物理量和单位讲座

第五讲 无量纲量

管楚涂

(中国科学院数学研究所)

一、物理量、测量单位和量纲

在研究物理现象时，要引进一系列的物理量，例如能量、速度、应力、粘度、热量等. 用它们描述所研究的现象各方面的特征，而这些量本身又是可用数值及其单位给出和确定的. 我们把能定性地表征现象、物体或物质某一方面的特征，而且能够进行定量测量的量称为物理量. “可测”是物理量必须具备的性质.

为了定量地描述所研究的现象，就必须将表征现象特征的物理量和数值建立对应关系. 这种对应关系是通过采用测量单位(或尺度)来建立的. 也就是说，我们通过采用一定的测量单位可以将每个物理量和数值建立一个对应关系. 显然，一个给定的物理量所对应的数值一般地说不是唯一的. 这个数值通常是依赖于所采用的尺度(测量单位). 但如果取定了测量单位，则每个物理量和数之间就建立了一个一对一的关系. 例如，我们可以采用不同的测量单位(如米和尺)来测量一个物体的长度. 显然，同一长度在这两种测量单位中对应的数值是不同的. 一个人的身高可以和不同的数值对应：1.8m 或 5.4 尺. 但如果取定了测量单位 m，则一个人的身高就和唯一的一个数建立了对应关系.

各种物理量之间都是以一定的关系式互相联系着的，因此如果将其中某些取作基本量并规定它们的测量单位，则所有其余各量的测量单位将以确定的形式通过基本量的测量单位来表示. 通常我们把基本量所采用的测量单位称为基本测量单位，而其余的量所采用测量单位称为导出测量单位. 在物理学研究中，通常取长度、时间、质量、电流强度、温度、发光强度、物质的量的测量单位为基本测量单位，其它的物理量，例如力、能量、速度等的测量单位就由它们的定义导出.

当描述某一特定体系时，常常要用到量纲这一概念. 量纲是一个用以确定某一特定体系的本质或特点的物理变量. 某一个物理量的量纲，是指这个量的物理性质，而不是指它的大小. 它只用来定性地描述物理量，特别是定性地给出导出量与基本量之间的关系. 因此在不考虑数字因数时，表示一个量是由哪些基本量导出的以及如何导出的式子，称为此量的量纲. 量纲可用符号写成公式的形式. 显然，同一类量具有相同的量纲，例如长度和距离，功和能量等. 此外，我们还可以看出，所选用的基本量不同，同一量的量纲也是不同的.

二、有量纲量与无量纲量；Π 定理

前面已经说过，确定一个物理量的大小的数值通常是依赖于所采用的尺度，例如长度、力等. 但有一些量，在确定它们的大小时与所采用的尺度无关，例如长度与距离之比，长度的平方与面积之比等. 因此，可以根据决定一个量的大小的数值是否与测量单位的选取有关而将量分为两类：有量纲量和无量纲量. 显然这种划分是有条件的，它依赖于量制，即基本量的选取. 为了说明这一点，我们看一个例子，

众所周知，平面角可以用弧度、度(周角/

360)或直角的分数(直角/n) 等各种单位来测量.显然,这时表示一个角的大小的数值是依赖于测量单位的选取.对应于上面三种测量单位,表示三角形内角和的数值就分别为 π, 180 和 $2n$. 因此角是一个有量纲量. 但另一方面,我们可以把角定义为它所张的圆弧的弧长与半径之比. 由这个定义本身就可唯一地确定角的测量单位——弧度.即当我们用长度来量度角时,确定一个角大小的数值与测量单位的选取是无关的.那么这时角应是一个无量纲量.这就表明有些量在一些情况下可以看作是有量纲的,而在另一些情况下则可看作是无量纲的.

因此我们说,有量纲量与无量纲量的概念是相对的概念,我们可以采用各种各样的单位.于是,一个量若在所有被采用的测量单位制中其测量单位都相同,则称为无量纲量;一个量若在实验或理论的研究中实际上或潜在地(明显地或隐含地)允许有不同的测量单位,我们就称它为有量纲量.

