光学矩阵运算(III)

陈岩松 张东生　　朱伟利
(中国科学院物理研究所)　　(中央民族学院物理系)

我们在前两篇文章中，介绍了几种典型的光学矩阵运算系统．在这些系统中，由于矩阵或矢量的元素值都是用强度的模拟量表示的，所以存在如下两方面的问题：(1) 由于光源强度和系统对强度线性响应范围的限制，它不能解决大数值的运算问题；(2) 使用强度模拟量表示数值的运算系统，无论怎样减小由光源、调制器和探测器等造成的误差，计算的精确度最大也只达到 10 bit[1]．而要想使光学运算系统可以和电子数字运算系统相比拟，运算精确度至少要达到 16 bit[2] 或更高．因此，为解决大数值计算问题，更主要是解决计算的精确度问题，人们已在余数编码[3]、二进制编码[2,4,5]的表示方法上进行了尝试，并设计了多种运算系统．其中，使用二进制编码的系统使得计算精确度提高到 32 bit[6]．这里值得注意的是，Whitehouse 和 Speiser 提出的通过卷积运算实现两个二进制数的相乘技术[7]．这种技术后来由 Psaltis 等人[8] 从光学角度上加以描述．此后，又由 Guilfoyle[2] 和 Casasent[5] 利用声光调制器实现了此技术．另外，Athale 在外乘矩阵运算基础上给出了二元编码矩阵运算的外乘方法[4]．为解决二元编码中的实数问题，Bocker 等人给出了二的补数编码[1,9-11]的光学系统，这种方法不必增加由实数的正数表示而引起的额外运算次数．

一、二元编码的 Guilfoyle 系统

1. 数数相乘的 Guilfoyle 卷积系统[2]

Guilfoyle 的卷积系统见图 1．其中 AO_1、AO_2 是声光调制器，L 是傅里叶变换透镜，探测器 D 与模拟-数字转换器 A/D 相连，然后再连接到移动累加器上．

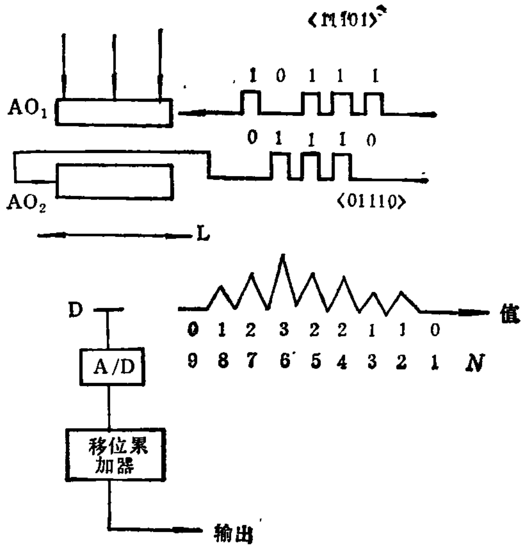

图 1　数数相乘卷积系统[2]

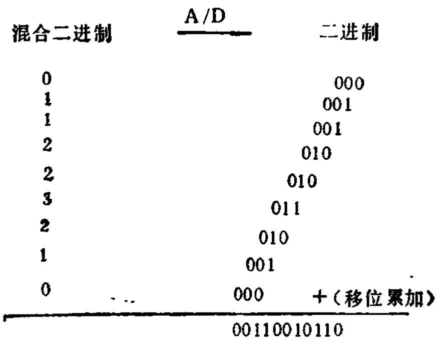

图 2　混合二进制向二进制转换[2]

下面以 29×14＝406 为例说明数数相乘的运算过程．29 和 14 化为二进制形式是 11101 和 1110，它们按位依次以两个声光调制器 AO_1 和 AO_2 相向输入．用准直光照射 AO_1，在傅里叶透镜 L 的焦平面上放置一探测器 D，它只接收一级衍射光，则在 D 上得到如图 1 所示的时间脉冲列 {0,1,2,3,2,2,1,1,0}．这个混合二进制数列再经过模拟-数字转换器 A/D 和移

位累加器转变为二进制数，完成整个运算．从混合二进制向二进制的转换过程可参考图2．最后输出的110010110，是406的二进制形式．

2. 矩阵-矢量相乘的啮合系统[2]

