偏振光中的算符及表示

董 传 华

（上海工业大学基础部）

摘 要

本文在偏振光的态矢量表示基础上，进一步讨论了偏振算符和相移算符，讨论了本征值方程和投影方程．提出了用本征态矢构成偏振算符和相移算符的方法．最后讨论了经过偏振器后的光强问题．

偏振光的研究是光学中的一个基本问题．如何描写光的偏振特性，如何描写光学元件对光的偏振特性的影响，这些是我们关心的问题．这方面的工作早年已有不少人做过，例如Jones[1]，Stokes[2]，Mueller[3]，Poincaré[4]等．近年来也不断有人在这方面进行研究，并应用于各种场合[5,6]．下面先介绍在Jones方法基础上发展起来的态矢量方法，然后用这一方法对偏振光中所用的算符进行讨论．讨论只限于完全偏振态．

如果在平行光束的平面波阵面上放一直角坐标系，那么光的电矢量的 x 分量和 y 分量满足一椭圆方程：

$$\left(\frac{E_x}{A}\right)^2+\left(\frac{E_y}{B}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{A}\right)\left(\frac{E_y}{B}\right)\cos\Delta=\sin^2\Delta, \tag{1}$$

其中 Δ 是分量 E_x 和分量 E_y 的位相差，A 与 B 是 x 方向和 y 方向电矢量的振幅．我们把偏振态的方位 ν 定义为

$$\nu=\mathrm{tg}^{-1}\frac{B}{A}. \tag{2}$$

在光强归一化条件下，取 $A=\cos\nu, B=\sin\nu$．另外，为偏振态定义一个右矢量 $|p\rangle$，再定义一个左矢量 $\langle p|$，使 $\langle p|=(|p\rangle)^+$．它们的矩阵表示如下：

$$\left.\begin{aligned}|p\rangle&=\begin{pmatrix}\cos\nu e^{-i\Delta/2}\\ \sin\nu e^{-i\Delta/2}\end{pmatrix}\\ \langle p|&=(\cos\nu e^{i\Delta/2}\ \sin\nu e^{-i\Delta/2})\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

定义左矢量和右矢量的内积为 $\langle p|p\rangle$．同一个偏振态的左矢量和右矢量的内积的物理意义是光强．如果有两个态 $|p_i\rangle$ 和 $|p_j\rangle$，它们满足下列关系：

$$|p_i\rangle=|p_j\rangle^*, \tag{4}$$

则我们说这两个态共轭．如果它们满足

$$\langle p_i|p_j\rangle=\langle p_j|p_i\rangle=0, \tag{5}$$

则说这两个态正交．例如，一个线偏振态的右矢量为

$$|p_1\rangle=\begin{pmatrix}\cos\nu\\ \sin\nu\end{pmatrix}, \tag{6}$$

它的正交态是

$$|p_{\bar{1}}\rangle=\begin{pmatrix}-\sin\nu\\ \cos\nu\end{pmatrix}. \tag{7}$$

线偏振态是自厄的，x 方向和 y 方向上的线偏振态分别是

$$|p_x\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |p_y\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{8}$$

一个圆偏振态的右矢量是（略去常相因子后）

$$|p_c\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mp i\\ 1\end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中负号代表右旋圆偏振光（$\Delta>0$），正号代表左旋圆偏振光．左旋和右旋的圆偏振光互相共轭，也互相正交．

光学元件对光的偏振特性的影响可以用一个算符 M 来表示．它与态矢量相互配合，并用 2×2 元素的 Jones 矩阵来表示．它的矩阵元一般是复的．M 可以分成两类，一类是偏振算

符，另一类是相移算符．对于无吸收的偏振算符来说，它的迹是 1，并且这种算符是厄密算符．M是线性算符，这种算符可以乘上任何一个常数相因子，因为相位本身只有相对的意义，而我们最终感兴趣的是光强．在计算光强时，这些相因子将自行消失．这些算符除了与其自身对易以外，一般是不对易的，但对于对角阵，则是可以对易的．算符乘积的迹不会因乘积次序改变而变化．这是矩阵的一般性质．下面我们将看到算符的交换不会改变最终态的光强．

一、本征方程和投影方程

如果一个算符M作用于一个偏振态$|p\rangle$，等于这个态乘上某个数 m（这个数可以是复的），那么这个态就叫这个算符的本征态，这个数也就叫相应的本征值，方程

$$M|p\rangle = m|p\rangle \tag{10}$$

叫本征值方程．例如，一个方位是 θ 的线偏振器，它的算符可表示为

$$M_1 = \begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta} \\ S_{1\theta}C_{1\theta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $S_{1\theta} \equiv \sin\theta$，$C_{1\theta} \equiv \cos\theta$．它的本征态为方位是 θ 的线偏振态，对应的本征值为 1．