我们引入各种量来描述所研究的物理现象,并由理论或直接由实验建立物理规律,它们都是一些表征所研究现象的各量(有量纲的和无量纲的)之间的函数关系. 这些有量纲量的数值,依赖于测量单位制的选取,而单位制的选取又完全是人为的. 现象的本质与单位制毫无关系. 那么表示与测量单位制无关的物理事实的函数关系一定具有某种特殊的结构. 为了了解这种特殊结构,下面我们简要地介绍一下量纲理论中的著名的Π定理. 为此我们先引入几个概念:

(1) *量纲独立*

一组物理量,如果其中任何一个量的量纲公式(即由基本量表出的式子)都不能以幂次单项式的形式表示为其它各量的量纲公式的组合,则称这组量是量纲独立的. 例如,长度的量纲 L, 速度的量纲 LT^{-1} 和能量的量纲 L^2MT^{-2} 就是量纲独立的,而长度、速度和加速度的量纲则是量纲相关的. 一个量如果和一组量的量纲相关,即此量的量纲公式可以用这组量中的各量的量纲以幂次单项式表示出,显然这个量可以和这组量组成一个无量纲的组合量. 例如我们可以用长度 l, 速度 v 和加速度 a 组合成一个无量纲组合量 al/v^2.

(2) *Π定理*

设某现象中有一有量纲量 a, 它是一些有量纲量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数,即

$$a = f(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n). \qquad (1)$$

这些参量在所研究的过程中可以有些为常量,另一些为变量. 如果函数 f 所表述的是某一与测量单位制选取无关的物理规律,又如果有量纲量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 k 个量纲独立(不妨假定它们是前 k 个),则(1)式可以表示成

$$\Pi = f(1, \cdots, 1, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}),$$

其中 $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 是由 $a_1, \cdots, a_k$ 分别和 $a, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 所组成的无量纲组合量.

由Π定理可以看出,任何一个表述支配物理现象的规律的公式或方程,都可以写成无量纲量之间的关系式. 既然物理关系可以用有量纲量组成的无量纲组合来表述,那么这些无量纲(组合)量本身就必定表述了现象的某一方面的特性,因而其本身就具有一定的物理内容.下面两节中我们将通过介绍几个常见的无量纲量来说明选取无量纲量在研究物理现象时的作用和意义.

三、相 似 性

在几何学中说两个三角形相似是指它们的对应角相等,或对应边成比例. 这里我们只需要一个(长度的)测量单位,对任何取定的长度单位,边之比和角都是无量纲量. 由此可以看出,两几何图形如果是相似的,那么所有对应的无量纲量应相等.而且如果知道了相似系数(即转换比例),则经过简单的换算,由一个图形可以得到另一相似图形.

物理相似可以看作是几何相似的推广. 它可以用各种方法定义. 这里介绍一种对实际是必须的,且对直接应用是方便的定义. 若根据一现象的给定特征量,通过某种简单换算,就可以得出另一现象的特征量,则称两现象相似.为

了进行换算，当然必须知道转换比例.

两个不同的但相似的现象的数值特征量，可以看作是同一现象在两个不同测量单位制中表示出来的数值特征量，就如同两个相似三角形的尺寸可以看成是同一三角形在不同单位制中的尺寸一样. 对于任何一族相似现象，所有的对应的无量纲特征量（有量纲量的无量纲组合）都具有同样的数值. 不难看出，相反的结论亦成立，即如果两个运动的所有对应的无量纲特征量都相同，则这两个运动相似.

一族物理相似的运动确定了一种运动方式，并且它们的对应的无量纲参量全相等. 这就是说，一组特定的无量纲参量的数值就确定了一种运动方式. 这也说明有时无量纲参量更能从本质上对物理现象进行描述. 事实上，有许多物理现象，往往有那么一两个无量纲量，当它们取不同值时，运动的特征就有本质的差异，例如气体动力学中的 Mach 数，当它大于 1 和小于 1 时，其对应的超声速流动和亚声速流动的流动特性是有本质差别的. 类似的情况在各种物理现象中屡见不鲜.

