关于静电场中场强与等位面曲率的关系

周 邦 寅

(西北电讯工程学院)

关于静电场中任一等位面上电场强度的数值与等位面曲率的关系，已有若干学者进行了深入的讨论，得出了有益的结论[1,2]．但所得的关系是否可以用来计算电场强度，使之显含相应的等位面曲率[3]，却是值得探讨的．本文对此提出一点看法．

一、电场沿电力线变率的微分方程

文献［2］引用高斯通量定理导出了静电场中等位面的曲率与场强沿电力线方向变率之间的关系，在此我们从静电场中贮能的概念重新导出此式．

在静电场中任取一电力线管构成侧面，以等位面构成其上下底的微分体积元，其中电场可等效于一平板电容器，如图 1 所示．一方面

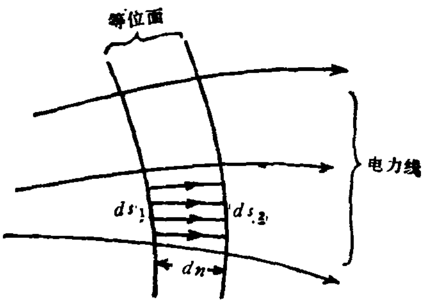

图 1

可将其中所贮的电能表示为

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 ds_1 dn,$$

式中E表示电场的大小，ε_0是自由空间的介电常数；另一方面，又可将它表示为电位差与受力电荷之积，即

$$\frac{1}{2}(-d\phi)Q,$$

其中ϕ表示电位，Q是 ds_2 上的电荷，根据电荷面密度表示式它又可以记为

$$\varepsilon_0(E+dE)ds_2.$$

于是我们得到下列等式：

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 ds_1 dn = -\frac{1}{2}d\phi\varepsilon_0(E+dE)ds_2. \qquad (1)$$

将此微分距离 dn 上的曲面元与电力线的关系看作曲面与法线的关系，即可求得 ds_1 和 ds_2 的关系如下[4]：

$$ds_2 = \frac{(\rho_1+dn)(\rho_2+dn)}{\rho_1\rho_2}ds_1, \qquad (2)$$

其中 ρ_1 与 ρ_2 是等位面在曲面元处的两个主曲率半径(此处已认为凸曲面的外法向为正时，ρ_1与 ρ_2为正)．把(2)式代入(1)式，舍去所有的二阶小量，计及 $E=-(d\phi/dn)$，就可得到下面的关系式：

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dn} = -\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right). \qquad (3)$$

引用微分几何中表示平均曲率的记号

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right),$$

则(3)式可写为

$$\frac{dE}{dn}+2HE=0. \qquad (4)$$

这就是等位面上电场强度数值沿电力线方向的变化规律．它是普遍成立的，不限于只有孤立导体的静电场．上式中的 E 是电场强度的数值，在电场中任一点的电场强度的方向总是与该点的等位面垂直．

二、关于(4)式的求解问题

看起来(4)式在原则上是可以用来求解电场的，因为电力线是空间的曲线，如果我们已知它的以弧长为参数的参数方程，则可由 $H=H(x, y, z)$ 得到

$$H=H[x(n), y(n), z(n)],$$

这里 n 表示弧长参数．然后把它代入(4)式，沿电力线积分即可求解．但是，实际上这是做不到的，因为在得到电力线的参数方程之前必须先知道电力线的空间分布，而要得到电力线的分布又必须知道电场强度的函数．如果电场强度已知，那么就没有必要再用(4)式去计算电场了．

事实上，如果不把(4)式作为计算关系，而作为联系静电场中的物理量和几何量的关系式却是有意义的．我们注意到 $E=-d\phi/dn$，即 $d\phi=-Edn$，至少可以看出它具有下列三个方面的意义．

(1) 它表明，场中任一点电场的数值与该点所在等位面的平均曲率成反比，与电场沿电力线的变率成正比，即

$$E=-\frac{1}{2H}\frac{dE}{dn}. \tag{5}$$

(2) 它表明，场中任一点电场的数值与该点所在等位面的平均曲率成反比，与等位面沿电力线变率的二阶导数成正比，即

$$E=\frac{1}{2H}\frac{d^2\phi}{dn^2}. \tag{6}$$

(3) 它表明，场中任一点场强沿电力线的变化与该点电位的变化成正比，而此比例数即为该点等位面的平均曲率，即

$$dE=2Hd\phi. \tag{7}$$

由此可见，电场大小与等位面的曲率之间并不存在一种简单的函数关系．试用一个最简单的电荷系为例来讨论．如图2所示，有两个相距为 $2d$ 的无限长均匀带电的线电荷(线电荷密度分别为 $\pm\lambda$)，垂直于纸面放置．它的等位面为无限长不同心的圆筒，在 xy 平面上作为二

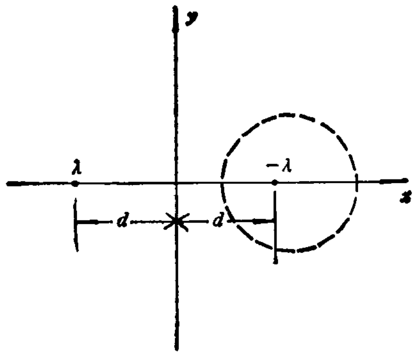

图2

维问题，它成为等位圆，其方程为[5]

$$\left[x-\frac{d(1-K)}{K-1}\right]^2+y^2=\frac{4d^2K}{(1-K)^2}, \tag{8}$$

其中 d 为线电荷与坐标原点之距离，K 表示等位线族的常数，且由下式表示：

$$K=e^{-4\pi\varepsilon_0\phi/\lambda}, \tag{9}$$

这里 ϕ 为相应的电位．

图2的二维电荷系，其电场强度是容易计算的．x 轴也是它的一根电力线，因此在 x 轴上的电场 x 分量就相当于(4)—(7)式中的 E，其算式为

$$E_x|_{y=0}=\frac{-\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{d}{x^2-d^2}. \tag{10}$$