矩阵-矢量相乘的啮合系统如图3所示．其中包括一个光源S，三个柱透镜CL，四个球面凸透镜SL，N个探测器组成的列阵D，两个互相垂直放置的多极声光调制器AO_1和AO_2．下面以简单的矩阵-矢量相乘$\begin{pmatrix}1 & 6\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$为例说明此系统的操作原理．

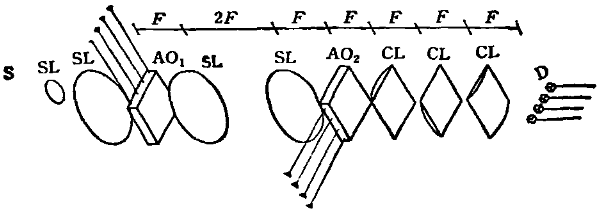

图3　二元编码矩阵矢量相乘系统[2]（前两个SL组成准直系统，第二个CL焦距为$2F$，其余为F，S为光源，D为探测器列阵）

把矩阵和矢量元素分别以二进制形式从两个声光调制器中以图4所示的啮合形式输入，矢量的输入速度较慢（本例中应等于矩阵输入速度的1/3）．一束均匀的平行光照射在第一个多极声光调制器AO_1上，AO_1经透镜成象于AO_2，从AO_2出射的光沿水平方向成象在探测器上，而沿垂直方向会聚在同一探测器上．对垂直方向而言，这与前面提到的数数相乘系统完全等同．一个探测器接收到的信号经模拟-数字转换后进入移动累加器，得到二进制形式的输出元素．利用水平方向排列的多个探测器，即可实现所需的二进制矩阵-矢量相乘操作．

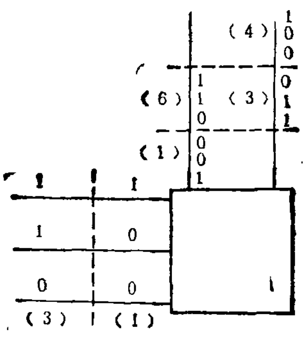

图4　矩阵和矢量的输入方式[2]

二、二元编码的 Casasent 卷积系统[5]

1. 数数相乘的卷积系统[5]

图5是Casasent给出的进行数数相乘的卷积系统．从点光源P_1出射的光经准直后均匀照射在多极声光调制器AO上，柱透镜L_1在竖直方向上把平行光会聚到P_3平面，而柱透镜L_2的作用是使P_2平面在水平方向上成象在P_3平面，电耦合移位探测器置于P_3上．

为说明该系统的运算操作原理，不妨以217与75相乘为例．首先把数转化成二进制形式：

$75 \longrightarrow S_1 = 1001011$；$217 \longrightarrow S_2 = 11011001$

S_1和S_2相乘过程如下：

把S_1的各位数以时间脉冲形式从P_1依次输入（脉冲持续时间为T_1），S_2的各位数从声光调制器的各极并行输入，使记录仪的移位与P_1的光脉冲同步，得到的数值依次为

$0-T_1$								1	1	0	1	1	0	0	1
T_1-2T_1							1	1	0	1	1	0	0	1	
$2T_1-3T_1$						0	0	0	0	0	0	0	0		
$3T_1-4T_1$					1	1	0	1	1	0	0	1			
$4T_1-5T_1$				0	0	0	0	0	0	0	0				
$5T_1-6T_1$			0	0	0	0	0	0	0	0					
$6T_1-7T_1$	+	1	1	0	1	1	0	0	1						
		1	1	0	2	2	1	3	3	1	2	2	0	1	1

移位累加的结果得到混合二进制形式．再经过模拟-数字转换，最后以二进制形式输出．上述运算过程实际上是进行了两个分立函数{1101101}和{01001011}的卷积运算操作，因而称该系统为卷积运算系统．

2. 矢量内乘的 Casasent 系统[5]

图6给出了两个三维矢量的内乘系统，此系统所用的仪器与装置和图5基本相同，不同的是，此系统有三组数数相乘运算同时独立进行，并且三组相乘的结果在L_1作用下叠加在一起，得到混合二进制形式的结果，然后经模拟-