四、传递现象中的几个无量纲参数

用来描述传递现象时常用到的无量纲量，通常称为运动的无量纲参数. 它们常常是用引入这些参数的人的名字来命名. 由于我们要讨论一些具体的物理现象(或过程)，因此下面的讨论都是在通常物理学中所规定的单位制中进行的.

这里所说的传递现象，主要是指在连续介质中以动量、热量和质量的传递为主的过程. 支配这些运动的物理规律(或定律)通常可以写成方程的形式. 为了方便，下面我们将利用这些方程来介绍一些有关的无量纲参量，但对方程与无量纲量的关系我们必须说明一点，虽然纯理论研究中可以通过方程来确立运动的一般性性质，但力学的研究并不总是可以通过数学推理和计算来实现的. 在许多情况下，根本没有问题的数学提法. 由于现象是如此复杂，以至于还没有满意的模型，当然更没有运动方程. 对于这种情况，往往还可以通过寻找所研究现象中的无量纲参量去建立方程. 对一般情况下如何选取无量纲参数组，我们不在这里讨论，量纲与相似性理论[2]中有详尽的介绍. 在下面的讨论中都是从运动方程出发，这只是因为对这些过程都已建立了方程，用它们来介绍一些常见的无量纲参数比较方便，而且也能较清楚地了解它们的物理意义.

首先我们考虑流体介质中有动量传递的情况. 为简单起见，假定外力为零且流体是不可压缩. 这时粘性流体运动中的动量守恒可表示为

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\quad(2)$$

这里 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 是流动速度，ρ，p 分别为流体的密度和压力，η 是流体的动力粘度. 现在问：如果流动的外部条件是几何相似（例如在几何相似的管道内，或绕几何相似的物体)，在什么条件下，流体的流动是运动相似的？从物理直观看，首先对应点上的惯性力和摩擦力(粘性力)的比值以及惯性力和压力的比值都要相等. 下面利用(2)式来推导这些条件. 如果令 L_1 和 L_2 为两相似流动的特征长度（例如管子的直径，或物体的直径或长度)，V_1，V_2 为特征速度（例如流过管子的平均速度或物体的运动速度)，密度 ρ_1，ρ_2 和粘度 η_1，η_2 对两相似流动可以是不同的. 如果用这些特征量将参与流动的各物理量无量纲化，即令

$$\tilde{\rho}_i=\frac{\rho}{\rho_i},\quad \tilde{\boldsymbol{v}}_i=\frac{\boldsymbol{v}}{V_i},\ \tilde{x}_i=\frac{x}{L_i},$$

$$\tilde{y}_i=\frac{y}{L_i},\cdots,\quad (i=1,2)$$

则所有带“～”的量都是无量纲的. 这时(2)式可写为无量纲形式：

$$\tilde{\rho}_i\left(\frac{\partial \tilde{v}_{xi}}{\partial t}+\cdots\right)=\frac{-1}{\rho_i V_i^2}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_i}+\frac{\eta_i}{\rho_i V_i L_i}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_{xi}}{\partial \tilde{x}^2}+\cdots\right).$$

如果两运动相似，则对应的无量纲量应相等，即 $\tilde{v}_1=\tilde{v}_2$, $\tilde{\rho}_1=\tilde{\rho}_2,\cdots$，也就是说这些带“～”的无量纲量应满足相同的方程. 因此，方程的系数必须相等，即

$$\frac{\eta_1}{\rho_1 V_1 L_1}=\frac{\eta_2}{\rho_2 V_2 L_2},$$

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 V_1^2}=\frac{\Delta p}{\rho_2 V_2^2}.$$