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta} \\ S_{1\theta}C_{1\theta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}. \tag{12}$$

圆偏振器的算符可表示为

$$M_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

本征态是同圆偏振器有相同旋转方向的圆偏振态，对应的本征值为 1，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mp i \\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mp i \\ 1\end{pmatrix}. \tag{14}$$

对于一般的椭圆偏振器，它的算符是

$$W_1 = \begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ S_{1\theta}C_{1\theta}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

它的本征态就是

$$\begin{pmatrix}\cos\theta e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta e^{i\Delta/2}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

对应的本征值为 1．

对于相移算符，有两个方位互相正交的本征态，它们的本征值反映了在这两个本征态方位上的相移量．本征态是线偏振态的相移器叫线相移器，它可表示为

$$M_{cr} = \begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 e^{-i\delta/2} + S_{1\theta}^2 e^{i\delta/2} & -iS_{2\theta}\sin\dfrac{\delta}{2} \\ -iS_{2\theta}\sin\dfrac{\delta}{2} & C_{1\theta}^2 e^{i\delta/2} + S_{1\theta}^2 e^{-i\delta/2} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $S_{2\theta} \equiv \sin 2\theta$，$C_{2\theta} \equiv \cos 2\theta$．

$$M_{cr}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = e^{-i\delta/2}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix};$$

$$M_{cr}\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = e^{i\delta/2}\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{18}$$

本征态是椭圆偏振态的相移器叫椭圆相移器，它的算符可以表示为

$$M_{er} = \begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 e^{-i\delta/2} + S_{1\theta}^2 e^{i\delta/2} & -iS_{2\theta}\sin\dfrac{\delta}{2}e^{-i\Delta} \\ -iS_{2\theta}\sin\dfrac{\delta}{2}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 e^{-i\delta/2} + C_{1\theta}^2 e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{er}\begin{pmatrix}\cos\theta\, e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta\, e^{i\Delta/2}\end{pmatrix} &= e^{-i\frac{\delta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta\, e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta\, e^{i\Delta/2}\end{pmatrix}, \\ M_{er}\begin{pmatrix}-\sin\theta\, e^{-i\Delta/2} \\ \cos\theta\, e^{i\Delta/2}\end{pmatrix} &= e^{i\frac{\delta}{2}}\begin{pmatrix}-\sin\theta\, e^{-i\Delta/2} \\ \cos\theta\, e^{i\Delta/2}\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

所谓投影方程就是指一个偏振算符作用于一个偏振态而得到这个偏振算符的本征态．也就是说，把偏振算符对一个偏振态的作用看作一种“投影”过程，它把任何一个态矢量投影到这个偏振算符的本征矢上来，即

$$M(\nu,\Delta)|p(\theta,\delta)\rangle = m(\nu,\Delta,\theta,\delta)|p(\nu,\Delta)\rangle, \tag{21}$$

得到的投影值 $m(\nu, \Delta, \theta, \delta)$ 一般是一个复数．若 $\delta = \Delta$，那么得到的投影值是实数，且为$\cos(\theta-\nu)$；若进一步 $\theta = \nu$，则投影方程就是本征值方程．例如，方位是 θ 的线偏振器作用于方位是 ν 的线偏振态，则

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta} \\ C_{1\theta}S_{1\theta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\nu \\ \sin\nu\end{pmatrix} = \cos(\theta-\nu)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}. \tag{22}$$

同样，方位是 θ 的椭圆偏振器作用于方位是 ν 的椭圆偏振态，结果是

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ C_{1\theta}S_{1\theta}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\nu\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\nu\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}$$

$$=\cos(\nu-\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

当椭圆偏振器作用在方位是 ν 而位相差 $\delta\neq\Delta$ 的椭圆偏振态时，则可得

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ C_{1\theta}S_{1\theta}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\nu\ e^{-i\delta/2} \\ \sin\nu\ e^{i\delta/2} \end{pmatrix}$$

$$=\left(C_{1\theta}\cos\nu e^{i\frac{\Delta-\delta}{2}}+S_{1\theta}\sin\nu e^{-i\frac{\Delta-\delta}{2}}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

另外，如果有一个算符 N，其方位与 M 正交，N 的表示为

$$\begin{pmatrix} S_{1\theta}^2 & -C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ -C_{1\theta}S_{1\theta}e^{i\Delta} & C_{1\theta}^2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