对某一等位面 ϕ 由(9)式可求得 λ 的表示式，然后代入(10)式，得到

$$E_x|_{y=0}=\frac{4d}{(x^2-d^2)}\frac{\phi}{\ln K}. \tag{11}$$

根据(8)式中所显示的等位圆半径，可由下列方程求解 K：

$$K^2-2(1+2d^2H^2)K+1=0. \tag{12}$$

由此可见，在这样一种最简单的电荷系中，即使在一个特殊点上，等位面的平均曲率 H 及其场强也不存在着一种简单的关系．

因而一般说来，如已知电位函数 $\phi=\phi(x, y, z)$，要由微分几何的公式在 ϕ 的表示式中解出 $z=F(x, y, \phi)$，才能计算等位面的平均曲率 H，由此得到 $H=H(x, y, \phi)$．也就是说，在一般关系中，无法消除 H 中的 ϕ 参数．如果能够已知 ϕ，就可直接用 $E=-d\phi/dn$ 来计算(4)式中的 E，而不必用(4)式来计算．也就

是说，隐含在 ϕ 中的曲率关系在一般情况下是无法分离出显函数表示式的．在这里出现了待求量应该是已知量，于是产生了逻辑上的悖论．

对孤立导体，导体上的总电量与电位的一般关系式如果能化为显函数关系，同时又能独立地用微分几何方法算出此导体面的曲率，就可以用对比方法来求得某些类型的导体的表面电荷分布和表面的几何曲率之间的关系．这类工作已有人做过，发现面电荷密度不限于只和平均曲率 H 有关，在某些情况下，还只和曲面的总曲率（高斯曲率）有关[1,5]．

三、近似计算问题

既然在一般情况下，不能用（4）式计算电场，那么是否可以做近似计算呢？这是一个可以尝试的问题．一个可以设想的方案是将（4）式中的 $H(n)$ 展开为泰勒级数，即把它从一给定的等位面上的某点沿电力线按距离展开，可得

$$H(n) = H(0) + nH'(0) + n^2H''(0)/2! + \cdots. \tag{13}$$

这样做仍然会遇到前面所提出的困难．因为事先不知道 $H = H(n)$，无法求其导数，故在(13)式中第二项以后就不能计算． 如果我们只取(13)式中的第一项，可立即由(4)式得到

$$E = E_0 e^{-2H(0)n}. \tag{14}$$

它表示在距给定的等位面上沿法线方向的一微小距离上的电场强度数值．而 E_0 是这个已知的等位面上的场强．在这里 $H(0)=$ 常数，表明我们用了一个给定曲率的球面在该点去逼近所给的等位面．实际上，即便是对半径为 r_0 的孤立带电导体球面，(14)式也是极为粗糙的近似．因为，我们知道在此球面上，

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^2},$$

由(14)式可得此导体球外邻近一点的场强在计及 $H(0) = \frac{1}{r_0}$ 时为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} e^{-\frac{2}{r_0}n}. \tag{15}$$

然而实际上此电场的精确表示式应该是

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r_0+n)^2}. \tag{16}$$

两者的差异是十分明显的．只有把（16）式按 $r_0^2\left(1+\frac{n}{r_0}\right)^{-2}$ 展开，并只取头两项，同时把(15)式按指数函数展开，也只取头两项，这时，两者才等于下式：

$$E \doteq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\left(1-\frac{2n}{r_0}\right). \tag{17}$$

也就是说，要在(14)式中舍弃一切更高阶项才能得到和精确解的近似式相当的算式．这是可以理解的，因为对相同的近似程度，在(14)式中展开式的项数取得越多，表明 n 越大． 在孤立导体球的情形下，可以用(4)式算出 E 的精确表示式，因为 H 是已知的，等位面的形状和电力线也是已知的．但这样做，实际上仍等于用已知量去计算已知量．可见，即使我们避开了前述逻辑上的悖论，而使用近似计算，在最简单的情形下也有很大的局限性．如果再由(14)式进行其它运算（例如积分），则其精确度将更有疑问．此外，因为 E 不精确，用它结合 $\sigma = \varepsilon_0 E_0$ 来获得一般导体表面电荷密度的部分显含曲率的关系式，自然也是不精确的．

人们早已熟知的静电场中沿电力线的电场数值变率和等位面曲率的关系，不是一个可以用来求解电场强度数值的微分方程．用它来求解电场或者导致悖论，或者只能在一点的邻域处获得极为粗糙的近似．何况，即使采用这种粗糙的近似，仍然不能从 E 或 ϕ 的变化中把隐含的曲率化为显函数形式，以求得任一导体的面电荷密度与其面曲率的纯几何关系．

[1] 戴显熹、郑永全，复旦学报（自然版），23(1984)，335.
[2] 王国权，物理通报，No. 3(1966)，105.
[3] 罗恩泽，物理通报，No. 3(1984)，11; Luo Enze, *J. Phys. D*, 19(1986)，1—6.
[4] M. Born and E. Wolf 著，杨葭荪等译校，光学原理（上册），科学出版社，(1978)，158.
[5] M. Zahn, Electromagnetic Field Theory a Problem Solving Approach, Jokn Wiley, (1979), 94—95.