我们称无量纲数

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho V L}{\eta}$$

为雷诺 (Reynolds) 数，

$$\mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

为欧拉 (Euler) 数. (2)式左边部分是表示运动的惯性项，它与 $\frac{\rho V^2}{L}$ 成正比，而右边最后一项是粘性项，它与 $\eta V/L^2$ 成正比. 由此看出，Re 数是表示运动的惯性项和粘性项之比，同样，En 数是表示压力项和惯性项之比. 如果选定了整个运动的特征长度、速度和密度，那么这个无量纲标度参数 Re 就是整个流体动力性质的标征数了. 我们通常用它来描述整个流动的基本性质. 但是，这时在同一流动的不同地方，作用在流体质点团上的惯性力和摩擦力之比，可以有完全不同的值. 该点的 Re 数就表示该点的动力学特征. 例如，在考虑一个粘性不可压缩流体在一直圆管中的层流流动时，如果离管子人口足够远，这时沿流动方向各断面上的速度分布将是一样的，这里没有加速度，也就根本没有惯性力. 可是沿流动方向的流体压力是下降的，即这时只有处于平衡状态下的压力和摩擦力. 因而这时雷诺数 Re 处处为零. 可是雷诺却正是在研究管流时认识了这个参数的意义. 实际上，众所周知管内层流流动何时开始变为不稳定并转捩成湍流，这些首先都对雷诺数 Re 的变化非常敏感.

我们再介绍一个气体动力学中的重要无量纲参数——马赫 (Mach) 数. 它定义为

$$\mathrm{Ma}=v/c, \tag{3}$$

这里 v 是流体流动的速率，c 是声速. 如果气体介质的状态方程可写为

$$p=f(\rho,s),$$

这里 ρ, p, s 分别表示流体的密度、压力和比熵，则声速为

$$c^2=\frac{dp}{d\rho}=f_\rho(\rho,s).$$

可以证明，压力的微小变化(或小扰动)是以这个声速为传播速度在介质中传播的. 对于位势流动，利用 Bernoulli 定律还可以推得

$$\mathrm{M^2a}=-\frac{v}{\rho}\frac{d\rho}{dv}.$$

由此可以看出，如果流体是不可压缩的，即 $\rho=\rho_0=$ 常数，则有 $\mathrm{Ma}=0$. 而 Ma 越大时，介质的可压缩性越显著，因此 Ma 数的大小描述了流体的可压缩性. 如果在流动中的某一点处有一个压力扰动，于是压力的扰动相对于介质是按声速 c 传播，这时介质本身是以速度 v 运动. 因此压力扰动往下游的传播速度是 $c+v$，而往上游的传播速度是 $c-v$. 从这里立即可看出，在 $v>c$ 的情况下，压力的改变根本不能向上游传播，而当 $c>v$ 时，下游压力的改变是能影响到上游的. 所以在超声速 ($\mathrm{Ma}>1$) 情况下气体运动表现出的性状与亚声速($\mathrm{Ma}<1$)情况有本质区别. 而且气体动力学的研究往往是以 Mach 数的范围来分类，甚致实验装置也是如此. 例如，风洞主要是按它们工作的 Mach 数范围分为低速风洞、高亚声速风洞、超声速风洞和高超声速风洞.

对于各类流动问题，还可以引人各种各样的无量纲参数，这些参数表征了流动的某一方面的特性. 例如，Grashof 数 Gr, Weber 数 We, Knudson 数 Kn 等. 它们都是表征某一类流动的特征参量，例如 Grashof 数 Gr 是研究自然对流问题 (这时由于温度差而引起的密度差是运动的唯一原因)时引入的，而 Knudson 数则是研究在很低压力下气体流动问题时引入的一个无量纲参数.

如果所研究的现象中有热量的传递过程，同样也可以引入一些无量纲参量.例如，Fourier (傅里叶) 数 Fo, Péclet (贝克莱) 数 Pe 等.