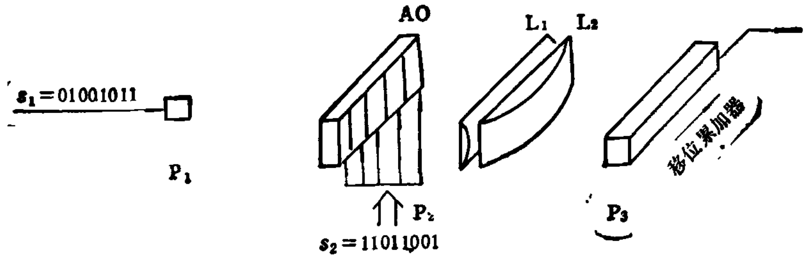

图5 数数相乘示意图[3]

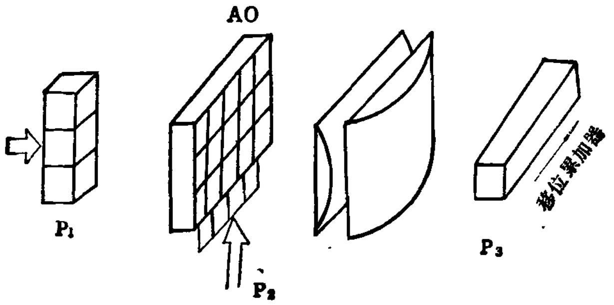

图6 二元编码矢量内乘系统[3]

数字转换器进一步转换成二进制形式，作为最后的结果输出.

三、二元编码的外乘算法[4]

1. 数数相乘的外乘方法

首先考虑两个三维矢量 $\boldsymbol{A}=(a_2, a_1, a_0)$, $\boldsymbol{B}=(b_2, b_1, b_0)$ 的外乘:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}(b_2b_1b_0)=\begin{bmatrix}a_2b_2 & a_2b_1 & a_2b_0\\ a_1b_2 & a_1b_1 & a_1b_0\\ a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

把(1)式中斜线所连的元素相加，得到含有五个元素的行矢量

$$\boldsymbol{C}'=[(a_2b_2),(a_1b_2+a_2b_1),(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0),(a_0b_1+a_1b_0),(a_0b_0)]. \tag{2}$$

不难看出 $\boldsymbol{C}'$ 正是分立函数 $\{a_2\ a_1\ a_0\}$ 与 $\{b_2\ b_1\ b_0\}$ 的卷积. 如果把二进制数的每一位数看成行矢量的一个元素，则一个二进制数可等价于一个行矢量. 因此用上述方法进行的卷积运算也就实现了两个二进制数的相乘运算.

由于进行斜线元素相加操作较为麻烦，所以可将上述实现卷积运算的方法用矢量-矩阵相乘取代. 先把矢量 $\boldsymbol{B}$ 写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0\end{bmatrix}, \tag{3}$$

然后 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 进行相乘,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(a_2\ a_1\ a_0)\begin{bmatrix}b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0\end{bmatrix}=[(a_2b_2),(a_2b_1+a_1b_2),(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2),(a_1b_0+a_0b_1),(a_0b_0)]. \tag{4}$$

这样，两个二进制的数相乘就转化成了矢量与矩阵的相乘.

2. 二进制矩阵-矩阵相乘的外乘方法

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 2×2 阶矩阵,其矩阵元均由两位二进制数组成. 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别表示成 4×2 和 2×4 的二进制矩阵形式:

$$
\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} a_{11}^{1} & a_{12}^{1} \\ a_{11}^{0} & a_{12}^{0} \\ a_{21}^{1} & a_{22}^{1} \\ a_{21}^{0} & a_{22}^{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix} b_{11}^{1} & b_{11}^{0} & b_{12}^{1} & b_{12}^{0} \\ b_{21}^{1} & b_{21}^{0} & b_{22}^{1} & b_{22}^{0} \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