那么 N 作用于 $|p(\nu,\Delta)\rangle$ 得到的投影是 $\sin(\nu-\theta)$，即

$$N|p(\nu,\Delta)\rangle=\sin(\nu-\theta)|p_N\rangle. \quad (26)$$

从几何意义上讲，这相当于把一个偏振态分解为两个分量，分解时的基矢是 M，N 的本征矢 $|p_M\rangle$ 和 $|p_N\rangle$.

$$|p(\nu,\Delta)\rangle=\cos(\nu-\theta)|p_M\rangle+\sin(\nu-\theta)|p_N\rangle. \quad (27)$$

二、用本征态来构成偏振算符和相移算符

算符 M 有两个互相正交的归一化本征态矢，它们构成完备系，这两个本征态可表示为

$$|M_1\rangle=\begin{pmatrix} \cos\nu\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\nu\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix},$$

$$|M_2\rangle=\begin{pmatrix} -\sin\nu\ e^{-i\Delta/2} \\ \cos\nu\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

它们满足完备性关系:

$$|M_1\rangle\langle M_1|+|M_2\rangle\langle M_2|=I, \quad (29)$$

式中 I 是单位矩阵. 我们将看到这一完备的正交本征态系可以唯一地决定 M. 设器件快轴和慢轴上分别产生 $\pm\delta/2$ 的相移，并且 M 的两个本征态 $|M_1\rangle$，$|M_2\rangle$ 对应的本征值为 m_1 和 m_2，它们是复数，可写成模与幅角形式:

$$m_1=|m_1|e^{-i\delta/2},\quad m_2=|m_2|e^{i\delta/2}. \quad (30)$$

利用 $|M_1\rangle$ 及 $|M_2\rangle$ 的归一性，可得

$$m_1|M_1\rangle\langle M_1|M_1\rangle=m_1|M_1\rangle;$$

$$m_2|M_2\rangle\langle M_2|M_2\rangle=m_2|M_2\rangle. \quad (31)$$

再利用 $|M_1\rangle$ 和 $|M_2\rangle$ 的正交性，有

$$(m_1|M_1\rangle\langle M_1|+m_2|M_2\rangle\langle M_2|)|M_1\rangle=m_1|M_1\rangle, \quad (32a)$$

$$(m_1|M_1\rangle\langle M_1|+m_2|M_2\rangle\langle M_2|)|M_2\rangle=m_2|M_2\rangle. \quad (32b)$$

与本征值方程 $M|M_1\rangle=m_1|M_1\rangle$，$M|M_2\rangle=m_2|M_2\rangle$ 比较，可知

$$M=m_1|M_1\rangle\langle M_1|+m_2|M_2\rangle\langle M_2|. \quad (33)$$

对于相移器，只要将(30)式代入(33)式，即可得

$$M=|m_1|e^{-i\delta/2}|M_1\rangle\langle M_1|+|m_2|e^{i\delta/2}|M_2\rangle\langle M_2|. \quad (34)$$

在无吸收的情况下，$|m_1|=|m_2|=1$. 对于偏振器，$\delta=0$；而对于理想偏振器，则 $\delta=0$，且 $|m_2|=0$，$|m_1|=1$. 即为

$$M=|M_1\rangle\langle M_1|. \quad (35)$$

利用关系式 $|M_1\rangle\langle M_2|=(|M_2\rangle\langle M_1|)^\dagger$，可得

$$|M_1\rangle\langle M_1|=(|M_1\rangle\langle M_1|)^\dagger,$$

即对于偏振算符，

$$M=M^\dagger. \quad (36)$$

这说明偏振算符是自厄的.

另外，利用量子力学中的狄喇克符号的性质，有

$$\langle p_1|p_2\rangle=\langle p_2|p_1\rangle^*. \quad (37)$$

当 $|p_1\rangle=|p_2\rangle$ 时，

$$\langle p_1|p_1\rangle=\langle p_1|p_1\rangle^*. \quad (38)$$

(37)式的物理意义是，$|p_1\rangle$ 在以 $|p_2\rangle$ 为本征态的偏振器的本征矢“方向”上的投影，与 $|p_2\rangle$ 在以 $|p_1\rangle$ 为本征态的偏振器的本征矢“方向”上的投影互相共轭. (38)式的物理意义是偏振算符的本征值是实数. (37)式还进一步表明，$|p_1\rangle$ 通过以 $|p_2\rangle$ 为本征态的偏振器所得到的光强，等于 $|p_2\rangle$ 通过以 $|P_1\rangle$ 为本征态的偏振器得到的光强. 例如，椭圆偏振光通过线偏振器后，得到的

