后者的空间频率是前者的二倍。这种结果与(16)式的计算完全相符。

图3是矩形振幅光栅未经任何滤波处理经图1所示光学系统所成的象;该光栅经漂白处理和阻挡零频处理后,再经图1所示光学系统成的象,按照文献[1]~[11]的预言,应因矩形位相光栅的位相变化呈现相应的亮暗交替的分布,但实际上得到的是一片均匀的照明,这种结果与(16)式的计算完全相符。

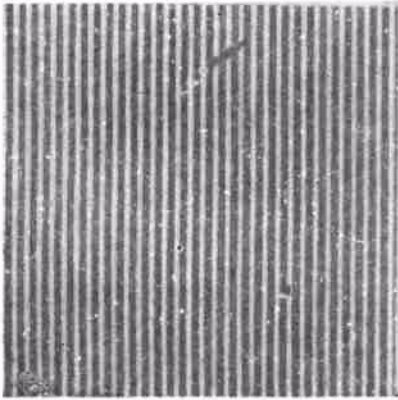


图 3

三、讨 论

1. 本文的讨论是在无限大二维位相物体的假设基础上展开的,实际物体都是有限大小的,因而在讨论过程中也可采用如矩孔函数、圆域函数等边框函数对所讨论的物体进行限制,显而易见,由此得出的结论与无限大假设情况下的结论不应有实质性的区别。

2. 本文采用的位相分布函数是这样定义的:由于在某种意义上,位相只有相对的意义,因此原则上可选定任意的位相值作为参考点,以位相物体上各点相对位相参考点的位相差作为位相物体的位相分布函数。这样定义的位相

分布函数虽然具有相当的任意性,但所定义的位相分布函数与其平均值之差值($\phi - \phi_0$)却是恒定的,不因 ϕ 的定义不同而变化。因此,无论位相参考点如何选取,都不会影响本文的结论。对于位相起伏较小的弱位相物体,为了使位相分布函数的定义能反映这种物体的特点,可将位相分布函数定义为位相物体上各点光学厚度与最小光学厚度之差引起的位相差。在很多文献中,虽然未明确给出位相分布函数的定义,但实际采用的正是上述定义,实际上就是以位相物体上最小光学厚度处的位相(其值可任意假定)为位相参考点的。也可取平均光学厚度对应的位相(其值也需任意假定)作为位相参考点,而将位相分布函数定义为位相物体上各点的光学厚度与平均光学厚度之差引起的位相差。显然,如果以这样定义的位相分布函数代替文献[1]~[11]中的位相分布函数,则结论将与本文的结论完全一致。并且,如果这样定义位相分布函数,则暗场法和相衬法中等强度区即为等位相区。这是等位相编码技术的基础。

本文的工作曾与于晓江、何宗平等同志进行过有益的讨论,在此表示感谢。

- [1] F.Zernike, *Z. Tech. Phys.*, **16**(1935), 454.
- [2] F.Zernike, *Phys. Z.*, **36** (1935), 848.
- [3] M. 玻恩, E. 沃耳夫著,杨荫荪译,光学原理,科学出版社,(1978), 555.
- [4] 赵凯华、钟锡华,光学(下册),北京大学出版社,(1984), 77.
- [5] 母国光、战元令,光学,人民教育出版社,(1978),394.
- [6] 梁铨庭,物理光学,机械工业出版社,(1980),165.
- [7] J. W. 顾德门著,詹达三译,傅里叶光学导论,科学出版社,(1976),165.
- [8] M. 弗朗松著,北京工业学院光学教研室译,光学——象的形成和处理,科学出版社,(1979),87.
- [9] 黄婉云,傅里叶光学教程,北京师范大学出版社,(1985), 249.
- [10] 于美文,光学全息及信息处理,国防工业出版社,(1985), 252.
- [11] 钟锡华、吴仲英,物理实验,**2**(1982),151.