其中下角标表示元素序数，上角标表示二进制数的位的序数。

用外乘法进行 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 的相乘运算：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_1'=(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}')_1&=\begin{bmatrix} a_{11}^{1} \\ a_{11}^{0} \\ a_{21}^{1} \\ a_{21}^{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}^{1} & b_{11}^{0} & b_{12}^{1} & b_{12}^{0} \end{bmatrix} \\
&=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11}^{1}b_{11}^{1} & a_{11}^{1}b_{11}^{0} & a_{11}^{1}b_{12}^{1} & a_{11}^{1}b_{12}^{0} \\ a_{11}^{0}b_{11}^{1} & a_{11}^{0}b_{11}^{0} & a_{11}^{0}b_{12}^{1} & a_{11}^{0}b_{12}^{0} \\ \hdashline a_{21}^{1}b_{11}^{1} & a_{21}^{1}b_{11}^{0} & a_{21}^{1}b_{12}^{1} & a_{21}^{1}b_{12}^{0} \\ a_{21}^{0}b_{11}^{1} & a_{21}^{0}b_{11}^{0} & a_{21}^{0}b_{12}^{1} & a_{21}^{0}b_{12}^{0} \end{array}\right],
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_2'=(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}')_2&=\begin{bmatrix} a_{12}^{1} \\ a_{12}^{0} \\ a_{22}^{1} \\ a_{22}^{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{21}^{1} & b_{21}^{0} & b_{22}^{1} & b_{22}^{0} \end{bmatrix} \\
&=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{12}^{1}b_{21}^{1} & a_{12}^{1}b_{21}^{0} & a_{12}^{1}b_{22}^{1} & a_{12}^{1}b_{22}^{0} \\ a_{12}^{0}b_{21}^{1} & a_{12}^{0}b_{21}^{0} & a_{12}^{0}b_{22}^{1} & a_{12}^{0}b_{22}^{0} \\ \hdashline a_{22}^{1}b_{21}^{1} & a_{22}^{1}b_{21}^{0} & a_{22}^{1}b_{22}^{1} & a_{22}^{1}b_{22}^{0} \\ a_{22}^{0}b_{21}^{1} & a_{22}^{0}b_{21}^{0} & a_{22}^{0}b_{22}^{1} & a_{22}^{0}b_{22}^{0} \end{array}\right].
\end{aligned} \tag{7}
$$

把 (6),(7) 式中的子矩阵(虚线隔开的部分)的斜线所连元素相加，则 (6) 和 (7) 式变成混合二进制形式的两个 2×6 矩阵，再把这两个矩阵相加，最后得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 乘积 $\boldsymbol{C}$ 的混合二进制形式：

$$
\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{11}^{2} & C_{11}^{1} & C_{11}^{0} & C_{12}^{2} & C_{12}^{1} & C_{12}^{0} \\ C_{21}^{2} & C_{21}^{1} & C_{21}^{0} & C_{22}^{2} & C_{22}^{1} & C_{22}^{0} \end{bmatrix}.
$$

四、二的补数编码[1,9-11]

1. 数的表示及运算方法

二的补数编码主要用于解决二进制编码中的实数运算问题. 以 $S_1=+13.35$ 和 $S_2=-3.25$ 相乘为例来说明用二的补数编码进行数数相乘的运算原理。

先把两个十进制数转化成二进制数：

$$S_1=+1101.011,\quad S_2=-11.01.$$

按照补码原则，对于正数可在前面加一位零；对于负数可在前面加一位数 1，其它各位取其补值(即把 1 变 0，0 变 1)。于是，S_1，S_2 可分别表示为

$$S_1=01101.011,\quad S_2=100.11.$$

进行 S_1 和 S_2 的相乘运算时，要求相乘数的位数与积的位数相等. $13.375\times(-3.25)=-43.46785$，它的补数编码表示为1010100.10001，共有十二位数，因此在正数 S_1 左边增加四位零，在负数 S_2 左边增加七位 1，补足十二位，写成如下形式：

$$S_1=000001101.011,\quad S_2=1111111100.11.$$

将这两个数相乘，结果得到混合二进制形式，仅保留右边的 12 位数(见图 7)，然后再转化成二进制形式的数，并舍去 12 位以前的数，最后得到 1010100.1001，这正是-43.46785 的二的补数编码形式。S_1，S_2 的相乘过程如下：

0	0 0 0 0 1 1 0 1. 0 1 1	S_1
1	1 1 1 1 1 1 1 0 0. 1 1	S_2
0	0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1	
0	0 0 0 1 1 0 1 0 1 1	
0	1 1 0 1 0 1 1	
1	1 0 1 0 1 1	
1	0 1 0 1 1	
0	1 0 1 1	
1	0 1 1	
0	1 1	
1	1	
1		
5	5 4 3 4 4 3. 2 1 1 2 1	——混合二进制
1	0 1 0 1 0 0. 1 0 0 0 1	——二进制

2. 二的补码矩阵-矩阵相乘的啮合系统[9]