线偏振光为

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta} \\ C_{1\theta}S_{1\theta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\nu\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\nu\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}$$

$$=(C_{1\theta}\cos\nu e^{-i\Delta/2}+S_{1\theta}\sin\nu e^{i\Delta/2})\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}; \quad (39)$$

线偏振光通过椭圆偏振器后，得到椭圆偏振光为

$$\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ C_{1\theta}S_{1\theta}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\nu \\ \sin\nu \end{pmatrix}$$

$$=(C_{1\theta}\cos\nu e^{i\Delta/2}+S_{1\theta}\sin\nu e^{-i\Delta/2})\begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{-i\Delta/2} \\ \sin\theta\ e^{i\Delta/2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

以上两种情况下的光强均为

$$I=C_{1\theta}^2\cos^2\nu+S_{1\theta}^2\sin^2\nu+2S_{1\theta}C_{1\theta}\sin\nu\cos\nu\cos\Delta. \quad (41)$$

三、偏振光强度

一切光学探测仪器和记录介质最终只对光强有反应。一个态的光强就是这个态与其自身的内积，即

$$I=\langle p|p\rangle. \quad (42)$$

设初态$|p\rangle$经过M作用后的末态是M的本征态$|p_M\rangle$。

$$M|p\rangle=m|p_M\rangle, \quad (43)$$

$$M^2|p\rangle=M(M|p\rangle)=M(m|p_M\rangle)=mM|p_M\rangle=m|p_M\rangle. \quad (44)$$

最后一步是利用了本征值方程$M|P_M\rangle=|P_M\rangle$，本征值为1。比较(43)与(44)式，有

$$M^2=M,\quad M=M^n. \quad (45)$$

这就是偏振算符的等幂性。因为偏振算符的矩阵的行列式为零，因此，偏振算符的矩阵不存在逆阵。

现在来看一个$|p\rangle$态经过M作用后的光强。末态是

$$|p'\rangle=M|p\rangle, \quad (46)$$

因此，

$$\langle p'|=\langle p|M, \quad (47)$$

于是有

$$I=\langle p'|p'\rangle=\langle p|MM|p\rangle=\langle p|M|p\rangle. \quad (48)$$

$|p\rangle$经过M后的光强就是M在这个偏振态中的期望值，利用量子力学中计算期望值的方法，有

$$I=\langle p|M|p\rangle=T_r[|p\rangle\langle p|M]=T_r[M|p\rangle\langle p|]=T_r[M_pM] \quad (49)$$

其中M_p是以$|p\rangle$为本征态的偏振算符。由于矩阵的迹不因各因子的次序交换而变，这就说明$|p\rangle$经过M后的光强等于M的本征态经过以$|p\rangle$为本征态的算符后的光强。例如，一个方位是θ的偏振光经过方位是ν的偏振器后的光强是

$$I=T_r\left[\begin{pmatrix} C_{1\theta}^2 & C_{1\theta}S_{1\theta}e^{-i\Delta} \\ S_{1\theta}C_{1\theta}e^{i\Delta} & S_{1\theta}^2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} C_{1\nu}^2 & C_{1\nu}S_{1\nu}e^{-i\delta} \\ C_{1\nu}S_{1\nu}e^{i\delta} & S_{1\nu}^2 \end{pmatrix}\right]$$

$$=C_{1\theta}^2C_{1\nu}^2+S_{1\theta}^2S_{1\nu}^2+2C_{1\theta}S_{1\theta}C_{1\nu}S_{1\nu}\cos(\delta-\Delta). \quad (50)$$

一个偏振态可以用一个态矢量表示，而偏振光中的算符可以分成偏振算符和相移算符两种。偏振算符是一种自厄算符，并满足等幂性条件。它的本征值为实数。算符可以由它的两个正交归一的本征态构成的投影算符组成。这两个正交的本征态构成完备系。偏振光经过偏振器后的光强等于这个偏振算符与以该偏振态为本征态的算符之积的迹。

[1] H. Hurwitz, R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Am.*, **31** (1941), 493.

[2] G. G. Stokes, *Trans Comb Phil. Soc.*, **9**(1852), 399.

[3] Mueller, *J. Opt. Soc. Am.*, **38**(1948), 661.

[4] H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Am.*, **44**(1954), 634.

[5] H. Kubo, R. Nagata, *J. Opt. Soc. Am.*, **2**(1985), 30.

[6] M. V. Tratnik, J. E. Sipe, *J. Opt. Soc. Am.*, **2** (1985), 1690.