$\mathrm{Fo}=\frac{at}{l^2}$ 是表示使物体内某处的温度达到θ所需时间与用a作为物体内温度变化的传播速度在透热深度l处达到相同温度θ所需时间之比值．当t和l一定时，Fo越大，说明该物体内温度的传播速度越快．又如 Péclet 数 Pe 是在描述流体流动并伴有热量传递（热传导）时所引人的一个描述运动的无量纲参数．它的物理意义是：流体的流动使流体内某一位置在单位时间内产生的热量变化，与由于热传导使该位置上单位时间内所获得的净热量的比值．贝克莱数 Pe 在流体的热能传递过程中所起的作用如同雷诺数 Re 在动量传递中所起的作用．

上面介绍了几个在动量传递和热量传递过程中常见的无量纲参数．它们都是被用来描述某一类运动的特征．另外还有一类无量纲参数，它们是用来描述物质的性质，例如 Prandtl（普朗特）数为

$$\mathrm{Pr}=\frac{\eta c_p}{\lambda}=\frac{\nu}{a},$$

这里 $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ 是运动粘性，c_p为定压比热，λ是热导率，a为热扩散率．Pr 数是表示流体的热传导和粘性之比．描述物质性质的无量纲数还有 Schmidt（施密特）数

$$\mathrm{Sc}=\frac{\eta}{\rho D}=\frac{\nu}{D}$$

和 Lewis（路易斯）数

$$\mathrm{Le}=\frac{\lambda}{\rho c_p D}=\frac{a}{D}=\mathrm{Sc}/\mathrm{Pr},$$

这里D是扩散系数，Sc 是表示流体的运动粘性和扩散系数之比，而 Le 则表示热扩散率与扩散系数之比．显然它们都是表征流体的某一方面的性质．

由于各种物理规律都是用各物理量之间的函数关系表示，要研究这些关系就必须测量这些物理量，于是引入了计量单位．显然，物理单位的选取是完全人为的，而这些物理规律是客观存在的，它们与所取的单位毫无关系．因此，表征物理规律的函数关系必定可以写成一种与测量单位制无关的无量纲形式．这种表示中的无量纲（组合）量本身都具有特定的物理意义，其中有一些就是人们常用的无量纲参数，它们描述了某一类运动的基本特性．显然在一个问题中，如何组合无量纲量是有一定任意性的，因此在研究中如何正确地选取无量纲参量是很重要的．

[1] 杜荷聪、王启光、袁楠，物理量与单位，中国计量出版社，(1986).
[2] Л. И. Седов 著，沈青等译，力学中的相似方法与量纲理论，科学出版社，(1982).
[3] L. Prandtl 等著，郭永怀等译，流体力学概论，科学出版社，(1981).

全国穆斯堡尔谱学方法学学术会议在西安举行

全国穆斯堡尔谱学方法学学术讨论会于1987年11月9日至14日在西安市陕西师范大学召开．来自全国各地28个单位的40余名代表出席了这次会议．

这次方法学学术讨论会上有30余篇论文进行了交流，这些论文涉及到穆斯堡尔谱学中的实验仪器，放射源制备，各种数据传输接口，计算机拟合方法和程序，实验技术和方法等方面．这些论文反映了我国穆斯堡尔谱学方法学方面的最新进展．其中四川大学原子核技术研究所利用回旋加速器辐照铁内靶产生的放射性同位素来制备 ^{57}Co 穆斯堡尔源的工作，引起了与会代表的关注．与会代表认为，这次会议是自1986年苏州会议以来国内在穆斯堡尔谱方面研究成果的一次检阅，通过这次交流，将进一步促进我国穆斯堡尔谱学方法学方面的发展．

这次学术会议学术气氛十分浓厚，讨论十分热烈、深入．代表们认为穆斯堡尔学组除了办好每两年举行一次的全国性的穆斯堡尔谱学会议外，还应多组织一些大家感兴趣的、反映国内外最新进展方面的专题讨论会或讲习班，以提高我国的穆斯堡尔谱学研究工作的水平，迎接1991年将要在我国召开的穆斯堡尔效应应用会议．

（李士）