Bocker 利用双光路矩阵-矩阵相乘的电光调制系统进行二的补数编码的矩阵-矩阵运算。

以下述矩阵-矩阵相乘为例，说明此运算过程：

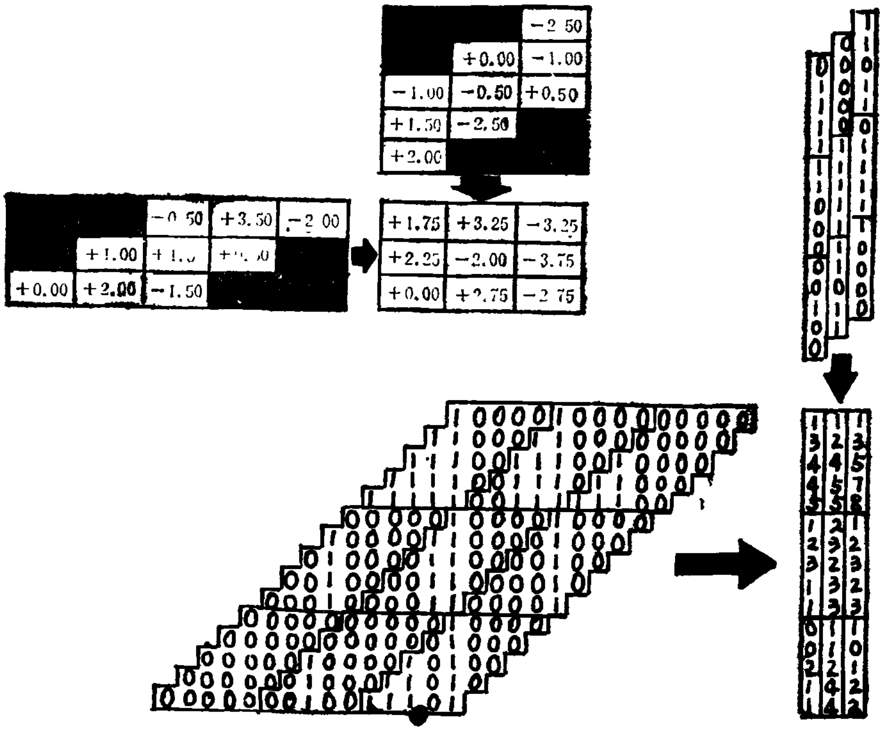

图 7　矩阵的啮合输入形式[9]

$$\begin{pmatrix}-2.00 & +3.50 & -0.50\\ +0.50 & +1.50 & +1.00\\ -1.50 & +2.00 & +0.00\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+2.00 & -2.50 & +0.50\\ +1.50 & -0.50 & -1.00\\ -1.00 & +0.00 & -2.50\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}+1.75 & +3.25 & -3.25\\ +2.25 & -2.00 & -3.75\\ +0.00 & +2.75 & -2.75\end{pmatrix} \qquad (8)$$

首先把第一个矩阵的每个矩阵元表示成啮合矩阵形式，啮合矩阵的最下一行是这个元素的二的补码形式，而其上各行则遵照同一列元素都相等的原则填充。例如，把－2.00 表示成

$$\begin{matrix} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \end{matrix}$$

然后，把第二个矩阵的每个元素的补码表示按列排开，例如－2.5 表示成

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

图 7 给出了矩阵运算的啮合输入形式和输出的混合二进制形式。为便于理解，图 7 中左上角给出了以十进制表示的啮合输入和输出形式。

[1] R. P. Bocker et al., *Appl. Opt.*, **22**(1983), 2019.
[2] P. S. Guilfoyle, *Opt. Eng*, **23**(1984), 21.
[3] A. Huang et al., *Appl. Opt.*, **18**(1979), 149.
[4] R. A. Athale et al., *Appl. Opt*, **22**(1983), 368.
[5] D Casasent et al., *Appl. Opt.*, **24**(1985), 1477.
[6] W. T. Rhodes et al., *Proc. IEEE*, **72**(1984), 820.
[7] H J. Whitehouse and J. M. Speiser, Aspects of Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, G Tacconi, Ed., Reidel, Dordrecht, (1977).
[8] D. Psaltis et al., *Proc. SPIE*, **232**(1980), 151.
[9] R. P. Bocker, *Opt. Eng.*, **23**(1984), 26.
[10] A. P. Goutzoulis, *Appl. Opt.*, 23(1984), 4095.
[11] B. K. Taylor et al., *Appl. Opt.*, **25**(1986), 956.